

運動の分節とその記述*

—— ε と δ は何に由来するのか ——

中 島 信 夫

0. はじめに

本稿は、数学のような抽象的な学問における概念形成が日常言語とどう関わっているかを明らかにすることを目的とする。そこで、「変化の状態の評価」を量的に行う ε - δ 論法を取り上げ、この論法と日常言語の運動表現とを比較検討する。

前半では、日常言語における変化の記述を、特に位置の変化である移動運動の記述に重点を置き、調べる。そして、日本語の接続助詞「と」による連続した運動を分節的に記述する場合の仕組みを明らかにする。後半では、この「と」による記述方式を数列の極限への収束に当てはめるとどうなるか検討する。その後で、 ε - δ 論法と日常言語の運動表現とを比較検討する。

1. 日常言語の運動表現

1.1 運動を記述する2つの視点

今、新幹線に乗って京都に向かっていているとすると、その運動記述としてまず次のもの考えられる。

(1)a. This train is approaching Kyoto.

b. 京都に近づいている。

もう1つの記述の仕方として次のものがある。

(2)a. Kyoto is approaching.

b. 京都が近づいてくる。

これは、運動の相対性を利用したもので、移動している自分を固定して逆にまわりが動いているというように表現したものである¹⁾。これら2種類の記述の仕方には、運動の相対性による違いだけでなく、もっと別の興味深い違いが認められる。その違いを見るために、次の2つの表現を比較してみたい。

(3)a. Vanessa is sitting across the table from me.

(バネッサは、テーブルを挟んで私の向かい側

に座っている)

b. Vanessa is sitting across the table.

(バネッサは、テーブルの向かい側に座っている)

いずれ文もバネッサと発話者がテーブルを挟んで座っている状況の描写であるが、形の違いから分かるように、(3a)の発話では描写されている場面の中に発話者が入っているのに対し、(3b)では入っていない。写真に置き換えれば、(3a)は棒の先にカメラを付けて自分自身を被写体の一部に入れた写真に対応し、(3b)は発話者の視点とカメラの視点とを一致させて撮り、自分自身は被写体に含まれない写真に対応する。この写真との対応から分かるように、(3b)では描写されている場面と発話者が見ている場面とは一致しているが、(3a)で描写されている場面は実際に見ている場面ではなく、棒の先に付けたカメラで撮った写真のように視点を別の場所に想定して見た場面である²⁾。

こうした(3a)と(3b)の間に見られる違いは(1)と(2)の間にも見られ、(1)では描写されている場面の中に発話者が含まれているが、(2)では含まれていない。実際、(1)は次のように発話者を明示する表現に言い換えることが出来る。

(4)a. We are approaching Kyoto.

b. 私たちは京都に近づいている。

つまり、(1)の表現は移動している自分を発話者自身の視点ではなく子供たちを見て「子供たちが走っている」と言うような(子供たちにとって)他者の視点から描写した表現である。

一方、(2)は、窓の外の移り変わる景色を見ながら言っている感じがする表現で、次のようなに自分が置かれている知覚状況の変化を述べることによって自身の移動を表す表現に連なる。

(5) 駅舎の前に並ぶ手動の転轍機。犬釘を打った枕木。錆びたレールの貨物ヤード。昔から少しも変わらぬ幌舞の風景が、少しずつ動き出した。

(浅田次郎「鉄道員」)

(6) “That’s Seven Mile Beach,” Avery said. “One of the

most beautiful and most famous in the world. Sand as white as sugar. Warm, clear water. warm, beautiful women.”

Mitch smiled and watched the hotels pass.

(J. Grisham *The Firm*)

この2つの視点は互いに排除するものではなく、次の例のように両方の視点が交互に使われることもある。

(7) ボーイング767は、その島を右手に見ながら、さらに高度を下げていった。やがて島は、飛行機の前方に隠れた。機は真正面の位置に島を置いたようだ。最終の着陸の態勢に入ったのだろう。海面がどんどん近づいた。海の上に着陸でもするのか、とと思っているうちに、窓の外に緑が見え、建物が走り、道路や車の列が見えた。飛行機は滑走路に機体を落として、鈍い衝撃音をあげた。

(佐々木譲「ネプチューンの迷宮」)

この例で、「さらに高度を下げていった」、「海の上に着陸でもするのか」、「飛行機は滑走路に機体を落として」といった部分は、視点を飛行機の外に想定した記述であるが、「やがて島は、飛行機の前方に隠れた。機は真正面の位置に島を置いたようだ」、「海面がどんどん近づいた」、「建物が走り」などの表現は、発話者の視点から見た知覚状況の変化でもって飛行機の運動を表現している。

1.2 他者の視点からの運動記述

自分の過去の移動行動を記述するときは、自分の行動を振り返りながら他者の視点で行われる。

(8) (私は) その交差点から南へ2ブロック走り、丸山交番のある交差点で公園通りを右折して園芸店に向かった。

これに対し、次は同じく他者の視点からの記述であるが、想像された移動行動の記述である。

(9) あの園芸店に向かうには、その交差点からさらに南へ二ブロック走り、南丸山交番のある交差点で菊水旭山公園通りを右折するのがいい。坂道を少し上って行くと、山麓通りに出るのだ。

(佐々木譲「真夏の雷管」)

この例では、発話者あるいは不特定の人物の移動を述べているが、移動そのものより移動経路を示すことに主眼がある。

さらに、次の例では「道」という移動経路を主題として明示して、その経路をたどる運動が記述されている。

(10) めざす案内板を見て、道路を右折した。道は切

り通しの丘の斜面を登り、ゆるやかな尾根に入ってまた右に曲がった。

(佐々木譲「屈折率」)

この例の「道は……斜面を登り」といった表現では、「道」が移動しているような書き方になっているが、これは「道」という経路をたどる運動、あるいは、道を軌跡とする運動、を表す一種のメタファーになっている (Núñez and Lakoff 1998: 89)。この(10)の例は、実際の出来事の描写であるが、次の例では、主題となっている「道路」はこれから起きると予想される移動運動の軌跡である³⁾。

(11) いま佐伯たちの車は、鉄工団地通りを市街地方向に向けて走っている。ちょうど左手に札幌競馬場がある。道路はこの先で南におれ、函館本線の高架をくぐって、札幌市街地の西側に出る。北五条通りに出たところで左折すると、一キロ少々で札幌駅前に着くのだ。

(佐々木譲「真夏の雷管」)

次の例のように、for a while, 「しばらく」、「やがて」といった時間表現があると、現に運動が生じているという現実感が生じる。

(12)a. The highway runs along the shore for a while.

(松本 1997: 209)

b. そのハイウェイは海岸沿いをしばらく走る。

(松本 1997: 209)

c. 北要採石鉱業の本社から五分ほど南西方向に走った。北海道道八二号線、通称左股(ひだりまた)線という幹線道路を、山に向かうようだ。……八二号線はやがて盤溪(ばんけい)峠を越えて、札幌の南部、豊平川の作る谷の方向に出る。

(佐々木譲「真夏の雷管」)

実際、(12c)は、(10)と同じく現に起きている出来事の描写である。こうした移動経路を主題とする描写の視点を考えてみると、単に他者の視点というだけでなく、ドローンに取り付けられたカメラの視点のように経路全体を俯瞰するような視点になっている。

1.3 運動主体の視点からの記述

1.1節で見た運動を知覚主体の視点から捉える例では、運動の相対性を利用することによって自身が固定されていると見なし、周囲の状況の方が運動ないし変化しているとする表現方法が用いられていた。知覚主体の視点から自身の運動を捉える捉え方には、もう一つ、運動によって生じる知覚状況の変化によってその運動を表現する方法がある。次はそうした例で、知覚

主体自らが動き、その動きによって生じる知覚状況の変化でもって自身の運動を表している。

(11) 直樹は思いきって、うすぐらい林のおくへは
いっていった。

と、ふいに、ぽっかりと林はおわり、直樹はあ
れはてた門の前に出た。

(松谷みよ子「ふたりのイーダ」)

つまり、「林を抜け出る」という行為によって生じる「林がおわる」という知覚状況の変化を用いて林を通り抜けるという移動を表しているのである。次の英語の例も、知覚状況の変化を用いて運動を表す例である。

(12)a. On and on we went. Then suddenly the trees came to an end. *Rebecca* by Daphne Du Maurier

<<https://www.youtube.com/watch?v=52hi3E4us70>>

b. We are not far from the house now. The drive widened. We turned the last corner and there was Manderley. *Rebecca* by Daphne Du Maurier

<<https://www.youtube.com/watch?v=52hi3E4us70>>

c. After a while she noticed that small gardens started to appear, and the rough-looking houses began to turn into small cottages.

The Old Curiosity Shop by Charles Dickens

<<https://www.youtube.com/watch?v=GNSGdON738Q>>

d. ラグーザを後にして風はますます強く、中央の帆柱に大帆をあげただけで、カッタロ、ブドゥア、アンティバリのヴェネツィア領の町々の沖を、船は矢のような早さで進んだ。トルコ領になっているスクータリの山も、見るまに遠くなる。(塩野七生「海の都の物語」)

これらの場合は、実際に移動運動が生じていることを述べるものであるが、次のような例では、知覚状況の変化に主眼があり、並行して起こっている運動は単に想定されているだけである。

(13)a. There is a house every now and then through the valley. (Talmy 1988)

b. 大きな都会の南のはずれ、市街地がつきて原っぱや畑がはじまり、家々のたたずまいもだんだんわびしくなってくるあたりに、松林にかくれるようにして小さな円形劇場の廃墟がありました。(M. Ende *Momo* 大島かおり訳)

これらの例では、家が点在する風景や都市から郊外にかけての風景の描写に、運動とそれに伴う状況変化との並行関係を利用したもので、状況変化の描写に主眼があり、運動は単に暗示されている。

1.4 視点の転移

次の例では、ヴェネツィアの都に海から近づいていくときの知覚状況の変化が述べられている。

(14) 外海からリドの外港を通してヴェネツィアの潟に入ってくると、霧でもたちこめていないかぎり、すでにそのあたりからヴェネツィアの都の全貌を眼にすることができる。まるでシネマスコープの画面を見るように、宮殿や鐘楼や元首官邸が、はるか彼方の波の上に浮かんでいるのが見える。リドからヴェネツィアへは、ただまっすぐに海の上を行けばよい。フィレンツェ郊外の門から一直線に糸杉の並木が続くヴィラを訪れる時、進むにつれてヴィラの正面が少しづつはっきりと眼に入ってくるように、ヴェネツィアも、船が街に近づくにつれて、まず宮殿の窓の数が数えられるようになり、次いで精巧なレース模様を思わせる窓飾りが見えてくる。船が、ヴェネツィアの街の東側にある国営造船所を右に見、聖ジョルジョの島やジュデッカの島を左に見ながら進む頃になると、バラ色の元首官邸の柱廊に立つ人の顔の表情さえ、わかるような気になるくらいだ。そして、正面には、大運河が口を開けている。

(塩野七生「海の都の物語」)

ここで注目すべきは、「進むにつれて」、「船が街に近づくにつれて」、「島を左に見ながら進む頃になると」などの従属節によって、知覚状況の変化を引き起こす運動が明示されている点である。前節の例は、先行する発話などの文脈によって移動運動は示されてはいるが、1つの発話だけに注目すると、知覚対象の変化を述べることによって、それと並行して起こっている運動を間接的に表現するものであった。しかし、そうした例も、この(14)の例のように、従属節を用いて暗示的に示されている運動を明示することが出来る。

(15)a. The drive widened as they approached the house.

b. The paint gradually darkened as you move along the wall. (Sweetser 1997)

c. The fence gets higher as you go towards the back of the yard. (Sweetser 1997)

(16)a. The wells get deeper as you go down the road. (Sweetser 1997)

b. The windows get dirtier/sootier/darker as you go towards the Bay. (Sweetser 1997)

c. The buildings get older as you walk towards downtown. (Sweetser 1997)

こうした構文では、asに導かれる従属節は運動を記述し、主節は、その運動の主体から見た知覚状況の変化を表す。また、注すべきこととして、(15)の例では、変化は1つの対象の中で生じているが、(16)の例では、1つの対象ではなく同種の複数の対象全体を見た場合に見られる変化を表している⁴⁾。日本語でも、次の例のように同様の表現が可能である。

(17)a. (彼らが) 家に近づくにつれて、道幅は広くなった。

b. 道路を進んで行くにつれて、井戸は段々深くなります。

c. 囲い地の奥に行くにつれて、柵は段々高くなります。

これらの例には、視点という観点から見て非常に興味深いことがある。それは、従属節の表す状況を語る視点と主節の表す状況を語る視点とが異なっていることである。従属節の表す運動は発話者の視点で見ているのに対し、主節が表している知覚状況の変化を見るのは運動した運動主体の視点からである。つまり、従属節から主節に移るとき、発話者の視点から運動主体への視点へと視点が転移しているのである。例えば、(15a)や(17a)の例で、家に近づく移動を見ているのは発話者の視点であるが、道が広くなるという状況を見ているのは家に近づいている本人達である。発話者が自身の視点を移動者の視点に同化させていると見ることが出来るが、見るのは、一義的には運動している本人の視点である⁵⁾。

日本語の場合、従属節と主節とで視点の異なることがかなりはっきり分かる接続助詞「と」でこれらの例を言い換えることが出来る。

(18)a. 家に近づくと、(それにつれて) 道が広くなった。

b. 道路を進んで行くと、(それにつれて) 井戸は段々深くなる。

c. 囲い地の奥に向かって行くと、(それについて) 柵は段々高くなる。

「AとB」という構文には、Aがある行為者の運動を表すと、Bはその運動主体の視点から見た状況を表すという特徴がある。このことを、次のような「と」を用いた例で見てみたい。

(19) 家の裏にまわると、勝手口があった。

この例で、主節の「勝手口があった」は裏にまわるという行為の行為者が見た知覚状況を表すが、それは接続詞「とき」を用いた例と比べてみるとはっきりする。

(20)a. ?家の裏にまわったとき、勝手口があった。

b. 家の裏にまわったとき、勝手口が見えた/勝手口があるのが見えた。

この「とき」を用いた2つの例のうち、(20a)の例は不自然であるが、(20b)だと自然になる。これは、(20a)のように主節、従属節とも発話者の視点から見ることになる「とき」の場合は、いわゆる誘導推論が働いて「勝手口のないときがあった」という含意が生まれ不自然になるが、(20b)のように行為者の見た状況に代えてやると自然であるからである。このことは、(19)の主節「勝手口があった」では、明示はされていないが、(20b)のように「勝手口が見えた」と解釈されることを示している。したがって、(18)の例でも、主節の表す状況は従属節の表す運動の運動主体が見た知覚状況であると言える。さらに付け加えておくと、(18)のような例では、「それにつれて」という表現がなくとも、そうした意味が含意されている⁶⁾。

この節で見た視点の転移ということは、後の議論で非常に重要になるので、ここで簡単な例を使って整理しておく。まず、次の2つの例はいずれも同一の状況を記述するものとする。

(21)a. 道が広がっていった。

b. 家に近づくと、道が広がっていった。

その場合、(21a)は、運動主体から見た知覚状況だけを記述し運動そのものは暗示的に示される(図-1)。視点はどうかというと、発話者が運動主体の時は発話者自身の視点になり、発話者以外が運動主体のときは、発話者は視点をその運動主体のものと同化させることになる。

知覚・運動主体の視点

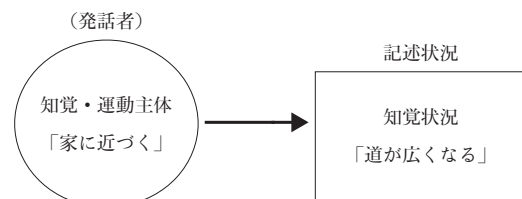
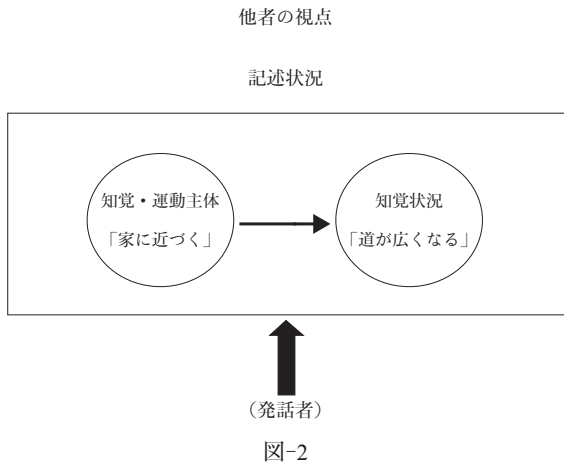


図-1

これに対し、「家に近づく」という運動を明示している(21b)になると、視点の転移により発話者は自身の運動を他者の視点で見ることになる(図-2)。また、運動主体が発話者でないときは、その運動は文字通り他者である発話者の視点から見ることになる。いずれの場合も、運動に伴う知覚状況の変化を見る視点は運動主体の視点であるが、運動主体の運動と「道が広がる」という知覚状況の両方が発話者の視点から記述



される。

1.5 変化・運動の分節的記述

次の例は、幸右衛門という人物が町中の裏店にある一件の家に入るという出来事の記述である。

(22) 幸右衛門は顔を伏せて、通行人とすれ違い、今度は左に折れて亀井町の町通りに入ると、途中から狭い路地に曲がった。奥に木戸をかまえた裏店があった。幸右衛門はためらいのない足どりで木戸をくぐると、裏店の中程にある一件の家の前で足をとめ、戸をあけるとするりと土間に入りこんだ。(藤沢周平「ささやく河」)

ここでは、「町通りに入り右へ左へと進んでいくと、……になり、そこは土間であった」のように移動を一気に簡単に表現するのではなく、「と」を用いてより小さい行為に分節し、変化する場面が具体的に描写されている。これをより見やすくすると、次のようになる。

(23) 町通りに入ると、路地に曲がった。(路地に曲がると、) 木戸をかまえた裏店があった。その木戸をくぐると、一件の家の前で足をとめ、戸をあけると、土間に入り込んだ。

次の例では、継続した移動の中で生じる3つの場面変化が描写されている。

(24) 村の中を歩いて行くと、小さな庭が現れたかと思うと薄汚れた家に移り、さらに、小さな小屋へと変わっていった。

これを(23)のように「と」を使って場面の変化ごとに移動運動を区切って表現すると次のようになる。

(25) 村の中を歩いて行くと、小さな庭が現れた。さらに歩いて行くと、薄汚れた家が現れた。さらに進むと、小さな小屋が現れた。

次では、移動と並行して一定のより連続的な変化が表現されている。

(26) 道路を進んでいくと、電信柱が段々と高くなっていく。

(The Telephone poles get taller as you go down the road. (Sweetser 1997))

もし、それぞれの電信柱の位置と高さが特定できれば、各地点ごとの電信柱の高さを示す発話を連ねた表現に換えることができる。

(27) p_1 地点に行くと、 h_1 の高さの電信柱がある。

p_2 地点に行くと、 h_2 の高さの電信柱がある。

p_3 地点に行くと、 h_3 の高さの電信柱がある。

⋮

p_n 地点に行くと、 h_n の高さの電信柱がある。

⋮

日常的にはこのような言い方はしないが、我々の変化の認知の仕方には合致しているように思われる。

1.6 運動する対象の分節的記述

運動主体が発話者となって自身の運動を記述する場合、2つの方法があった。1つは、1.2節で見たような例で、他者の視点から俯瞰的に見て記述する方法である。この場合、記述されている状況は見たままの状況ではなく、作りあげられたものである。もう1つは、1.3節で見たような例で、発話者の見ている状況の変化をそのまま記述することによって間接的に自身の運動を示す方法である。それでは、前節の(22)で幸右衛門の移動を記述した記述の仕方はどうであろうか。他者の視点からの記述ではあるが、幸右衛門が発話者として記述しているわけではないので、前者の記述方法ではない。幸右衛門の移動が目の前で起こっているかのように記述している点で、後者の記述方法に似ている。実際、幸右衛門の後を追いかける運動主体を想定し、その運動主体が発話者として幸右衛門の移動を記述しているとすると、(22)のような記述になる。今、そのような運動主体を想定し、1.4節で見たように「と」を用いてその運動主体の運動を明示すると、次のような表現が考えられる⁷⁾。

(28) むこうから幸右衛門がやって来た。後について行くと、幸右衛門は顔を伏せて、通行人とすれ違い、今度は左に折れて亀井町の町通りに入り、途中から狭い路地に曲がった。後を追ってその路地に入ると、奥に木戸をかまえた裏店があった。さらに、後を追って行くと、幸右衛門はためらいのない足どりでその木戸をくぐり、中程

にある一件の家の前で足をとめ、戸をあけると
するりと土間に入り込んだ。

このような対象の移動を感知する感覚主体の運動は、
歩く、走るといった身体全体を使用した運動だけでなく、「目で追う」というときのような眼の動きだけの
場合も含めて考えるべきである⁸⁾。実際、「見ると」と
か「見ていると」などの表現によってそうした眼の動
きを明示できる。

(29) むこうから幸右衛門がやって来た。見ていると、
幸右衛門は顔を伏せて、通行人とすれ違い、今
度は左に折れて亀井町の町通りに入り、途中か
ら狭い路地に曲がった。

そうすると、移動は位置の変化といえるので、色、形
などを含めた何らかの変化を感覚主体が感知するのは、
自身が運動することによって可能になると言える。

それでは、後を追う感覚主体と、その主体の視点か
ら見た対象の移動との関係を、前節のように分節的に
記述するにはどうすれば良いであろうか。それにはま
ず移動対象のいる位置①を1つ確定し、そこまで行っ
てみるところから始めれば良い。移動対象は静止して
いるのでなければ別の場所②にいるので、次に、そ
こまで行ってみる。移動対象が続けて動いておれば、別
の場所③にいるので、さらに、そこまで行ってみる。
こうした感覚主体と移動対象の行動を記述していけば、
両者の関係をもとに連続した移動運動を分節的に表現



図-3

できる。例えば、(28)の例をこの方式に従って書き換
えると、次のようなものが考えられる。

(30) 後を追って亀井町の町通りの入り口まで行くと、
幸右衛門は通りの途中にある狭い路地に曲がっ
た。それで、その路地まで行ってみると、路地
の奥にある裏店の木戸をくぐった。さらに、そ
の木戸まで行ってみると、中程にある一件の家
の前で足をとめ、戸をあけるとするりと土間に
入り込んだ。

すぐ気づかれるように、この記述の仕方はゼノンのパ
ラドックスにおけるアキレスと亀の論法に似ている。
移動対象に亀を、その運動対象を追っている運動主体
兼知覚主体にアキレスをそれぞれ当てはめると、次の
ような例が作れる。

(31) アキレスが亀のいた地点に行くと、亀はさらに
先の地点にいる。

このような文を用いると、アキレスと亀との運動関係を
「と」の分析を通して明らかに出来る。後半の議論
では、アキレスと亀の論法を ε - δ 論法と関連づけて
みるが、その関連づけが妥当なものであれば、数列の
収束を「と」の分析を通して ε - δ 論法考察すること
が出来る。

2. 数学における運動記述との対応

前章では、日常言語の運動表現を考察することに
よって自分自身の運動を記述する仕方に2つのやり方
があることを見た。1つは、他者の視点立って自身の
運動を俯瞰的に捉える記述で、「A点から出発してB
点を通り、C点に到着した」といったような表現に見
られる。この場合、記述されているのは、見ている状
況そのものではなく、「頭の中で」作られたものであ
る。もう1つは、知覚した状況変化を直接記述するこ
とによって、間接的に運動主体自身の運動を表すもの
で、「麦畑が終わり、菜の花畑が始まった」とか「塔
が段々小さくなる」といった表現に見られる。「子供
たちが全力で走っていった」というような発言をする
場合でも、「眼で」子供たちを追いかけるとい運動
主体自身の運動が背後にあると考えることが出来る。

この章では、関数の直観的捉え方には前者の他者の
視点からの記述がもとになっていることを見る。さら
に、数列や関数の収束とか ε - δ 論法の考え方は、後
者の状況変化の記述による運動記述がもとになってい
ることを見る。

2.1 運動の軌跡としての関数：他者の視点からの運 動記述

関数は変化する量の相関関係として捉えることがで
き、しばしば運動の概念を用いて理解される⁹⁾。例え
ば、 x 、 y という2つの変化する量があり、 x の変化
に応じて y が変化するとき、両者の関係である関数 f
は一般に $y=f(x)$ という式で表される。そして、この
関数 f は、図-4のような座標平面上の曲線として表
すことができる。さらに、この曲線は、 x と y の対と
して表される平面上の点 $\langle x, y \rangle$ の動いた軌跡と見
ることができる。つまり、関数 f を点 $\langle x, y \rangle$ の運動
の軌跡として捉えることができる。

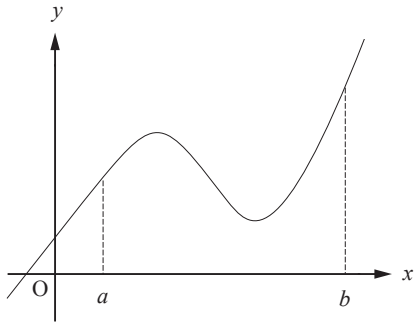


図-4 $y=f(x)$ を表す曲線

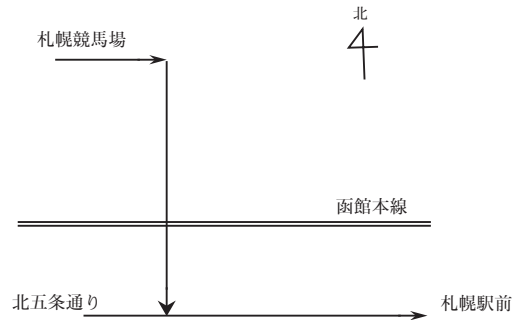


図-5

このような関数の捉え方は、前節でみた他者の視点からの運動記述に対応している。例えば、次の経路を示す例を見てみればこのことが分かる。

(32) いま佐伯たちの車は、鉄工団地通りを市街地方向に向けて走っている。ちょうど左手に札幌競馬場がある。道路はこの先で南におれ、函館本線の高架をくぐって、札幌市街地の西側に出る。北五条通りに出たところで左折すると、一キロ少々で札幌駅前に着くのだ。

(佐々木譲「真夏の雷管」)

ここでは競馬場から札幌駅までの経路が説明されているのであるが、その経路は、運動体が図-5のように移動する軌跡として示されている。

他者の視点からの記述の特徴は、運動を対象化して捉えることができることである。例えば、図-4において、変数 x が a から b まで変化するときの点 $(x, f(x))$ の軌跡は $\{(x, f(x)) | a \leq x \leq b\}$ という集合であらわすことができる。(32)の例でも、軌跡としての

道路は、「南におれ、高架をくぐって、市街地の西側に出る」という道路として対象化できる。

2.2 運動主体の視点からの記述

次に、無限数列を例にとり、運動主体の視点からの運動記述という観点から、数学における運動表現を調べてみる。数列は自然数に実数を対応させる関数であるので、一般項 $a_n = \frac{1}{n}$ の無限数列について、自然数と実数の関係を座標平面に図示すると図-6のようになる。

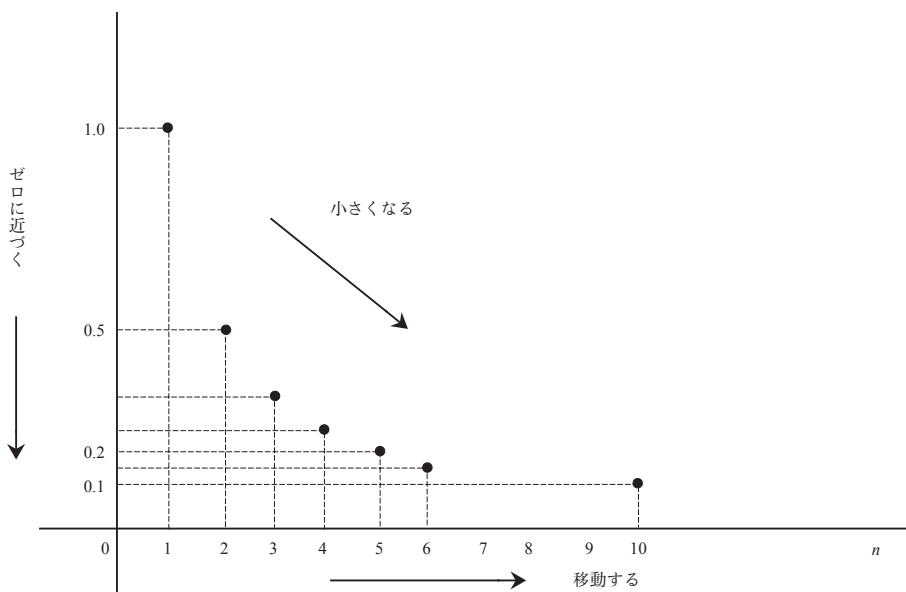


図-6

このような両者の関係は、次の数列についての説明が示すように、一種の運動として動的に捉えることができる。

(33) Our intuition suggests a “dynamic” idea of a limit as the result of a process of “motion”: we move on through the row of integers $1, 2, 3, \dots, n, \dots$ and then observe the behavior of the sequence a_n . We feel that the approach $a_n \rightarrow a$ should be observable.

Courant and Robbins (1996: 292)

つまり、横軸の自然数の列に沿って移動すると、それにつれて関数の値 $\frac{1}{n}$ が 0 に近づいて行く様子が見て取れる。この運動は 1.5 節の(26)の運動とそれに伴う変化の例に似ている。

(34) 道路を進んでいくと、電信柱が段々と高くなっていく。 = (26)

したがって、(26)の例と同じように、接続助詞「と」を用いて図-4に見られる運動を分節的に記述できる。

(35) 1 に行くとき、1 がある。

2 に行くとき、 $\frac{1}{2}$ がある。

3 に行くとき、 $\frac{1}{3}$ がある。

⋮

n に行くとき、 $\frac{1}{n}$ がある。

⋮

しかし、この記述には関数の値が減少しているという事実が反映されていない。そのためには値同士を比較する記述を入れなければならないが、そうするより、次のように縦軸に沿って値をたどっていく運動を考えた方が減少変化を捉えられやすい。

(36) $0 \cdots \leftarrow \frac{1}{n} \cdots \leftarrow \frac{1}{6} \leftarrow \frac{1}{5} \leftarrow \frac{1}{4} \leftarrow \frac{1}{3} \leftarrow \frac{1}{2} \leftarrow 1$

このように値に注目する場合には、一般項の形で見ると、より次のような漸化式 (recurrence relation) として、つまり、実数から実数への関数と見た方が都合が良い¹⁰⁾。

(37) $a_1 = 1$

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n + 1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{a_n}}$$

そうすると、1.6 節で見た運動の分節的記述が適用できる。まず、ある対象、亀、が(36)のように値の列に沿って移動しているとすると、その亀の運動を記述するために、知覚主体兼運動主体のアキレスが後を追っている。アキレスには、亀が 1 地点、 $\frac{1}{2}$ 地点、

$\frac{1}{3}$ 地点、 $\frac{1}{4}$ 地点、と次々に通過していくのが見える。

「と」を用いて、この変化している亀のいる地点を示し、その変化を知覚している運動主体を明示した分節的記述は次のようになる。

(38) まず、亀が 1 地点にいる。

アキレスが 1 地点に行くとき、亀は $\frac{1}{2}$ 地点にいる。

アキレスが $\frac{1}{2}$ 地点に行くとき、亀は $\frac{1}{3}$ 地点にいる。

アキレスが $\frac{1}{3}$ 地点に行くとき、亀は $\frac{1}{4}$ 地点にいる。

⋮

アキレスが $\frac{1}{n}$ 地点に行くとき、亀は $\frac{1}{n+1}$ 地点にいる。

⋮

この(37)の漸化式は、 a_n と a_{n+1} の差は減少していき、同時に、0 に収束していく¹¹⁾。これは、亀が徐々に 0 に近づいていくと同時に、アキレスと亀との距離は段々と縮まっていくということなので、アキレスは亀を「追い詰める」ことができる。

ちなみに、これが次のような漸化式の場合には事情は違ってくる。

(39) $a_1 = 1$

$$a_{n+1} = a_n + 2$$

この数列の場合、 a_n と a_{n+1} の差は一定で収束もしない。つまり、アキレスと亀との距離は常に同じで、アキレスは亀に追いつけないし、もちろん、亀を追い詰めることもできない。さらに、次の漸化式の場合は、 a_n と a_{n+1} の差は増加していく。

(40) $a_1 = 1$

$$a_{n+1} = 2a_n$$

したがって、アキレスと亀との距離は広がって亀に逃げられてしまい、追いつくことも追い詰めることもできない¹²⁾。

2.3 ε - δ 論法との関係

Courant & Robbins は、(33)の引用に続けて次のように述べている。

(41) But this “natural” attitude is not capable of clear mathematical formulation. To arrive at a precise definition we must reverse the order of steps; instead of first looking at the independent variable n and then

at the dependent variable a_n , we must base our definition on what we have to do if we wish actually to check the statement $a_n \rightarrow a$. In such a procedure we must first choose an arbitrarily small margin around a and then determine whether we can meet this condition by taking the independent variable n sufficiently large. Then, by giving symbolic names, ε and N , to the phrase “arbitrarily small margin” and “sufficiently large n ,” we are led to the precise definition of limit. Courant and Robbins (1996: 292)

つまり、自然数 n の上を移動して、それに対応する値 a_n の変化を見るやり方では、(収束の) 厳密な定義はできないと言う。それで、それを逆にして、まず適当な値 ε をとり、それに対応する自然数で (収束) 条件を満たす数 N を探せば厳密な定義ができるというのである。そういう厳密な定義は、いわゆる ε - δ 論法と呼ばれるもので、論理式で表すと次のようになる。

(42) $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n [n \geq N \rightarrow |a_n - a| < \varepsilon]$
 前節でも、自然数 n の上を移動する方式の記述は、対応する値 a_n の変化をうまく捉えられないので、それに代わる漸化式をもとにした(38)のような記述方式を考えた。それで、その漸化式をもとにした記述が、 ε - δ 論法とうまく結びつくのであるかどうかを次に検討してみる。

ε - δ 論法は、次のような複雑な動きをする関数にも対応している。

$$(43) f(x) = x \sin \frac{1}{x} \quad \text{for } x \neq 0 \\ = 0 \quad \text{for } x = 0$$

そのため、任意の ε によって決まる集合 U_ε と自然数 N によって決まる集合 U_N の2つについて、どんな集合 U_ε に対してもそれより小さい集合 U_N が存在する ($U_N \subset U_\varepsilon$) という内容になっている。しかし、ここでは、運動表現という観点から単調減少、あるいは、単調増加の単純な数列を特に考えているので、集合同士ではなく、 ε と (N によって決まる) a_N の2つの実数を比較するだけで良い。したがって、(42)の論理式は次のように単純化して考えることができる。

(44) $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} [|a_N - a| < \varepsilon]$
 ここで、 ε の値を任意の項 a_n と極限值 a との差 $|a_n - a|$ に限定すると(44)から次の式が導かれる。

(45) $\forall n \in \mathbb{N} \exists N \in \mathbb{N} [|a_N - a| < |a_n - a|]$
 さらに、数列 $\{a_n\}$ が単調減少だとすると、次が導かれる。
 (46) $\forall n \in \mathbb{N} \exists N \in \mathbb{N} [a_N < a_n]$

そして、この式に使われている2つの項の間の大小関係<に基づく順序に従ってすべての項を並べると次のような列が得られる。

(47) $a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > a_5 > a_6 > a_7 \cdots a_n > a_{n+1} > \cdots$
 一方、前節で見た漸化式は、任意の項 a_n に次の項 a_{n+1} を対応させる関数であった。その対応関係を $a_n \rightarrow a_{n+1}$ と表し、項の順序に従ってすべての対応関係を並べると次のような列が得られる。

(48) $a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow a_3 \rightarrow a_4 \rightarrow a_5 \rightarrow a_6 \rightarrow a_7 \rightarrow \cdots a_n \rightarrow a_{n+1} \rightarrow \cdots$
 そこで、(47)における関係>と(48)における関係 \rightarrow との違いは何かというと、まず、前者は推移的 (transitive) な関係であるのに対し、後者はそうではない。例えば、 a_1 と a_4 との間にも前者の関係は成立するが ($a_1 > a_4$)、後者の関係は成立しない ($\neg a_1 \rightarrow a_4$)。前節で見たように、同じく推移的でない「と」による継起関係は(48)のような列にうまく乗せることができた。(47)の列は、同じく推移的である「まえ (前)」とか「あと (後)」による関係が適している¹³⁾。視点という観点から見ると、(48)は直前の対象だけを見ながら列をたどっていくのに対し、(47)は他者の視点から列全体を見渡しているといえる。また、「と」による関係は直接知覚している状況間の関係であるが、「前」とか「後」の場合は、直接知覚されたものから「頭の中で」構成された出来事とか事象の間関係である、という違いがある。結果として、(48)のような関係列として捉え場合は、動的な感じがするのに対し、(47)のような関係列として捉えられると、静的な感じになる¹⁴⁾。

しかし、重要なのは、「と」による運動記述と ε - δ 論法には重要な共通点があるということである。それは、「と」の場合は、運動する対象とそれを追いかけて観察する人の2つ (ないしは、その2つの位置) を対応させ、 ε - δ 論法に場合は、 δ と ε との2つの量を対応させているという点である。 ε - δ 論法が「変化」を「論理的形式」に乗せる」方式であるとすれば、 δ は運動する対象に由来し、 ε はそれを追いかけて観察する人に由来するといえるのではなからうか¹⁵⁾。

3. まとめ

1章では、まず、運動主体が自己の運動を記述する場合、自己の視点から見た状況の変化を記述すること

により自己の運動を示唆する方式と、他者の視点から自己の運動を記述する方式の2つがあることを見た。対象の位置の変化である移動運動の場合、他者の視点からの記述は、運動をその軌跡としてみる見方につながっていく。運動主体の視点から対象の移動を見る場合は、移動対象の「後を追いかける」ことにより、移動を知覚し記述することになる。

運動主体の運動を従属節で記述し、主節では、その運動主体の視点から見た助動詞の変化を記述する構文が、英語、日本語ともにあるが、特に日本語では接続助詞「と」を用いて、運動主体の運動とその視点から見た変化の関係を明確に記述することができる。そして、この「と」を用いると、連続した運動を分節化して記述することができる。

2章では、まず、数列の極限值への接近は、自然数から実数への関数としてみるよりも、実数から実数への関数、いわゆる漸化式、としてみる見の方が、「近づく」という運動を捉えやすく、日常言語の「と」による記述ともなじみやすいことを見た。そして、そうした漸化式による理解と ϵ - δ 論法との違いと類似点を考察した。主たる違いは、 ϵ - δ 論法では、大小関係という推移的な関係が用いられているが、漸化式は推移的な関係ではないという点である。結果として、同じく推移的でない「と」となじみやすい漸化式による数列の理解の方が動的な捉え方になり、 ϵ - δ 論法の方は静的な捉え方になる。類似点は、いずれも2つの「もの」が対応されているということである。 ϵ - δ 論法では、 ϵ と δ という2つの量が、「と」による漸化式の捉え方では、移動対象とそれを追いかける運動主体の2つが、ともに対応されている。このことから、 δ は移動対象、 ϵ はその対象を追いかける運動対象に由来すると推察される。

I think that the language of mathematics is continuous with ordinary language, since discourse about mathematical objects and mathematical activity takes place in English or some other natural language.

Jon Barwise (1989) *The Situation in Logic*

付録：接続助詞「と」の意味と機能

本論の議論で接続助詞「と」の用法は非常に重要であるので、この「と」を用いた構文「AとB」のA、

Bが一般的ではなく特定の事態（出来事、状態等）を表す場合の特徴をまとめておく。

(i) 構文「AとB」において、事態A、Bは空間的に連続していなければならない。

例えば、次の(1a)は適切であるが、「と」の前と後の事態が別々の場所で生じている(1b)は不自然である(久野 1973: 177)。

- (1)a. 太郎が学校に着くと、花子が学校に訪ねて来た。
 b. *太郎が学校に着くと、花子が家に訪ねて来た。
 「とき」とか「あと」の場合はこのような制限はなく、次のような例は多少状況設定しにくいものの(1b)のような不自然さはない。
 (2) 太郎が学校に着いたとき/あと、花子が家に訪ねて来た。

(ii) 「と」の表す関係は推移的 (transitive) ではない。つまり、「AとB」および「BとC」の関係が成立しても「AとC」の関係は成立しない。

これは(i)と関連していると思われる。例えば、まず、次の(3a)と(3b)の2つが成立しているとする。

- (3)a. 亀井町の町通りに入ると、途中から狭い路地に曲がった。
 b. 狭い路地に曲がると、奥に木戸をかまえた裏店があった。

このとき、次の関係は成り立たっていない。

- (4) 亀井町の町通りに入ると、奥に木戸をかまえた裏店があった。

この(4)では、町通りの場面と裏店の場面が直接つながってしまい、狭い路地の場面が除外されてしまうのである。

(iii) 構文「AとB」で、Aが何らかの行為を表すとき、Bは基本的にその行為の主体が知覚した事態を表す¹⁶⁾。

例えば、次の例では、角を曲がった人物と裏にまわった人物が、それぞれBの表す事態を知覚している。

- (5)a. 角を曲がると、ジャンパーを着た男が立っていた。
 b. 家の裏にまわると、勝手口があった。

このことは、「と」を「とき」に代えると、本論でも述べたように、(5b)では不自然になるという事実によって示される。

- (6)a. 角を曲がったとき、ジャンパーを着た男が立っていた。

b. ?家の裏にまわったとき、勝手口があった。

これは、いつも勝手口があったわけではない、つまり、勝手口のないときがあったという誘導推論 (invited inference) が働くからである。次のように、知覚体験を表す表現にすると自然になる。

(7) 家の裏にまわったとき、勝手口があるのが見えた。「と」の場合には、もともと知覚体験が表されているので、恒常的な状態であっても問題はない。

注

* 4年前から $e-\delta$ 論法と日常言語の運動表現との関係について考えてきた。まだつめなければならない点はいくつかあるものの、一応納得のいく結論に達した。これまでに公にした2論文 (中島 2018, 中島 2020) には、思い違いとか理解不足の点が多々あるので、繰り返し部分も多いが新たな見地に立ってもう一度全体をまとめておく。

- 1) 本多 (2005) は、(1)と(2)の表現の違いについて生態学心理学の立場から論じている。
- 2) こうした2つの視点については Langacker (1990)が詳しい。
- 3) 最後の文「北五条通りに……」の主語は「佐伯たちの車」と解釈することも出来るが、ここでは前文と同じ「道路は」とする解釈を考えている。
- 4) 前節の(13)の例でも同じことが言え、a houseや「家々」は同種の複数の対象を表している。Sweetser (1997) は、このような解釈を 'role-reading' と呼んでいる。これは、名詞句が特定の対象に言及するのではなく、ある種の役割 (role) を表し、その役割を持った複数の対象が言及されているからである。
- 5) 参考までに、小説でしばしば見られる視点の移動の例を次にあげておく。

男が川久保から視線をそらし、待合室の外に目を向けた。川久保も同じ方向に目をやった。一台のワゴン車が駐車場に入ってきたところだった。ワゴン車は警察車のうしろに停まった。

運転席から、作業着姿の中年男が降りてきた。この町で工務店を営む男だ。玉木徹三という名だったろう。町の公式行事で、二、三度顔を合わせたことがある。ひとあたりがよすぎるとさえ思える。如才ない印象の男だ。工務店の経営者にはめずらしいタイプだろう。

(佐々木譲『制服捜査』)

最初は、作者の視点からの状況記述で始まるが、「運転席から……」の部分からは主人公の川久保の視点に移行し、彼の視点から見た状況の記述、彼の内語、と続いている。

6) 英語でも次の例のように知覚状況であることが明示されないときがある。

i. From the top of the bank, the thousands upon thousand of flickering lanterns floating downstream were turning the surface of the river red.

(Two Little Girls Called Ida tr. by P. Bush)

オリジナルの日本語は次のようになっている。

ii. 土手の上から川面を見ると, いく百ともしれぬとろろは、真っ赤に川面をうずめ、光をうつしてまたたきながら、しずかによりそい流れていく。

(松谷みよこ「ふたりのイーダ」)

また、英語の when の用法には、日本語の接続詞「とき」の用法に加えて接続助詞「と」の用法も含まれている。例えば、次のような when を用いた英文は日本語では「と」を用いた表現が対応する。

iii. I was reading a book when suddenly someone knocked the door.

(本を読んでいると、突然……)

iv. The cars get three feet longer when you enter Pacific Heights. (Sweetser 1997)

(Pacific Heights に入ると、……)

Declerch (1997) に、このような when についての詳しい考察が見られる。

接続助詞「と」の特徴については、「付録」で少し詳しく説明した。

- 7) すれ違った通行人を運動主体兼発話者として書き直してある。また、「と」が連続すると不自然になるので、もとの例にある「と」は一部省いてある。もとの例では、幸右衛門を追いかける人は実際にはいないが、そういう人を想定して、その人の目で見たと記述になっている。この点、(13)の例に似ている。
- 8) 逆に、色の変化、高さの変化なども「眼でたどる」ことによって変化を認知している。
- 9) 歴史的に見て、関数の概念は運動の研究を通して生まれてきたということがある (Kline 1972, 335-340)。
- 10) 正確には自然数と実数の対に実数を対応させる関数である。
- 11) 解析学における常識的なことであるが、 a_n と a_{n+1} の差が減少していくということは、この数列がコーシー列 (Cauchy sequence) ということであり、これは収束するという事と同値である。
- 12) アキレスは亀の運動を観察しているだけで競争をしているわけではないので、追い越すような場合を考える必要はない。
- 13) 自然数の集合 N から N への関数 (単射) を ϕ とすると ($-1 \in \phi(N)$)、一般に、大小関係 $<$ は ϕ を用いてまず加法 $+$ を定義し、
 - $n+1 = \phi(n)$
 - $n+\phi(m) = \phi(n+m)$
 この加法を用いて次のように定義される (彌永 (1972) などを参照)。

$$m < n \Leftrightarrow \exists l [n = m + l]$$
 一方、Dedekind (1872) は、個々の数 n に対し関数 ϕ を使って特定の集合 n_0 を規定し、そうした集合間の包含関係を用いて大小関係を定義した。例えば、数 n , m に対して規定される n_0 , m_0 集合の間に

$$n_0 \subseteq \phi(m_0)$$
 という包含関係が成立しているとき、

$m < n$

となる。足立 (2013) には、Dedekind (1872) の解説がある。表記方法はその解説を参考にした。

このような関数 ϕ から大小関係を導く過程は、接続助詞「と」による事象間の関係から、「とき」、「まえ」、「あと」のような推移的關係への認知的推移と何らかの形で関係しているのかも知れない。

- 14) 「と」による知覚体験の継起関係と推移的な「まえ」、「あと」による事象の前後関係との違いについては、中島 (2002) の2章で少し詳しく論じた。なお、知覚体験の継起については植村 (2002) の第三章、第四章が参考になる。植村は知覚体験の継起を「体験の流れ」と呼んでいる。
- 15) Núñez and Lakoff (1998) や Lakoff and Núñez (2000) では、認知科学、ないし、認知意味論の立場から ϵ - δ 論法について詳しく論じられている。しかし、運動主体の視点と他者の視点からの運動記述の違いや、なぜ ϵ と δ の2つの量を対応させるかといった点については触れられていない。
- 16) 次の例のように、A の事態の行為者が B の事態を知覚していると必ずしも言えない場合もあるので、(iii) にはもう少し条件を付けて限定する必要がある。
- i. 顔を洗うと、着替えをした。
 - ii. 太郎が来ると、花子が帰った。

参考文献

- 足立恒雄 (2013) 『フレーゲ・デデキント・ピアノを読む』日本評論社
- Courant, R. H. Robbins (revised by I. Stewart) (1996) *What is Mathematics?: An Elementary Approach to Ideas and Methods*, Oxford: Oxford University Press.
- Declerch, Renaat (1997) *When-Clauses and Temporal Structure*, London: Routledge.
- Dedekind, R. (1872/1887) *Was sind und was sollen die Zahlen?/Stetigkeit und Irrationale Zahlen*, Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH. (渕野昌訳 (2013) リヒヤルト・デデキント『数とは何かそして何であるべきか』ちくま学芸文庫
- 本多啓 (2005) 『アフォーダンスの認知意味論-生態心理学から見た文法現象』東京大学出版会
- Kline, Morris (1972) *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford: Oxford University Press.
- 久野暉 (1973) 『日本文法研究』大修館
- Lakoff, G. and R. E. N Núñez (2000) *Where Mathematics Comes From: How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*, New York: Basic Books.
- Langacker, R. W. (1990) "Subjectification," *Cognitive Linguistics* 1-1, 5-38.
- 松本曜 (1997) 「空間移動の言語表現とその拡張」田中茂範・松本曜 (1997) 『空間と移動の表現』研究社出版, 第II部, pp. 125-230.
- 中島信夫 (2001) 「具象概念から抽象概念のメタファー的構成-時間概念の場合-」『私学研修』第157・158号, pp. 105-118.
- 中島信夫 (2002) 「節間の時間関係と時間概念について」『日本語・英語・中国語における節構造の比較研究』甲南大学総合研究所 叢書67, pp. 37-98.
- 中島信夫 (2018) 「 ϵ - δ 論法における運動の概念について-認知意味論的考察-」『甲南大学紀要: 文学編』No 168, pp. 71-79.
- 中島信夫 (2020) 「日常言語と数学の言語における運動表現の比較-収束する数列を中心に-」『甲南大学紀要: 文学編』No 170, pp. 47-58.
- Núñez, R. E. and G. Lakoff (1998) "What did Weierstrass Really Define?: The Cognitive Structure of Natural and ϵ - δ Continuity," *Mathematical Cognition*, 4(2), 85-101.
- Sweetser, Eve (1997) "Role and Individual Interpretations of Change Predicated," In J. Nuyts and E. Pederson (1997) *Language and Conceptualization*, Cambridge: Cambridge University Press, pp. 116-136.
- Talmy, L. (1988) "Grammatical construal," In Brygida Rudzka-Ostyn, ed. *Topics in Cognitive Linguistics*, pp. 165-205. John Benjamins, Amsterdam.
- 植村恒一郎 (2002) 『時間の本姓』東京: 勁草書房
- 彌永昌吉 (1972) 『数の体系 (上)』岩波新書