Archimedesの公理と運動記述について*

中　島　信　夫

0. はじめに

十七，八世紀においては，極限とか微分という概念は運動に対する直感に基づいていたが，十九世紀になると，数学の厳密化に伴い，そういう直感による動的（dynamic）な概念が静的（static）なものに置き換えられていったと言われている[1)]。ε-δ 論法は，そういう静的な概念構成のもとになるもののひとつである。この論法の基本的考えは，運動，あるいは，より一般には変化というものを，ε と δ という二つの量を比較することによって捉えようとするものであるといえるが，そういう二つの量の比較の原型はArchimedesの公理に見られる。本稿では，ε-δ 論法やArchimedesの公理における二つの量の比較が，運動とか変化の概念とどのように結びつくかを日常言語における運動表現を分析することによって明らかにしたい。

1. 運動及び変化の表現

日常言語と数学の表現とを比較しながら，運動がどのように表現されるかをまず見てみる。ある物体が平面上を運動する場合，数学では，その物体の位置を点Pとして捉え，点Pの座標（x, y）を時間 t の関数とすることによって運動を表現する。

（1）　$x = f(t)$

　　　$y = g(t)$

例えば，点Pの座標（x, y）が次のような関数として表されるとする。

（2）　$x = 2t - 1$

　　　$y = 4t + 1$

その場合，時間 $t=0, t=1, t=2$ における点Pの座標は，それぞれ（$-1, 1$），（$1, 5$），（$3, 9$）となる。そして，

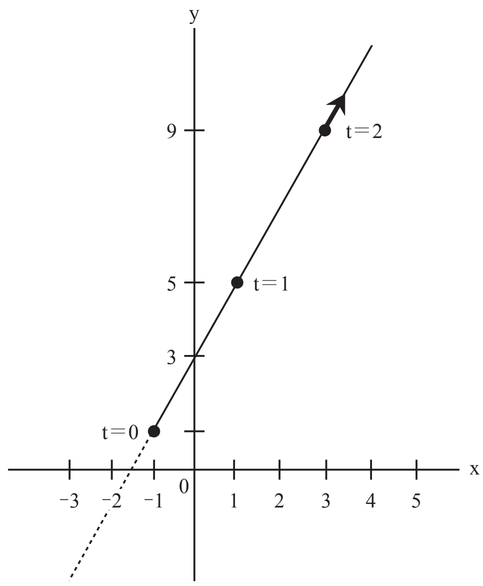

図-1

点Pの描く軌跡（trajectory）は次の方程式で表される。

（3）　$y = 2x + 3$

図で表すと上図のようになる。

一方，日常言語では，次のような，移動経路を主語とした文がしばしば見られる。

（4）a. めざす案内板を見て，道路を右折した。道は切り通しの丘の斜面を登り，ゆるやかな尾根に入ってまた右に曲がった。　　（佐々木譲「屈折率」）

　　b.［北海道道］八二号線はやがて盤渓（ばんけい）峠を越えて，札幌の南部，豊平川の作る谷の方向に出る。　　（佐々木譲「真夏の雷管」）

これらの文では，経路をたどって移動しているという感じがする。特に，(4)-bのように「やがて」といった時間表現があると，そうした感じが強くなる。次のような例では，（程度問題かも知れないが）動きは感じられず，単に経路を示すだけになる。

（5）a. Highway 101 goes to Los Angeles from San Francisco.

　　b. この山麓を，等高線に沿うように北海道八九号線，別名藻岩山山麓通りが走っており，この道路

の両側の斜面に，住宅街が拓（ひら）けている。
（佐々木譲「真夏の雷管」）

こうした例を見ると，数学の表現と日常言語の表現とはほぼ対応している。

次に，ある数 a に収束する数列 $\{a_n\}$ について見てみる。

（6）$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \cdots, a_n, \cdots$

このような数列について，日常言語では，「n が限りなく大きくなると，a_n は限りなく極限 a に近づく」といったように表現される[2]。この表現では，「大きくなる」と「近づく」という二つの動きが対応されているが，これは，次のような日常の表現を数列に当てはめたものである。

（7）a. The fence gets higher as you go towards the back of the yard.　（Sweetser 1997）
b. 囲い地の奥に向かって行くと，（それにつれて）柵は段々高くなる。

（8）The buildings get older as you walk towards downtown.　（Sweetser 1997）[3]

しかし，こうした日常的表現では，数学の論理に乗せることができないので，いわゆる ε-$\delta(m)$ 論法という表現方が用いられる。それによると，数列 $\{a_n\}$ が a に収束する，つまり，極限 a を持つ，ということ $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ は，次のような論理式で表される。

（9）$\forall\varepsilon > 0\, \exists m\, \forall n\, [n > m \rightarrow |a - a_n| < \varepsilon]$

この式は，大小関係の述語＞だけで表現されており，日常言語のような運動表現はなく静的（static）な表現になっている。しかし，遠山（1960: 71-72）では，コーシーの収束条件を解説するなかで，「数列 a_n が「a に近づく」ということは，a に近づくことを否定する敵対者を想定して，その敵対者を打ち破ることと同じだ」と述べられている。つまり，(9)では，論理語∀が敵対者として ε を提示し，受けて立つ∃が式の条件を満たす m を探す，といった解釈の中に動的な意味が含まれているというのである[4]。(9)の式は大小関係と条件文を組み合わせてできているが，実質は ε によって決まる集合 U_ε と m によって決まる集合 U_m との包含関係を表しているので，そうした包含関係に書き換えると敵対関係がはっきりする。

（10）$\forall\varepsilon > 0\, \exists m \in \mathbf{N}\, [U_m \subset U_\varepsilon]$
$U_m = \{a_n \mid n > m\}$
$U_\varepsilon = \{a_n \mid |a_n - L| < \varepsilon\}]$

まず，集合 U_m の m を1から順次増やしていったものを並べると，次のような列が作れる。

（11）$U_1 \supset U_2 \supset U_3 \supset U_4 \supset \cdots \supset U_m \supset \cdots$

これを見れば，集合が段々と減少していくことが直観的に分かり，日常言語では，上で見たように「m が限りなく大きくなると，U_m は限りなく小さくなる」と表現する。しかし，それでは，数学の論理に乗らない。そこで，ε によって決まる集合 U_ε を敵対者として設定し，それがどのようなものであれ，それよりも小さい集合 U_m を作れるような m をみつけることができる，ということで「小さくなる」という変化を表現するのである。

このように，日常言語の「近づく」という言葉は，ε-$\delta(m)$ 論法では二つの集合の対比という表現方法に変わり，その二つの集合の対比と２つの限量詞を組み合わせることによって「近づく」という意味を表そうとしていると言える。同様の表現には，Archimedes の公理がある。この公理の内容は，「いくらでも大きい数がある」，「上限はない」といった意味であるが，a, b を０より大きい実数，n を自然数とすると，普通，次のような式によって表される[5]。

（12）$\forall a, b\, \exists n\, [b < na]$

この式の a を固定すると次の式が得られる。

（13）$\forall b\, \exists n\, [b < na]$

そして，a を２倍，３倍としたものを並べると次のような列が得られる。

（14）$a < 2a < 3a < 4a < \cdots < na < \cdots$

この列は，(11)と異なり段々と増大していくが，b が ε と同じく敵対者として設定され，どのような b であれ，na がそれよりも大きくなるような n を見つけることができる，ということを(12)は言っている[6]。また，b を固定すると次の式が得られる。

（15）$\forall a\, \exists n \left[\frac{b}{n} < a\right]$

そして，b/n の列はつぎのような減少列となり，今度は a が ε と同じく敵対者として b/n と対比される。

（16）$b > \frac{1}{2}b > \frac{1}{3}b > \frac{1}{4}b > \cdots > \frac{1}{n}b > \cdots$

この(15)の式は，$\lim_{n\to\infty} \frac{b}{n} = 0$ と，つまり，ε-$\delta(m)$ 論法による次の命題と同値である[7]。

（17）$\forall\varepsilon > 0\, \exists m\, \forall n \left[n > m \rightarrow \frac{b}{n} < \varepsilon\right]$

これまでのところで，三つの運動表現を見た。ひとつは，時間 t をパラメーターとし，動点Pの座標 $(f(t), g(t))$ を値とする関数として運動を捉えるものであった。その場合，動点Pの集合を運動の軌跡として見ることができる。二つ目の運動表現は，運動とそれに関連した変化を記述する(7), (8)の日常表現の

ように，二つの変化量を関連づける表現である。これを数列 $\{a_n\}$ に当てはめると，「自然数 n がドンドン大きくなると，それに対応する実数の値 a_n も増大，ないし，減少していく」といった表現になり，これは数学では，変数 a_n に応じて値 a_n が定まる関数として表現される。三つ目は，ε–$\delta(m)$ 論法や Archimedes の公理のように，ある変化する変量 x があった場合，それに対応する別の変化量 y を設定し，両者の間の違い，つまり，差を見つけることにより，変量 x の変化を捉えようとするものである。その差は，ε–$\delta(m)$ 論法の場合は集合の包含関係を表す⊂という 2 項述語を，Archimedes の公理の場合は大小関係を表す＜という 2 項述語を用いて次のように表現される。

（18）a.　$X \subset Y$

　　　b.　$x < y$

これらの式は，真偽を問う命題を表すので，ε–$\delta(m)$ 論法と Archimedes の公理では，変化を数学の論理に乗せることができる。先の二つの表現方法では，変化を関数という「もの（対象）」として捉えているので，そのままでは論理に乗せることはできない[8]。ここで日常言語には ε–$\delta(m)$ 論法や Archimedes の公理に対応するような表現方法はないのかという疑問が生じるが，そのことについては次節で検討する。

2.　運動主体の視点から見た変化の記述

運動主体による自己の運動記述には，他者の視点によるものと自己の視点によるものとの二つがある[9]。次の例は，ある園芸店にいる運動主体が，その園芸店に来るまでの経緯を説明するもので，他者の視点から行われている。

（19）　ローソンのある交差点からさらに南へ二ブロック走り，南丸山交番のある交差点で菊水旭山公園通りを右折した。坂道を少し上って行くと，山麓通りに出たので，その通りを南に向かって 2 キロほど走ってこの園芸店に来た。

つまり，この例では，自分の目で実際に見た光景を記述しているのではなく，自身を他者としてみる仮想視点を設定し，その視点から自分の運転する車の走行経路を記述している。

これに対し，次の例では，運動主体自身の視点から見た状況の変化を記述することにより，自身の運動を表現している[10]。

（20）a.　野菜畑が終わり，広い牧草地が始まった。

　　　b.　After a while she noticed that small gardens started to appear, and the rough-looking houses began to turn into small cottages.

The Old Curiosity Shop by Charles Dickens
https://www.youtube.com/watch?v=GNSGdON738Q

こうした間接的記述により運動が表現できるのは，前節で見た(7)，(8)の例や次の例から分かるように，位置の変化としての運動に知覚状況の変化が連動しているからである[11]。

（21）a.　The wells get deeper as you go down the road.

　　　b.　The fence gets higher as you go towards the back of the yard.

　　　c.　The windows get dirtier/sootier/darker as you go towards the Bay.

　　　d.　The buildings get older as you walk towards downtown.

これらの例で興味深いのは，*as*-節の記述は他者の視点から運動主体の運動を記述しているのに対し，主節はその運動主体の視点から見た状況変化を記述している点である。

日本語では，前節の(7)–b の例や次の例から分かるように，接続助詞「と」を用いて，こうした英語と同等の表現を作ることができる。

（22）a.　道路を進んで行くと，（それにつれて）井戸は段々深くなる。

　　　b.　囲い地の奥に向かって行くと，（それについて）柵は段々高くなる。

さらに，この「と」を用いると，切れ目のない連続した運動を分節して記述することができる。一例として，次の例を分節的に記述するとどうなるかを見てみる。

（23）　道路を進んでいくと，電信柱が段々と高くなっていく。
（The Telephone poles get taller as you go down the road.（Sweetser 1997））

この場合，それぞれの電信柱の位置と高さが特定できたとすると，次のように各電信柱の地点とその高さを示す発話を連ねた表現に換えることができる。

（24）　p_1 地点に行くと，h_1 の高さの電信柱がある。
p_2 地点に行くと，h_2 の高さの電信柱がある。
p_3 地点に行くと，h_3 の高さの電信柱がある。
……………………………………………………
p_n 地点に行くと，h_n の高さの電信柱がある。
……………………………………………………

このように，運動の動的な記述を分節することにより静的な記述に変換できるが，これはアニメーションと逆のことをしていることになる。アニメーションは，まず，静止画を作り，それを次々と見せていくことにより動的な映像を作り出している。

これまでの例では，対象そのものは静止しているが，「見え方」が運動に連動して変化している。しかし，対象は静止しているものだけではなく，対象そのものが動いている場合がある。その場合，その対象の動きを察知するには，次の例のように対象の「後を追う」ことをすればよい。

(25)　むこうから幸右衛門がやって来た。後を追うと，幸右衛門は顔を伏せて，通行人とすれ違い，今度は左に折れて亀井町の町通りに入り，途中から狭い路地に曲がった。

この後を追う行為も分節して記述することができる。まず，対象のいた①の地点に行ってみる。対象が動いているとすれば，②の地点にいるはずである。さらに，その②の地点に行ってみて，対象が引き続き動いていれば，③の地点に移動している。このように対象の後を追っていくことによって対象の運動を捉えることができる。

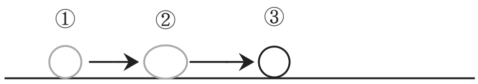

図-2

具体的には，次のような記述が考えられる。

(26)　後を追って亀井町の町通りの入り口まで行くと，幸右衛門は通りの途中にある狭い路地に曲がった。それで，その路地まで行ってみると，路地の奥にある裏店の木戸をくぐった。さらに，その木戸まで行ってみると，中程にある一件の家の前で足をとめ，戸をあけるとするりと土間に入り込んだ。

これを(24)のような一般的な形で表すと，次のようになる。

(27)　p_1 地点に行くと，p_2 地点にいる。
p_2 地点に行くと，p_3 地点にいる。
p_3 地点に行くと，p_4 地点にいる。
……………………………………………
p_n 地点に行くと，p_{n+1} 地点にいる。
……………………………………………

これと(24)との違いで注意すべきは，(24)では運動の地点と対象の高さという別種のものが対応付けられているのに対し，この(27)では，運動のある地点と別の地点という同種のものが対応付けられる。

後を追う行為には，後を追って追い越していく場合，追い詰めて捕まえる場合，とか色々考えられるが，数列の極限になぞらえて考える場合には，探偵が容疑者を尾行するときのように，運動対象の動きに合わせて後を追うのがよい。その場合，単純化すると，三つの尾行のタイプが考えられる。

i.　ひとつは，容疑者が一定の早さで移動しており，それに合わせて尾行する場合で，このとき容疑者との距離は一定に保たれる。

ii.　二つ目は，容疑者が移動の速度を徐々に速めて行く場合で，このとき容疑者との距離は段々と開いていく。

iii.　三つ目は，容疑者が移動速度を遅くしていく場合で，このとき容疑者との距離は徐々に縮まっていく。

以上で，日常言語における運動表現の概略を見たが，次節では，その表現を参考にしながら，ε-$\delta(m)$ 論法及び Archimedes の公理における表現の仕組みを検討すると共に，尾行の仕方と数列が極限に収束ないし発散するする様子とを比較してみる。

3. 日常言語の観点から見た数学の運動表現

3. 1　二つの量の対比

前節で，日常言語における「と」を用いた変化の記述には，次の構文が用いられることをみた。

(28)　行為主体 A が位置 P へ行くと，対象 T が X になる。

ここで，X には，大きさ (高さ，広さ，長さ，深さ等)，色，古さなどの特性が入る。この構文は，行為主体 A が移動によって自身の位置 P を変化させ，それに対応する知覚状況の変化を通して，対象 T の性質ないし状態 X の変化を捉えることを表している。また，この構文から，行為主体 A の位置 P の変化とそれに対応する対象 T の特性 X の変化を，位置から性質への関数 P → X として捉えることができる。しかし，X の変化を論理に乗せるには，ε-$\delta(m)$ 論法や Archimedes の公理におけるように，(式 $X \subset Y$，$x < y$ における Y や y のような) もうひとつの同種の量を設定し比較しなければならない。

一方，対象が移動するとき，つまり，位置が変化す

るときには，その変化を捉える「と」の構文は次のようになる。

(29)　行為主体 A が P_n へ行くと，対象 T が P_{n+1} にいる。

この構文をもとに，対象 T の位置を順に並べると次のような列が出来る。

(30)　$P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, \cdots P_n, P_{n+1}, \cdots$

行為主体 A は対象 T の跡をつけていくので，これらの位置を順に辿っていくことになる。P_n がある基準点からの距離を表すとすれば，移動対象 T と行為主体 A の占める二つの位置という同種の量を比較することができる。そうすれば，行為主体の占める位置は，移動対象の位置の変化を捉えるためのもうひとつの量と考えることができる。つまり，ε-$\delta(m)$ 論法ないし Archimedes の公理と同様に，行為主体の位置の変化が，対象の位置の変化を捉えるもうひとつの変化量の働きをしている考えることができる。

このことを，例えば，aを固定した(31)の Archimedes の公理で見てみると，まず，(32)のような変化の列を考えることができる。

(31)　$\forall b \exists n [b < na]$

(32)　$a < 2a < 3a < 4a < \cdots < na < \cdots$

そうすると，b が(32)の変化を捉えるもうひとつの変化量であったように，行為主体 A の位置もこの b と同じ働きをしていると考えられるのではないか，と推測できる。ただし，大小関係<は推移的であるのに対し，P_n と P_{n+1} の関係は推移的でないという違いがある。つまり，(29)をもとに，P_n と P_{n+1} の関係を次の(33)のように表し，(32)にならって変化の列を作ると，(34)のようになる。

(33)　$P_n \Rightarrow P_{n+1}$

(34)　$P_1 \Rightarrow P_2 \Rightarrow P_3 \Rightarrow P_4 \Rightarrow \cdots \Rightarrow P_n \Rightarrow P_{n+1} \Rightarrow \cdots$

この列の関係⇒は，(32)の<のような推移的関係(transitive)ではない。例えば，$P_1 \Rightarrow P_2$ と $P_2 \Rightarrow P_3$ が成立していても，$P_1 \Rightarrow P_3$ は成立しない[12]。この関係⇒は，自然数の列の「次の」という関係に似ている。「次の」という関係は，自然数の集合 $\boldsymbol{N}$ から $\boldsymbol{N}$ への関数を φ（単射で $\neg 1 \in \varphi(\boldsymbol{N})$）を用いて次のように定義できるが，推移的ではない（彌永（1972: 68–69））。

(35)　$\varphi(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad y$ は x の次の元である。

関係<の特殊な場合が「次の」という関係であるが，自然数において，関係<が関数 φ を通して導入される場合，まず φ を用いて加法を定義し，その加法によって次のように定義される[13]。

(36)　$m < n \Leftrightarrow \exists l [n = m + l]$

関係⇒は，行為主体の認知体験の継起をもとにしたもので，ある体験が時間的意味で別の体験の後とか前と言うことができるから，もとの列(30)の各項の間には「前」とか「後」という推移的関係が成り立っている。しかし，認知的観点からみると，関係⇒の方が「前」とか「後」という関係に先行している。この点，関係<が関数 φ を通して導入されるのと似ている。

(29)の構文で表されている対象 T が P_{n+1} にいる状況は，P_n の位置にいる行為主体 A の視点から見た認知状況である（⇨は，視点の向きを表す）。

A の視点からみた状況

視点

A　⇨　T

$\cdots P_n \quad \Rightarrow \quad P_{n+1} \cdots$

図-3

これは，行為主体 A の視点から認知できない状況は表現できないということでもある。このことは，次の例から確認できる[14]。

(37) a.　太郎が学校に着くと，花子が学校に訪ねて来た。

b.　＊太郎が学校に着くと，花子が家に訪ねて来た。

(37b)のように，空間的に連続していない状況は太郎には認知できないので不適切である。しかし，行為主体 A は，また，他者の視点から自分自身を眺めることができる[15]。

他者の視点から見た状況

視点

⇩

A　　　　T

$P_1 \Rightarrow P_2 \Rightarrow P_3 \Rightarrow P_4 \Rightarrow P_5 \Rightarrow P_6 \Rightarrow \cdots P_n \Rightarrow P_{n+1} \cdots$

図-4

このように，他者の視点に立つと，P_1 点に立っていた A と P_5 点に立っている T とを比べることができる。その場合，「P_2 は P_5 より前である」といったように，推移的関係を表す「前」という表現が用いられるようになる。実際，次の例の示すように，「前」とか「とき」のような推移的関係を表す表現では，空間的連続性が無くても用いることができる。

(38) a.　太郎が学校に着く前に，花子が家を訪ねた。

b.　太郎が学校に着いたとき，花子が家を訪ねた。

「前」とか「後」という表現は，空間的意味にも用いられ，また，次の例では空間的意味の「遠い」，「近い」は，時間について用いられている。

(39) a.　それは，遠い昔の話です。

b.　死の床で幼年期，少年期と思い出すと，それらがありありと近くに思えてきた。

他者の視点から見るということは，こういう表現を通して，1 次元的時間の流れの中のものを 2 次元ないし 3 次元的空間に移し替えていることになる[16]。それと同時に，次から次へと継起的に生じるという動的な感じが消えて，静的なものに変わっていく。従って，認知的には「次の」という継起的関係と「前」とか「後」という推移的関係は，視点の転換を通してつながっていると言える。こうしたことを考えると，Archimedes の公理による(32)の列と「と」の構文にもとづく(34)の列も認知的にはつながっていると言える。そして，さらに，ε-$\delta(m)$ 論法における δ は運動対象に対応し，ε は尾行する行為主体に対応すると考えることもそう無理なことではない[17]。

3. 2　収束の捉え方

移動対象の跡を追う追い方には色々あるが，その中で動きを察知するには「尾行」する追い方が適していることを前節で見た。次に，尾行する追い方と数列の収束の仕方との関係について検討してみる。

(40)　D が P_n へ行くと，S は P_{n+1} にいる。

まず，移動対象がいた最初の地点を P_1 とし，この(40)の構文によって指定される移動対象の位置を並べていくと次のような列ができる。

(41)　$P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, \cdots P_n, P_{n+1} \cdots$

「と」の構文による運動記述は連続した運動を分節するという点でアニメーションの逆を行なっているということであった。一方，l を極限とする数列 $\{a_n\}$ の説明では，「n を限りなく大きくしていくと，a_n は限りなく l に近づいていく」といった言い方がされる。これは，a_n という「静止点」を辿っていくと運動が生まれるということでアニメーションと同じ原理が使われており，「と」構文による記述とちょうど逆を行なっている。従って，「と」によって記述される運動を，数列を辿ることによって生まれる運動に対応させる，ないしは，同一視して見ることができる。

前節で，尾行には 3 つのタイプがあることを見た。その違いを見るために，まず，隣り合った地点の差 $a_n = |P_n - P_{n+1}|$ を取り出して並べると，次のような階差数列を作ることができる。

(42)　$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \cdots, a_n, a_{n+1}, \cdots$

容疑者が速度を変えないで移動している場合は，尾行者との距離は一定に保たれるので，数列は次のようになり，a に収束する。

(43)　$a, a, a, a, a, \cdots$

容疑者が速度を増やしていく場合，仮に各地点で 2 倍に増えるとすると，数列は $a_n = 2^{n-1}a$ ($n = 1, 2, 3, \cdots$) となるので，次のような列ができ無限大に発散する。

(44)　$a, 2a, 4a, 8a, 16a, 32a, \cdots, 2^{n-1}a, \cdots$

逆に，各地点で 1/2 倍に減速していく場合は，$a_n = 1/2^{n-1}a$ ($n = 1, 2, 3, \cdots$) という数列で次のような列になり，0 に収束する。

(45)　$a, \dfrac{1}{2}a, \dfrac{1}{4}a, \dfrac{1}{8}a, \dfrac{1}{16}a, \dfrac{1}{32}a, \cdots, \dfrac{1}{2^{n-1}}a, \cdots$

容疑者の P_n 地点における移動距離は級数の次のような部分和 S_n になる。

(46)　$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n$

一般に，一定の速度で移動し続けると距離はいくらでも増えていくが，速度が一定の比率で変化する場合，変化率を r とすると部分和 S_n は次のようになる。

(47)　$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} = a\dfrac{1-r^n}{1-r}$

具体的に，変化率が 2 の場合，移動距離はいくらでも増えていくが，1/2 の場合は，$2a$ に収束する。

(48)　$\lim_{n\to\infty} a_n = 2a$

ただし，各項 a_n の距離を移動する時間は減少していかず同じであるので，収束するまでには無限の時間がかかる（有限時間内に収束する場合は，附録のⅣを参照)。尾行者が容疑者に速度を合わせるこれらの場合，容疑者の移動だけを考慮すればいいように見えるが，区切りとなる地点 P_n を決めるには尾行者が必要である。

次に，移動者とその跡を追う者との速度が異なる事例として，追う者の速度が追われる者の 2 倍の場合を見てみると，(42)の各項が次のような数列になる。

(49)　$\dfrac{1}{2}a, \dfrac{1}{4}a, \dfrac{1}{8}a, \dfrac{1}{16}a, \cdots, \dfrac{1}{2^n}a, \cdots$

そして，最初の距離 a に n 項までを加えた移動距離は次のように表される。

(50)　$S_n = a + \dfrac{1}{2}a + \dfrac{1}{4}a + \dfrac{1}{8}a + \dfrac{1}{16}a + \cdots + \dfrac{1}{2^n}a$

これは次のようになり，S_n(n = 1, 2, 3, …) は $2a$ に収束する。

(51)　$S_n = a + \left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right)a$　(n = 1, 2, 3, …)

(52)　$\lim_{n\to\infty} S_n = 2a$

追う者と追われる者の速度が異なる事例としては，この他，追われる者の速度が変化する場合とか追う者の速度が変化する場合とかが考えられる（詳しくは付録

を参照)。

このように追う者と追われる者の二者を設定すると，数列の多様な収束ないし発散の仕方をみることができるが，それだけでなく，二つの量を比較して変化を捉えようとする ε-$\delta(m)$ 論法やArchimedesの公理の理解に資するのではないかと思う。

4. まとめ

ε-$\delta(m)$ 論法や，そのもとにあるArchimedesの公理は，ある変化する量を別の量と対応，比較することによって，その変化を捉えようとするものである。その際，直感的には連続した変化は分節され区切られて，いわば静止画を並べていくような記述がなされる。

一方，ある対象の動きを察知する場合，その対象を目で追う，あるいは実際にその後をつけるという行為によってその動きを捉える。そういう捉え方の記述として，日本語の接続助詞「と」を用いた記述がある。つまり，「対象がいた位置 P_n に行くと」の部分で認知主体の動きを表し，それに続く「その対象は P_{n+1} の位置にいる」という部分で認知主体の知覚する状況変化が表される。このような記述のひとつを一枚の静止画像に喩えると，「と」による記述は，切れ目のない連続した動きを静止画像の連ねたものに変換するという，アニメーションと逆の操作を行うことである。そして，これは，ε-$\delta(m)$ 論法やArchimedesの公理による変化の記述に重なる。

付録：「後の追い方」の数学モデル

3. 2節で尾行する場合の後の追い方について簡単に説明したが，付録として他の追い方を含めもう少し詳しく書いておく。

I. 尾行

尾行される方は，速度を自由に変えることができるが，尾行する方は，される方に速度を合わせて変えるという条件で，単純化した「尾行」の数学モデルを作ってみる。まず，尾行者（detective）が容疑者（suspect）を見つけ尾行を始めたとき，容疑者がいた地点を P_1 とする。そして，尾行者が尾行してその地点に行ったとき，容疑者は P_2 地点に進んでいる。このように尾行が続いていくとき，その記述は，次の形の文を連ねたものとなる。

(1) DがP$_n$へ行くと，SはP$_{n+1}$にいる。

そして，このような記述をもとに容疑者のいた地点を並べてみると。次のような位置点の数列ができる。

(2) $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, \cdots P_n, P_{n+1}\cdots$

最初の項 P_1 を基準点 $P_1=0$ とし，後に続く項を基準点からの距離とする。次に，各項の間の差 $a_n=|P_n-P_{n+1}|$ を取り出して並べると，階差数列を作ることができる。

(3) $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \cdots, a_n, a_{n+1}, \cdots$

このような階差数列が，本論で見た三つのタイプの尾行では，具体的にどのようになるかを次に見てみる。

i）まず，容疑者が，一定の速度で移動し，尾行者との距離が一定に保たれる場合は，容疑者と尾行者の最初の距離 $a_1=|P_1-P_2|$ を a とすると，各項はすべて a に等しくなる。つまり，(3)は具体的には次のような列になる。

(4) $a, a, a, a, a, \cdots$

従って，この数列 $a_n=a$（$n=1, 2, 3, \cdots$）は，a に収束する。

(5) $\lim_{n\to\infty} a_n=a$

ii）容疑者の移動速度が倍々に増えていき，尾行者との距離が広がっていく場合には次のような列になる。

(6) $a, 2a, 4a, 8a, 16a, 32a, \cdots, 2^{n-1}a, \cdots$

この数列 $a_n=2^{n-1}a$（$n=1, 2, 3, \cdots$）は，発散する。

(7) $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$

iii）容疑者の移動速度が各項ごとに1/2に減少し，尾行者との距離が狭まっていく三つ目場合，次のような列になる。

(8) $a, \frac{1}{2}a, \frac{1}{4}a, \frac{1}{8}a, \frac{1}{16}a, \cdots, \frac{1}{2^{n-1}}a, \cdots$

この数列 $a_n=\frac{1}{2^{n-1}}a$（$n=1, 2, 3, \cdots$）は，0に収束する。

(9) $\lim_{n\to\infty} a_n=0$

一方，容疑者の移動を追っていくと，各点の移動距離は次のようになる。

(10)
$$\begin{aligned}
&P_1=0\\
&P_2=0+a_1=a\\
&P_3=0+a_1+a_2\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&P_n=0+a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{n-1}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

これの実質は，初項を a とする数列 $\{a_n\}=\{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots\}$ の部分和 S_n の列である。

(11) $S_n=a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots+a_n$

この部分和の列 $\{S_n\}=\{S_1, S_2, S_3, \cdots, S_n, \cdots\}$ が(i)，(ii)，(iii)のそれぞれの場合において収束するかどうか次に見てみる。

まず，(i)の場合，部分和の列は，$S_n=na$（$n=1, 2, 3, \cdots$）となるので収束しない。

（12）　$\lim_{n\to\infty} S_n=\infty$

(ii)，(iii)の場合，部分和 S_n は一般に次のようになる。

（13）　$S_n=a+ar+ar^2+ar^3+\cdots+ar^{n-1}=a\dfrac{1-r^n}{1-r}$

(ii)の場合，$r=2$ であるので，部分和の列は $S_n=(2^n-1)a$（$n=1, 2, 3, \cdots$）となり収束しない。

（14）　$\lim_{n\to\infty} S_n=\infty$

(iii)の場合，$r=\dfrac{1}{2}$ であるので，部分和の列 $S_n=2a\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)$（$n=1, 2, 3, \cdots$）は $2a$ に収束する。

（15）　$\lim_{n\to\infty} S_n=2a$

$$\Leftrightarrow\quad \forall\varepsilon>0\,\exists m\,\forall n\left[n>m \rightarrow \left|2a-\left(2a-\frac{2a}{2^n}\right)\right|<\varepsilon\right]$$

$$\Leftrightarrow\quad \forall\varepsilon>0\,\exists m\,\forall n\left[n>m \rightarrow \frac{2a}{2^n}<\varepsilon\right]$$

なお，この尾行モデルでは，容疑者が最初の距離 a を移動する時間を t とすると，(i), (ii), (iii)のいずれの場合も各項 a_n の距離を移動する時間は同じ t になる。従って，(iii)の場合，収束するにしても収束するまでには無限の時間がかかる。

II. 逃亡

追跡者は一定の速度で追跡し，逃亡者は徐々に速度を増していくが，追跡者の速度を上回ることはないという条件でモデルを作ってみる[18]。まず，逃亡者と追跡者の最初の距離を a とし，逃亡者の速度は追跡者の 1/2 で，段階ごとに $(2^n-1)/2^n$ 倍増えていくものとする。追跡者と逃亡者の距離は，追跡者が逃亡者のいた地点に着いたときから始めると次のようになる[19]。

（16）　$a_1=\dfrac{1}{2}a$

$$a_2=\frac{3}{4}a_1=\frac{3}{8}a$$

$$a_3=\frac{7}{8}a_2=\frac{21}{64}a$$

………………………

$$a_n=\frac{2^n-1}{2^n}a_{n-1}$$

………………………

この数列 $\{a_n\}$ はコーシー列で収束するので，追跡者と逃亡者の距離は極限値 $\lim_{n\to\infty} a_n$（$=0.288\ldots a$）に限りなく近づいていく。従って，逃走距離の列 $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots$ も一定の距離に収束する。

（17）　$S_n=a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{n-1}+a_n$

$$a_n=\frac{2^n-1}{2^n}a_{n-1}\quad (n=1, 2, 3, \cdots)$$

逃亡者が，追跡者との最初の距離 a を移動するのに要する時間を t とすると，a_n 項までを移動する時間 T_n は次のようになる。

（18）　$T_n=t_1+t_2+t_3+t_4+\cdots+t_{n-1}+t_n$

$$t_n=\frac{2^n-1}{2^n}t_{n-1}\quad (n=1, 2, 3, \cdots)$$

逃走距離と同じく時間も収束するが，追跡者と逃亡者の距離は数列 $\{a_n\}$ の極限値以下にはならないので，逃走はずっと続いていくことになる。

III. 追い抜き

追い抜く者は追い抜かれる者の2倍の速度で追いかけるという条件のモデルを作ってみる。追い抜く者が追い抜かれる者のいた位置に着いたときに追い抜かれる者が進んでいる距離は $a_n=1/2^n a$ となるので，次のような数列になる。

（19）　$\dfrac{1}{2}a, \dfrac{1}{4}a, \dfrac{1}{8}a, \dfrac{1}{16}a, \cdots, \dfrac{1}{2^n}a, \cdots$

そして最初の位置からの移動距離 S_n は次のようになる。

（20）　$S_n=a+\dfrac{1}{2}a+\dfrac{1}{4}a+\dfrac{1}{8}a+\dfrac{1}{16}a+\cdots+\dfrac{1}{2^n}a$

$$=a+\left(1-\frac{1}{2^n}\right)a\quad (n=1, 2, 3, \cdots)$$

これの数列 $\{S_n\}$ は $2a$ に収束する。

（21）　$\lim_{n\to\infty} S_n=2a$

追い抜かれる者が a の距離進むのに要した時間を t とすると，追い抜きを始めて $2t$ 後に追い付き $2t+\alpha$ 時間後（$\alpha>0$）には追い抜いている。一般に，アキレスと亀のパラドックスと呼ばれているは，このタイプの事例である。無限回加えていくのに有限時間内で終わってしまうのが不合理というわけである。

なお，容疑者と尾行者が同じ速度で移動しているとき，容疑者だけが減速する場合，あるいは，逆に尾行者だけが速度を上げる場合，いずれにおいても尾行者は容疑者に追いつき追い抜くことになる。例えば，容疑者が各地点で速度を 1/2 に減速した場合には，上と同じように $2t$ 時間後に $2a$ の距離で追いつき追い抜くことになる。

IV．追い詰め

尾行で容疑者が 1/2 倍ずつ減速していく場合，尾行者は常に同じ速さで後を追うので，追いつくまでには無限の時間がかかったが，常に容疑者の 2 倍の速さで後を追うと有限時間内に容疑者に追い付き追い詰めることができる。その場合，P_1 の距離を a とすると，容疑者と後を追う者との距離 $a_n = |P_n - P_{n+1}|$ は，a の $(1/4)^{n-1}$ 倍となるので，次のような数列ができる。

（22）　$a, \frac{1}{4}a, \frac{1}{16}a, \frac{1}{64}a, \frac{1}{256}a, \cdots, \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}a, \cdots$

この数列は 0 に収束する。

（23）　$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}a = 0$

そして，容疑者が P_n 地点までに移動する距離 S_n は次のようになる。

（24）　$S_n = a\dfrac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}a - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n a$

この S_n の数列は $(4/3)a$ に収束する。

（25）　$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{4}{3}a$

一方，容疑者が P_1 まで移動する時間を t とすると，各区間の移動に要する時間は次のような数列となる。

（26）　$t, \frac{1}{2}t, \frac{1}{4}t\ \frac{1}{8}t, \cdots, \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}t, \cdots$

すると，容疑者が P_n 地点までに移動する時間は T_n となる。

（27）　$T_n = t\dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}$

この T_n の数列は $2t$ に収束する。

（28）　$\lim_{n\to\infty} T_n = 2t$

注

＊ 本稿のテーマは，中島（2021）でほぼ論じ尽くしたが，後半の数学との関連の考察が十分ではなかった。数学の専門でない者が，その本質に関わるようなことを論じることには躊躇があるが，具体的な言語表現をもとにした考察は他に見当たらないようなので，今回，もう一度，数学における運動表現について書くことにした。数学について理解の足らない点とか，不適切な表現とかがあるかもしれないが，Lakoff や Núñez たちのメタファーに基づいたアプローチとは異なった考察の仕方があることが指摘できればと思う。

1）この辺りの事情については，Courant and Robbins（1996: 305-307）や Fletcher（2007: 527）などを参照。しかし，Lakoff and Núñez（2000）や Margheit and Núñez（2013）などによると，数学の論証とか概念構成などの数学者の実際の活動においては，‘approaching’ とか ‘proceeding’ といった認知的 ‘dynamism’ が働いているという。

2）Courant and Robbins（1996: 292）は，数列の極限の動的考え方について次のように述べている。

Our intuition suggests a “dynamic” idea of a limit as the result of a process of “motion”: we move on through the row of integers 1, 2, 3, ⋯ , n, ⋯ and then observe the behavior of the sequence a_n. We feel that the approach $a_n \to a$ should be observable.

Núñez and Lakoff（1998: 186-191）では，このような ‘approaching a limit as n approaches infinity’ といった表現の意味を概念メタファーとして捉えている。そして，具体的な数列 $\{x_n\}=n/(n+1)$ を例にあげて，2 つの運動の対応関係を詳しく解説している。

3）この例は，個々の建物が古くなっていくという意味ではなく，隣り合った家を互いに比較していくと段々と古くなっていくという意味である。次の例でも，特定のひとつの論文ではなく，毎年投稿される複数の論文が比較されている。

i.　Higginbottom’s paper keeps getting longer every year!

Sweetser（1997: 118）は，‘the buildings’ や ‘Higginbottom’s paper’ のこのような解釈を ‘role reading’ と読んでいる。(6)の例でも，関数としての数列の値が変化しており，Sweetser の言葉を借りれば，数列 $\{a_n\}$ の ‘role reading’ ということになる。

4）これは，ゲーム意味論（game-theoretic semantics）における全称と存在の二つの限量詞の解釈と同じものである。ゲーム意味論では，存在限量詞は立証者（verifier），全称限量詞は偽証者（falsifier）にそれぞれなる。このような考え方については，Courant, and Robbins（1996: 292）や嶺（2018: 49）に簡単な解説がある。詳しくは，Hintikka（1974），(1982）などが参考になる。また，2 つの限量詞のそのような二者敵対者の解釈は，いわゆるスコーレム関数（Skolem function）f を用いると，次のように 2 階の述語論理で明示的に表現できる。

i.　$\exists f \forall \varepsilon \forall n[n > f(\varepsilon) \to |a - a_n| < \varepsilon]$

そこでは，次のような同値関係が利用されている。

ii.　$\forall x \exists y \psi(x, y) \Leftrightarrow \exists f \forall x \psi(x, f(x))$

スコーレム関数については，Enderton（1972: 274-275）が参考になる。

5）ユークリッド原論では，Archimedes の公理が二つの量が比を持つということの定義として用いられている。つまり，a と b を固定した次の式が成り立つとき a と b とは互いに比を持つという。

i.　$\exists n[b < na]$

山口, 須田（1987）の山口が担当する 2 章では Archimedes の公理が詳しく解説されている。

6）このあたりのことは，彌永（1978: 127-128）の順序加群の ‘アルキメデス性’ についての説明を参考にした。

2 つの量を比較する，似たような方法に「取り尽くし法（method of exhaustion)」がある。これは，「a と b の 2 つの量が与えられたとき，b から半分以上を取

り去り，さらにそれから半分以上を取り去るという操作を続けていけば a より小さくすることができる」という方法である。別の言い方をすると，「正数の列 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ において $a_{n+1} \leqq a_n/2$ ならば，任意の $a>0$ に対し a_n が a より小さくなる番号 n が存在する」(『岩波数学入門辞典』) となる。これは $a_{n+1}=a_n/2$ の場合，次のような式で表される。

i.　$a_1=b$

ii.　$\forall a>0 \exists n \left[\dfrac{b}{2^n}<a\right]$

Archimedes の公理は，次のように変形できるので，取り尽くし法は Archimedes の公理と実質同じである。

iii.　$\forall a, b \exists n \left[\dfrac{b}{n}<a\right]$

この辺りのことについては，吉田・赤 (1961: 106–110) が詳しい。

7) もとの(12)の式は，(13)と(15)だけでなく，次の自然数 n についての式とも同値になる。

i.　$\forall b \exists n [b<n]$

ii.　$\forall \varepsilon>0 \exists m \forall n \left[n>m \rightarrow \dfrac{1}{n}<\varepsilon\right]$

8) ε-$\delta(m)$ 論法が判りにくいのには，少なくとも三つの理由がある。ひとつは，全称限量詞と存在限量詞の相互関係を理解することで，それは対立関係にある二者を設定するなどして説明される。二つ目は，集合の包含関係が条件文を用いて表現されているので，この条件文から，なかなかすぐには包含関係が思いつかないということである。三つ目は，そもそもなぜふたつの量を対応，ないしは，対比させるのかということである。この三つ目の理由について解説した文献は，筆者の知る限り見当たらない。本稿の目的のひとつは，日常言語の運動表現を考察することにより，三つ目の理由を解明することである。

9) 以下は，日常言語の運動表現について中島 (2020)，(2021) で述べたことに多少の追加と修正を加え，まとめたものである。特に，「と」の構文については中島 (2020) の 2. 3 節で，行為主体と構文との関係については中島 (2021) の 1. 3 節および 1. 4 節で詳しく論じた。

10) Lakoff and Núñez (2000) や Margheit and Núñez (2013) では，本稿でいう他者の視点からの運動記述だけが扱われており，こうした運動主体の視点から見た状況変化が間接的な運動記述になっているという点が見逃されている。

11) (21)の例は，いずれも Sweetser (1997) からの引用。

12) 例えば，まず，次の(ia)と(ib)の二つが成立しているとする。

i.　a. 亀井町の町通りに入ると，途中から狭い路地に曲がった。

　b. 狭い路地に曲がると，奥に木戸をかまえた裏店があった。

このとき，次の関係は成り立たっていない。

ii.　亀井町の町通りに入ると，奥に木戸をかまえた裏店があった。

この(ii)では，町通りの場面と裏店の場面が直接つながってしまい，狭い路地の場面が除外されてしまうのである。

13) 加法＋は次の二つの式によって定義される。

i.　$n+1=\varphi(n)$

ii.　$n+(m+1)=(n+m)+1$

加法の定義については彌永 (1972: 73–77)，順序については彌永 (1972: 80–84)，などが参考になる。

14) (37)の例は，(久野 1973: 177) からの引用である。

15) ここでいう「他者の視点」は，前節と少し異なり，統合的 (synthetic) 視点とでもいうべきものである。例えば，ある立体を円柱として認識する場合，正面，上，斜めからといった複数の視点から見た情報を「統合」して判断する。この場合の立体を円柱として見ているときの視点は単なる他者の視点とは異なる。ちなみに，こうした 2 次元の断片的情報をもとに立体を構成する認知過程は，「逆射影変換」と呼ばれている (須賀 (1980))。

16) こうした一種の時間の空間化については，中島 (2001: 113–115) で少し詳しく論じた。

17) Núñez and Lakoff (1998: 98–99) によると，ε-δ 論法による実数の連続性の定義で ε-δ の部分 (portion) は，「x の変化に対応して (correspondingly) y が変化する」という対応関係を厳密にしたところにその働きがあるのであって，算術化 (arithmetisation) ないし厳密化の一部をなしているわけではないという。そして，「関数 $f(x)$ の極限が L である」ということを動的な表現を用いて次のように定義している。

for every ε＞0, there exists a δ＞0, such that
　　as x *moves* toward a and *gets* and *stays* within the distance δ of a,
　　$f(x)$ *moves* toward L and *gets* and *stays* within the distance ε of L.

しかし，すでに指摘したように，ε-δ 論法の重要な点は，「変化」という概念を ε と δ の二つの量の比較に還元したところにある。従って，ε-δ の部分は算術化において重要な役割をしている。

18) 「逃亡」は，青山 (2010: 89–90) の「加速する亀のケース」に相当する。

19) $a_n=\dfrac{2^n-1}{2^n}a_{n-1}$ であるので，総積記号を用いると，

$a_n=a\times\prod_{k=1}^{n}\dfrac{2^n-1}{2^n}$ のように表記できる。

参考文献

青山拓央 (2010)「アキレスと亀：なぜ追いつく必要がないのか-野矢・青山・植村論文の検討-」『科学哲学』43–2

Courant, R. and H. Robbins (revised by I. Stewart) (1996) *What is Mathematics? An Elementary Approach to Ideas and Methods*, Oxford: Oxford University Press.

Enderton, H. B. (1972) *A Mathematica Introduction to Logic*, New York : Academic Press.

Fletcher, Peter（2007）“Infinity,” in Dale Jacquette ed. *Philosophy of Logic*, Amsterdam : North-Holland, pp. 523–585.

Hintikka, Jaakko（1974）“Quantifiers vs. quantification theory,” *Linguistic Inquiry*, vol. 5 pp. 153–177.

Hintikka, Jaakko（1982）“Game-Theoretical Semantics : Insights and Prospects,” *Notre Dame Journal of Formal Logic*, Vol. 23（2）, 219–241.

久野暲（1973）『日本文法研究』大修館

Lakoff, G. and R. E. N Núñez（2000）*Where Mathematics Comes From : How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*, New York : Basic Books.

Margheit, T. and R. Núñez（2013）“The Motion Behind the Symbols : A Vital Role for Dynamism in the Conceptualization of Limits and Continuity in Expert Mathematics, *Topics in Cognitive Science* 5, 299–316.

嶺幸太郎（2018）『微分積分学の試練：実数の連続性と ε-δ』日本評論社

中島信夫（2001）「具象概念から抽象概念のメタファー的構成-時間概念の場合-」『私学研修』第 157・158 号, pp. 105–118.

中島信夫（2020）「日常言語と数学の言語における運動表現の比較-収束する数列を中心-」『甲南大学紀要：文学編』No 170, pp. 47–58.

中島信夫（2021）「運動の分節とその記述-ε と δ は何に由来するのか-」『甲南大学紀要：文学編』No 171, pp. 73–84.

Núñez, R. E. and G. Lakoff（1998）“What did Weierstrass Really Define? : The Cognitive Structure of Natural and ε–δ Continuity,” *Mathematical Cognition*, 4（2）, 85–101.

須賀哲夫（1980）『知覚と論理-「生まれつき」とは何か-』東京大学出版会

Sweetser, Eve（1997）“Role and Individual Interpretations of Change Predicated,” in J. Nuyts and E. Pederson（1997）*Language and Conceptualization*, Cambridge : Cambridge University Press, pp. 116–136.

遠山啓（1960）『数学入門（下）』岩波新書

彌永昌吉（1972）『数の体系（上）』岩波新書

彌永昌吉（1978）『数の体系（下）』岩波新書

山口格, 須田勝彦（1987）「数学教育の観点から見たアルキメデスの公理」『北海道大學教育學部紀要』49, pp. 25–42.

吉田洋一・赤攝也共著（1961）『数学序説』培風館