日常言語と数学の言語における運動表現の比較

――収束する数列を中心に――

中　島　信　夫

I think that the language of mathematics is continuous with ordinary language, since discourse about mathematical objects and mathematical activity takes place in English or some other natural language.

Jon Barwise (1989) *The Situation in Logic*

0. はじめに

数学では，数列の説明などに日常言語の運動表現がよく用いられる。本稿では，数学の言語と日常言語は連続しているという Barwise の考えに従って，そうした日常表現が厳密な言い方とされる ε-δ 論法とどう繋がっているのか考察する。

1．数列の極限の説明に用いられる表現

数学では数列とか関数の説明にしばしば日常の言葉が用いられる。例えば，次のような数列の説明では「小さくなる (become smaller)」とか「大きくなる (become larger)」といった変化を表す言葉が用いられる。

(1) a．$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$

b．$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \frac{5}{6}, \cdots, \frac{n}{n+1}, \cdots$

(1a)では，n を大きくしていくと，$\frac{1}{n}$ はどんどん小さくなり，逆に $\frac{n}{n+1}$ では，どんどん大きくなる，といった具合である。

また，数列がある数，極限値 (limit)，に収束するという説明では，n を限りなく大きくしていくと，$\frac{1}{n}$ は限りなく 0 に，$\frac{n}{n+1}$ は限りなく 1 に近づいて行く，といったように「限りなく近づく (indefinitely approach)」という運動を表す言葉が用いられる[1)]。

これに対し，いわゆる ε-δ 論法では，数列 $\{a_n\}$ が極限値 L に収束するということを次のような論理式で表現する（数列の場合は実数 δ ではなく自然数 m を用いるので，以下では ε-m 論法という言い方をすることもある）。

(2)　$\forall\varepsilon>0\ \exists m\in\mathbf{N}[\forall n\in\mathbf{N}\ \ n\geqq m\rightarrow|a_n-L|<\varepsilon]$

この式を(1)の数列に当てはめると次のようになる。

(3) a．$\forall\varepsilon>0\ \exists m\in\mathbf{N}\ \forall n\in\mathbf{N}\left[n\geqq m\rightarrow\left|\frac{1}{n}-0\right|<\varepsilon\right]$

b．$\forall\varepsilon>0\ \exists m\in\mathbf{N}\ \forall n\in\mathbf{N}\left[n\geqq m\rightarrow\left|\frac{n}{n+1}-1\right|<\varepsilon\right]$

(2)の論理式は，「どんな実数 ε に対しても，ある自然数 m 以上の自然数 n について，項 a_n と極限値 L との差をその ε より小さくできる」と言っている。例えば，(3a)では，どんな（小さな）ε に対してもある自然数 m 以上の自然数 n について，$\frac{1}{n}$ をその ε より小さくできる，と言っている。このような二つの量を対応させる ε-m 論法の表現は，変化とか運動という表現は用いておらず，意図されていることは同じでも非常に異なって見える。

以下では，日常言語による直観的で動的な収束数列の解釈がどういう過程を経て ε-m 論法のような静的な解釈になるか，また，ε と δ という二つの量を対応させる論法は何に由来するか，といったことを，日常言語の分析を通して考察していく。その際，次のような日本語の接続助詞「と」の用法が重要な役割を果たす。

(4)　路地に駆けこむと，そこは表通りのにぎわいがうそのように，暗くてしずかだった。

（藤沢周平「蝉しぐれ」）

それは，「と」の用法が直観的で動的な解釈と ε-δ 論法の橋渡しをしていると思われるからである。

2．日常言語の運動表現

2.1　記述の２つの視点

話し手とバネッサがテーブルを真ん中にして座って

いる場合，二つの表現の仕方がある[2]。

(5) a．Vanessa is sitting across the table from me.
（バネッサはテーブルを挟んで私の向かい側に座っている）

b．Vanessa is sitting across the table.
（バネッサはテーブルの向かい側に座っている）

日本語の方では分かりにくいが，話し手の明示されている(5a)は，カメラを棒の先に付けるなどして，その視点を自分自身の視点と別のところに設定して，自身が被写体として写っている写真に対応する。これに対し，話し手が明示されていない(5b)は，カメラの視点と自分自身の視点を一致させて撮り，自身は写っていない写真に対応する。

運動表現の場合も，似たような違いが見られる。今，新幹線で京都に向かっているとしたとき，移動している自身の記述として次の(6)，(7)が考えられる[3]。

(6) a．This train is approaching Kyoto.

b．We are approaching Kyoto.

(7)　Kyoto is approaching.

この内，(6)は(5a)に対応し，移動している自分自身が記述の中に入っている。これは，自身の移動を，次の例の記述における鳥とか子供の移動と同じように見ていると言える。

(8) a．鳥が山から山へ飛んでいった。

b．子供が雪の中を走り回っている。

これに対し，(7)は(5b)に対応し，移動している自身は記述の中に入っていない。こうした表現方法は，運動の相対性を利用したもので，乗り物に乗って移動するときの描写にしばしば見られる。次はそうした例である。

(9)　駅舎の前に並ぶ手動の転轍機。犬釘を打った枕木。錆びたレールの貨物ヤード。昔から少しも変わらぬ幌舞の風景が，少しずつ動き出した。
（浅田次郎「鉄道員」）

英語でも同じような表現が可能で，次はタクシーに乗っている場面である。

(10)　‘That’s Seven Mile Beach,’ Avery said. ‘One of the most beautiful and most famous in the world. Sand as white as sugar. Warm, clear water. Warm, beautiful women.’
Mitch smiled and watched the hotels pass.
（J. Grisham *The Firm*）

次は飛行機の中からの描写で，かなり多彩な運動が記述されている。

(11)　ボーイング７６７は，その島を右手に見ながら，さらに高度を下げていった。やがて島は，飛行機の前方に隠れた。機は真正面の位置に島を置いたようだ。最終の着陸の態勢に入ったのだろう。
海面がどんどんと近づいた。海の上に着陸でもするのか，と思っているうちに，」窓の外に緑が見え，建物が走り，道路や車の列が見えた。飛行機は滑走路に機体を落として，鈍い衝撃音をあげた。
（佐々木譲「ネプチューンの迷宮」）

(6)，(7)，(8)の例では話し手が記述の中に含まれているかどうかという観点から見たが，(9)，(10)，(11)などの例も含めて考えると，移動する主体が含まれているかどうかという点から見た方が上で見た表現の区別を捉えやすく一般性がある。以下では，移動ないし（より一般的に）運動する主体が記述の中に含まれている場合を，「他者の視点」からの記述と呼び，含まれていない場合を，「移動（ないし運動）主体の視点」からの記述と呼ぶことにする。

2.2　状況変化の表現を用いた運動記述

乗り物に乗っている場合，移動する主体は乗り物の中だけで見ると静止しているとも言えるが，次の例では，実際に自ら移動している主体からの見えの変化の記述が，運動記述の代わりをしている。

(12)　直樹は思いきって，うすぐらい林のおくへはいっていった。
と，ふいに，ぽっかりと林はおわり，直樹はあれはてた門の前に出た。
（松谷みよ子「ふたりのイーダ」）

つまり，「林はおわり」という表現でもって「(直樹は)林を抜け出る」という移動を表している。次も同様の例で，道路および周囲の状況変化を記述することで間接的に車での移動を表している。

(13) a．We were going along the drive now that led up to the house. The drive turned and twisted like a snake.　*Rebecca* by Daphne Du Maurier
<https://www.youtube.com/watch?v=52hi3E4us70>

b．On and on we went. Then suddenly the trees came to an end.　*ibid.*

c．We are not far from the house now. The drive widened. We turned the last corner and there was Manderley.　*ibid.*

次も移動する主体は明示せずに見えの変化によって移動を記述している。

(14)　After a while she noticed that small gardens started to appear, and the rough-looking houses began to turn into small cottages.

The Old Curiosity Shop by Charles Dickens

https://www.youtube.com/watch?v=GNSGdON738Q

さらに次の例では，見えの変化だけが記述されており，移動主体は特定できず単に想定されているだけである。

⒂ There is a house every now and then through the valley. (Talmy 1988)

⒃ On the southern outskirts of the city, where the fields began and the houses became shabbier and more tumbledown, the ruins of a small amphitheatre lay hidden in a clump of pine trees.

(M. Ende *Momo* tr. by J. M. Brownjohn)

例えば，⒂の例は，次のような「知覚者の運動」を想定することによって理解される（本多 2005：27）。

⒄ John ran through the valley.

こうした表現は，⒃の日本語訳が示すように，日本語でも可能である。

⒅ 大きな都会の南のはずれ，市街地がつきて原っぱや畑がはじまり，家々のたたずまいもだんだんわびしくなってくるあたりに，松林にかくれるようにして小さな円形劇場の廃墟がありました。

（大島かおり訳）

以上の例は，運動を直接記述するのではなく，運動主体から見た知覚変化を記述することによって，その運動を間接的に記述ないし暗示するものであるが，次のように，運動とそれに伴う運動主体の知覚変化を明示的に併記することができる[4]。

⒆ a．The wells get deeper as you go down the road.
b．The fence gets higher as you go towards the back of the yard.
c．The windows get dirtier/sootier/darker as you go towards the Bay.
d．The buildings get older as you walk towards downtown.

こうした表現では，as に導かれる従属節は他者の視点からの運動を記述し，主節は，その運動の主体から見た知覚状況の変化を表している。こうした例を見ると，変化の記述によって運動を表現するというのではなく，運動によって変化を捉えるという逆の見方もできる。

日本語でも同様の表現が可能である。

⒇ a．道路を進んで行くにつれて，井戸（油井）は段々深くなる。
b．囲い地の奥に行くにつれて，柵は段々高くなる。

日本語の場合，「……するにつれて」という表現の代わりに接続助詞「と」を用いることができる。

(21) a．道路を進んで行くと，（それにつれて）井戸は段々深くなる。
b．囲い地の奥に向かって行くと，（それについて）柵は段々高くなる。

「と」を用いた例では，「それにつれて」という表現がなくとも，そうした意味が含意されている。こうした例から，「と」には，他者の視点からの運動記述と運動主体の知覚体験とを繋ぐ用法のあることが分かる。「と」にはこうした用法に加え，他にも興味深い特徴があるので，次節で「と」の用法について少し詳しく見てみる。

2.3 日本語の「と」による認知体験の継起の記述

接続助詞「と」には条件文的な用法もあるが，ここでは，次のような特定の事態間の関係を表す場合について見てみる[5]。

(22) a．角を曲がると，ジャンバーを着た男が立っていた。
b．家の裏にまわると，勝手口があった。
c．長嶺は壁の町内地図に近寄ると，先日と昨夜の，ふたつの火災現場の位置を指で示して言った。

（佐々木譲「制服警官」）

このような「と」で結ばれた事態間の関係でまず興味深い点は，二つの事態が同じ場所で生じたものでなければならないことである。従って，次の(23a)は適切であるが，「と」の前と後の事態が別々の場所で生じている(23b)は不自然である（久野 1973：177）。

(23) a．太郎が学校に着くと，花子が学校に訪ねて来た。
b．＊太郎が学校に着くと，花子が家に訪ねて来た。

「とき」とか「あと」の場合はこのような制限はなく，次のような例は多少状況設定しにくいものの(23b)のような不自然さはない。

(24) 太郎が学校に着いたとき/あと，花子が家に訪ねて来た。

このことと関連しているが，「と」は「とき」とか「あと」のような推移的な関係ではない。例えば「あと」の場合，次の(25a)と(25b)が成り立てば(24c)も成り立つ。

(25) a．顔を洗ったあと着替えをした。
b．着替えをしたあと朝ご飯を食べた。
c．顔を洗ったあと朝ご飯を食べた。

しかし，「と」の表す関係はこのような推移的関係では無く，(26a)と(26b)が言えているときに (26c)だけ

を言うと，途中がぬけてしまったような感じがする。

(26) a．顔を洗うと着替えをした。
　b．着替えをすると朝ご飯を食べた。
　c．顔を洗うと朝ご飯を食べた。

このことを，さらに，場所の移動を表す別の例で確認してみる。まず，次の例から(28a)と(28b)の二つの「と」による関係を取り出すことができる。

(27)　幸右衛門は顔を伏せて，通行人とすれ違い，今度は左に折れて亀井町の町通りに入ると，途中から狭い路地に曲がった。奥に木戸をかまえた裏店があった。幸右衛門はためらいのない足どりで木戸をくぐると，裏店の中程にある一件の家の前で足をとめ，戸をあけるとするりと土間に入りこんだ。
(藤沢周平「ささやく河」)

(28) a．亀井町の町通りに入ると，途中から狭い路地に曲がった。
　b．狭い路地に曲がると，奥に木戸をかまえた裏店があった。

しかし，この二つの関係が成り立っても次の関係は成り立っておらず，事実に反する。

(29)　亀井町の町通りに入ると，奥に木戸をかまえた裏店があった。

「と」が繋ぐ二つの事態は空間的に連続していなければならないが，(29)では連続性が途切れてしまうのである。

前節の(21)の例で，「S_1とS_2」という構文のS_1がある行為者の運動を表すとき，S_2はその運動主体の視点から見た状況を表すことを見たが，そのことを裏付ける事実がある。例えば，「と」を用いた(30)のような例は(31)のように「とき」とか「あと」で置き換えても自然な文である。

(30) a．彼女は後ろにいる私を見ると笑った。
　b．冷蔵庫を開けると，オレンジジュースがあった。

(31) a．彼女は後ろにいる私を見たとき/あと笑った。
　b．冷蔵庫を開けたとき，オレンジジュースがあった。

ところが次の(32a)を(32b)のように「とき/あと」で置き換えると非常に奇異な感じがする。

(32) a．狭い路地に曲がると，奥に木戸をかまえた裏店があった。
　b．？狭い路地を曲がったとき/あと，奥に木戸をかまえた裏店があった。

これは，いわゆる誘導推論（invited inference）が働き，「いつも裏店があるわけでは無い，裏店のないときがあった」という尺度含意（scalar implicature）が生じ，恒常的な存在である裏店があったりなかったりするように感じられるからである。これに対し，「S_1とS_2」という構文のS_2は運動主体の知覚体験を表すので，(32a)の主節は実質「裏店があるのが見えた」という意味になり，尺度含意が生じて「いつも裏店が見えたわけではない」と解釈されても不自然にはならない[6]。(32b)の文でも，「見えた」を付け加えると自然な表現になる。

(33)　狭い路地を曲がったとき，奥に木戸をかまえた裏店があるのが見えた。

以上のような特性を利用すると，接続助詞「と」を用いて運動主体の体験を順を追って記述していくことができる。実際，(27)は，運動主体である 幸右衛門の体験を記述している例であるが，その体験はさらに細かく分けて記述することができる。

(34)　幸四郎は，顔を伏せると，前へ進む。前へ進むと，通行人がやって来る。通行人とすれ違うと，左に折れる。左に折れると，町通りに入る。町通りに入ると，前へ進む。途中まで進むと，狭い路地に曲がる。路地に曲がると，裏店がある。裏店を見ると，木戸をくぐる……

こうした(34)によって記述される運動主体の体験を繋いで行くと，運動体験と知覚体験とからなる一つの列ができ，その列は体験ごとに伸張していく。それを図示すると次のようになる[7]。

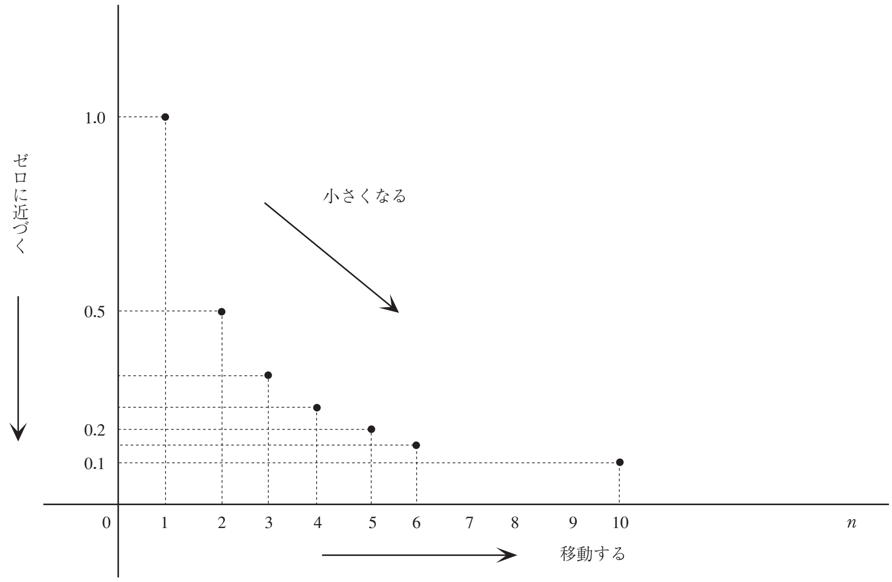
(35)　(●は，観察者の新たな体験で，○はすでに体験されたものを表す)

ｉ)　●・・・
ii)　○→●・・・
iii)　○→○→●・・・
iv)　○→○→○→●・・・
ｖ)　○→○→○→○→●・・・
vi)　○→○→○→○→○→●・・・
vii)　○→○→○→○→○→○→●・・・　⟶

図－１

このように繋がれた体験の継起は，運動主体の連続した運動そのものであるので，(34)の「と」による記述は運動主体である幸四郎の運動記述と見ることができる。また，(34)のような体験の記述には「動き」の記述と「見え」の記述があるが，この二つを分けて記述したものが，前節の(21)のような「と」による表現であると言える[8]。

この節では，「と」を用いた表現を繋いでいくと，運動の連続した記述になることを見たが，これは，逆に見ると，運動の連続した記述は「と」を用いて分節



図－2

的な記述に書き換えることができるということでもある。次節では，このことを利用して，数列の記述に用いられる表現の「書き換え」を考えてみる。

3．収束する数列の記述

接続助詞「と」の分析を踏まえて，次の数列についての運動表現を検討してみる。

(36)　$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$

数列の説明には，１節で見たように，「小さくなる」と「近づく」の二つの日常表現が用いられるが，自然数から実数への関数として捉えられるので，次のように自然数に沿った運動と対応させることが多い。

(37)　自然数の列 1, 2, 3, …, n, … をたどって行くと，数列の項 $\frac{1}{n}$ は段々と小さくなっていく。

(38)　自然数の列 1, 2, 3, …, n, … をたどって行くと，数列の項 $\frac{1}{n}$ は段々と 0 に近づく。

これらの比喩表現で，自然数は移動経路上の位置として概念化されている。つまり，直線上の場所に喩えられている。また，(37)では，数列は大きさが視覚で確認できるようなものに，(38)では，終着点からの距離，あるいはその場所に喩えられている。特に，「小さくなる」と「近づく」の違いは，この数列の n と $\frac{1}{n}$ の関係を点 $\left(n, \frac{1}{n}\right)$ として図－2のように図示すると分かりやすい。

この図では，「小さくなる」は，自然数の列をたどって行く運動に対応する項の「高さ」の変化として見ることができる。一方，「近づく」は縦軸に沿った方向の０までの「距離」の変化と見ることができる。

前節で見たように，(37), (38)の「と」を用いた表現は，同じく「と」を用いた分節的な表現に言い換えることができる。まず，(37)を見てみると，「１から２へ行くと，$\frac{1}{2}$ があり，２から３へ行くと，$\frac{1}{3}$ があり……」のように，「と」を用いた分節的表現の併記として表すことができる。

(39)　$n=1$ の位置から始まる。このとき $\frac{1}{n}$ は $\frac{1}{1}=1$：

（１から）２に行くと，$\frac{1}{2}$ がある。

３に行くと，$\frac{1}{3}$ がある。

４に行くと，$\frac{1}{4}$ がある。

⋮

⋮

（n から）$n+1$ に行くと，$\frac{1}{n+1}$ がある。

⋮

⋮

これを図式的に捉えると次のようになる（↑は「見える」という知覚体験を表す）。

$$\begin{array}{ccccccccccc} \frac{1}{1} & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{4} & \cdots\cdots & \frac{1}{n} & \cdots\cdots \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ 1 & \rightarrow & 2 & \rightarrow & 3 & \rightarrow & 4 & \rightarrow\cdots & n & \rightarrow\cdots \end{array}$$

図－3

さらに，先行する項と比較する「～はより小さい」という解釈が(39)に加わると次のような表現になる。

(40)　$n=1$ の位置から始まる。このとき $\frac{1}{n}$ は $\frac{1}{1}=1$：

（1から）2に行くと，$\frac{1}{1}$ より小さい $\frac{1}{2}$ がある。

3に行くと，$\frac{1}{2}$ より小さい $\frac{1}{3}$ がある。

4に行くと，$\frac{1}{3}$ より小さい $\frac{1}{4}$ がある。

⋮

（n から）$n+1$ に行くと，$\frac{1}{n}$ より小さい $\frac{1}{n+1}$ がある。

⋮

これは，自然数の列にそった運動と平行して，数列の項の値が段々と小さくなっていく変化も表現しているので，「小さくなる」という変化を表していることになる。

(41)　$\frac{1}{1} > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \frac{1}{5} > \cdots > \frac{1}{n} > \cdots$

一方，(38)も同様の言い換えができるが，「近づく」の場合，項は場所を表すので，主節は「(項は) $\frac{1}{n}$ より近い $\frac{1}{n+1}$ にいる」となる。

(42)　$n=1$ の位置から始まる。このとき $\frac{1}{n}$ は $\frac{1}{1}=1$：

（1から）2に行くと，

（項は）$\frac{1}{1}$ より近い $\frac{1}{2}$ にいる。

3に行くと，

（項は）$\frac{1}{2}$ より近い $\frac{1}{3}$ にいる。

4に行くと，

（項は）$\frac{1}{3}$ より近い $\frac{1}{4}$ にいる。

⋮

（n から）$n+1$ に行くと，

（項は）$\frac{1}{n}$ より近い $\frac{1}{n+1}$ にいる。

⋮

これは，(40)と同様に(41)のような変化を表すが，この場合，‘＞’は「より近い」と解釈される。

(37)の表現では，自然数の上での移動と項の値での変化が，(38)の表現では，自然数の上での移動と項の値の上での移動が，それぞれ対応されているので，自然数と項の値という二つの異なった「場所」が使われている。しかし，次の表現では項の値の上だけで，つまり，実数の上だけで，移動と変化の二つが対応されている。

(43)　As we go out farther and farther in the sequence, the terms become smaller and smaller.

(Courant and Robbins 1996: 290)

この(43)の表現は，「小さくなる（become smaller）」を「近づく（get nearer/approach）に換えることができる。

(44) a．As we go out farther and farther in the sequence, the terms get nearer and nearer to the limit.

b．As we go out farther and farther in the sequence, the terms approach the limit.

日本語でも「と」を用いて同様の言い方ができる。

(45)　（項の）列をドンドン進んでいくと，項の値が段々と極限に近づいて行く。

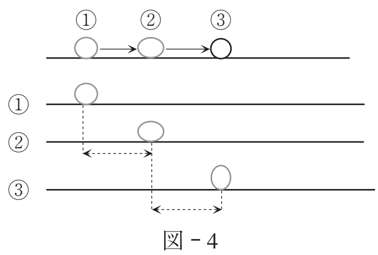
次節では，こうした一つの「場所」で二つの運動ないし変化を表す表現がどのような分節的な言い方に言い換えられるかを検討する[9]。

4．運動の分節的記述

あるものが「進む」とか「近づく」という運動は，基本的にどういうことかというと，それは，そのものの位置の変化であり，位置の変化は一般に「移動」と呼ばれる。そこで，まず，「移動する」ということをどう記述するかを考えてみる。

例えば，次の図のように，○が①から②へ，②から③へと位置を変えたとする。

移　動



図－4

このような移動を記述するには，①と②との位置の差，

および，②と③との位置の差を検知する表現を考えれば良い。そのような記述の表現として，次のような「と」を用いたものが考えられる[10]。

⑷6 a．①のところに行くと，○は②のところにいる。

b．②のところに行くと，○は③のところにいる。

「と」の前では，ある運動主体の運動を表し，後ではその運動主体の知覚体験を表す。この二つの表現を繋ぐと，図－3のように「行く」という行為とそれに続く「見える」という知覚体験の連続が表現され，運動による○の位置の変化を記述することができる[11]。ただ，行為が行われる場所と知覚される場所とが同じという点が図－3とは異なる。

すぐ気づかれるように，この⑷6の言い方を用いると，ゼノンのアキレスと亀のパラドックスを表現できる[12]。

⑷7 アキレスが亀のいた地点に行くと，亀はさらに前の地点にいる。

パラドックスの要点とか問題点は別として，この例を用いて亀の運動の記述を考えてみたい。まず，亀がドンドン前へ進んでいるとする。この亀の運動を観察者であるアキレスが検知するには，亀の後を追っかければ良い。亀が静止しておれば，亀のいる位置に到着し，その場に自分も静止するか追い越すことになるが，亀は動いているので，亀の動きに合わせて亀の後を自分も進む状態を続けることができる。この状況を表現すると次のようになる。

⑷8 アキレスがドンドン前へ進むと，亀はその先をドンドン進む。

これは，アキレスが自ら動くことによって亀の運動を捉えていることを表している。

この⑷8の表現は，前節で見たように，分節的な表現に書き換えることができる。そこで，「アキレスが亀のいた p_n に行くと，亀は（そのすぐ先の）p_{n+1} にいる」ということを $p_n \Rightarrow p_{n+1}$ という場所を項とする2項関係で表し，p_1 を亀が最初にいた場所とすると，次のような分節的記述ができる。

⑷9 $p_1 \Rightarrow p_2$

$p_2 \Rightarrow p_3$

$p_3 \Rightarrow p_4$

$\vdots$

$p_n \Rightarrow p_{n+1}$

$\vdots$

この記述から p_1 を最初とする亀のいた場所の系列を取り出すことができる。

⑸0 $p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4,\ \cdots,\ p_n,\ p_{n+1},\ \cdots$

そして，p_n がある（出発）点0からの距離を表し，徐々に増加していく場合には，「離れる」という移動を表す。

⑸1 $p_1 < p_2 < p_3 < p_4 < \cdots < p_n < p_{n+1},\ < \cdots$

逆に，p_n が（到着）点dまでの距離を表し，徐々に減少していく場合には，「近づく」という移動を表す。

⑸2 $p_1 > p_2 > p_3 > p_4 > \cdots > p_n > p_{n+1},\ > \cdots$

前節で，収束数列の動的記述として次のような表現があることを見た。

⑸3 列をドンドン進んでいくと，項の値が段々と極限に近づいて行く。＝⑷5

亀を項とするとともに，⑸2における p_n を項の値とし，アキレスを数列にそって進んでいる運動体と解釈すると，⑷9は⑸3を分節的に書き直したものとみることができる。次節では，このように解釈した⑷9がどのようにして ε-δ 論法に繋がっていくかを見る。

5．ε-δ 論法：推移関係への移行

項の値が極限値に近づくことの表現方法として，一つは，自然数にそって進む運動に対応して項の値が段々と極限値に近くなるという言い方があった。その場合は，次のような表現を連ねた分節的な言い方になる。

⑸4 （n から）$n+1$ に行くと，項は p_{n+1} にいる

ただし，この場合，「近づく」という意味に解釈するには，「項は p_{n+1} にいる」を「項は，p_n より近い p_{n+1} にいる」のように「より近い」という意味をさらに補って解釈しなければならない。

もう一つの表現方法は，項の列にそって進む運動に対応して項の値が極限値に近づいて行くという言い方である。その場合は次のような表現を連ねることになり，それを $p_n \Rightarrow p_{n+1}$ と略記した。

⑸5 項のいた p_n に（運動主体が）行くと，項は（そのすぐ先の）p_{n+1} にいる

こうした表現から ε-δ 論法に至る一つの仮説として，「と」に含まれる「その先の」という関係が「より近い」という推移的関係に拡張されたとする見方が考えられる。つまり，「と」の関係を「より近い」という関係に拡張して解釈してやり，$p_n \Rightarrow p_{n+1}$ を次のような推移関係に移行させるのである。

⑸6 項のいた p_n に（運動主体が）いるとき，項はそれより近い p_{n+1} にいる

これを $p_1 > p_2$ と略記すると⑷9の表記は次のようになる。

⑸7 $p_1 > p_2$

$p_2 > p_3$
$p_3 > p_4$
⋮
$p_n > p_{n+1}$
⋮

関係 > は推移的なのですぐ先の項とだけでなくずっと先の項との間にも成立する。従って，(56)は，次のように p_n と p_m の関係に一般化できる。

(58) 項のいた p_n に（運動主体が）いるとき，項はそれより近い p_m にいる。

このような(55)の表現から(58)の表現への移行は，すぐ前の項だけでなくずっと先の項をも見ることになるので，運動主体の視点から他者の視点へと視点が変わったことを意味する。同時に，次々と後を追いかけるといった動的（dynamic）な表現から静的（static）な表現へ変わったことを意味している。

(57)と(58)の記述をもとにすると，次の「どの p_n についてもそれより小さい p_m が存在する」という表現が可能になる。

(59) $\forall n \in \mathbf{N}\ \exists m \in \mathbf{N}[p_n > p_m]$

特に p_m の方に注目するのであれば，p_n は任意の数 $\varepsilon > 0$ に一般化できる[13]。

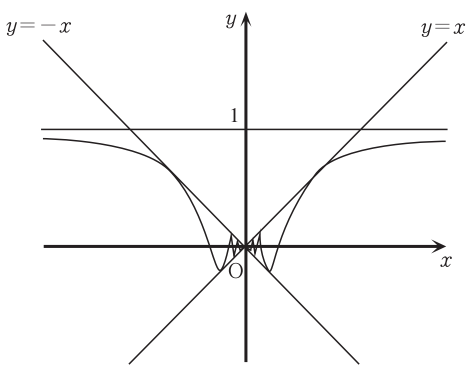
(60) $\forall \varepsilon > 0\ \exists m \in \mathbf{N}[\varepsilon > p_m]$

さらに，極限を L とする数列 $\{a_n\}$ にこの式を当てはめると次のようになる。

(61) $\forall \varepsilon > 0\ \exists m \in \mathbf{N}[|a_m - L| < \varepsilon]$

これまで考えている「近づく」という運動は，直線上の距離の大小を見るものであるが，関数の中にはそうした近づき方では捉えられない近づき方がある。例えば次のような関数がそうである[14]。

(62) $f(x) = x \sin 1/x$ for $x \neq 0$
$= 0$ for $x = 0$



図－5

そのため極限 L の近傍を考え，任意の数 ε についての ε 近傍に対し，ε より小さい数 $l_m = |a_m - L|$ についての l_m 近傍が存在する，という考えに変わっていった[15]。(61)を距離の大小から近傍の大小関係に代えてやると，次のような集合の大小関係を表す式が得られる。

(63) $\forall \varepsilon > 0\ \exists m \in \mathbf{N}[\{a_n \,|\, |a_n - L| < |a_m - L|\} \subset \{a_n \,|\, |a_n - L| < \varepsilon\}]$

このように書き換えると，後を追って追い詰めていくというイメージからある一点に徐々に追い込んでいくというイメージに変わることになる。そして，この(63)を条件文で表すと，いわゆる ε-m 論法の式になる[16]。

(64) $\forall \varepsilon > 0\ \exists m \in \mathbf{N}\ \forall n[n \geqq m \rightarrow |a_n - L| < \varepsilon]$

ここで問題になるのは，連続的な継起関係から推移関係への移行と，それに伴う運動主体の視点から他者の視点への移行という二つの移行の信憑性であるが，移行を裏付けると考えられる二つの点を最後に指摘しておく。一つは，認知の順序に関することで，我々は最初運動主体としての視点から現象を認知していくが，世界を全体として捉えるために他者の視点に移行し，物事を推移的関係として見ていくということがある。他の一つは言語に関するもので，もし，日本語のように，運動主体の視点から見ることにかなり特化した「と」のような表現が無いと，最初に言語化されるのが推移関係であるので，移行があってもそれに気が付かれないことがある。

6. まとめ

変化や動きは，認知主体が自ら動くことによって認知される。そうした認知のあり方に対応した言い方，例えば，「郊外へ行くと，家は段々みすぼらしくなる」とか「前へ進むと，亀がその先をドンドン進んで行く」のような言い方が日常言語にはある。接続助詞「と」は，それをさらに「アキレスが亀のいたところに行くと，亀はその先にいる」のように分節的に表現できる。ε-δ 論法は，こうした分節的な言い方をもとにしており，δ が変化ないし運動するものを表し，ε がそれを捉える運動を表していると考えられる。つまり，ε はアキレスに，δ は亀に対応している。

付録 他者の視点からの運動記述

この付録では，日常言語における他者の視点からの運動記述が，運動をその軌跡として捉える捉え方とどのようにつながっているかを簡単に見てみる。

次は，話し手（佐伯）が過去の体験を語る例で，自身の運動を他者の視点から記述している。

⑴　あの園芸店に行こうとして，その交差点からさらに南へ二ブロック走り，南丸山交番のある交差点で菊水旭山公園通りを右折した。坂道を少し上って行くと，山麓通りに出た。

この文の記述する状況を考えてみると，まず，過去時制は，発話時 r_s を規準にしてそれに先行するある特定の時間 r_0 を指定する。そして，その二つの時間の間に，「二ブロック走る」，「右折する」，「坂道を登る」という三つの出来事が順に継起している。これを図示すると次のようになる[17]。

$r_0 < e_1 < e_2 < e_3 < r_s$
南に二ブロック走る (佐伯, e_1)
公園通りを右折する (佐伯, e_2)
坂道を登る (佐伯, e_3)
r_0 は過去時制によって指定される時点
r_s は発話時

図－1

次は⑴に似ているが，実際の体験ではなく，ある交差点から園芸店に至るまでの経路を示す例である。

⑵　あの園芸店に向かうには，その交差点からさらに南へ二ブロック走り，南丸山交番のある交差点で菊水旭山公園通りを右折するのがいい。坂道を少し上って行くと，山麓通りに出るのだ。
（佐々木譲「真夏の雷管」）

この例では，出発点である交差点から園芸店に至る経路をある人物が移動したと想定する記述になっている。この場合，特定の時点とか特定の人物の移動ということではないので，次のようにそれぞれ一種の自由変項 r_n, r_m, x のようになっていると見ることができる。

交差点 → $r_n < e_1 < e_2 < e_3 < r_m$ → 山麓通り
……→園芸店
南に二ブロック走る (x, e_1)
公園通りを右折する (x, e_2)
坂道を登る (x, e_3)

図－2

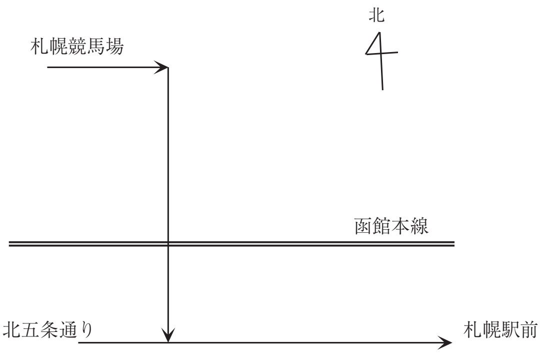
次では，「道」という経路が主題となり，その経路について描写されている。

⑶　めざす案内板を見て，道路を右折した。道は切り通しの丘の斜面を登り，ゆるやかな尾根に入ってまた右に曲がった。　（佐々木譲「屈折率」）

この⑶では，実際に生じている出来事をもとに描写されているが，次は，実際の出来事ではなく，想定された出来事をもとに描写されている

⑷　いま佐伯たちの車は，鉄工団地通りを市街地方向に向けて走っている。ちょうど左手に札幌競馬場がある。道路はこの先で南におれ，函館本線の高架をくぐって，札幌市街地の西側に出る。北五条通りに出たところで左折すると，一キロ少々で札幌駅前に着くのだ。
（佐々木譲「真夏の雷管」）

これらの例では，移動主体は明示されておらず，単に経路だけが示されている感じがする。例えば，⑷では次のような経路が示されている。



図－3

こうした例では，次のように，for a while，「しばらく」，「やがて」といった時間表現を伴うことができるので，単に経路だけでなく，ある運動体が運動する軌跡を描いているように見える

⑸ a．The highway runs along the shore for a while.
（松本 1997：209）
b．そのハイウェイは海岸沿いをしばらく走る。
（松本 1997：209）

⑹　北要採石鉱業の本社から五分ほど南西方向に走った。北海道道八二号線，通称左股（ひだりまた）線という幹線道路を，山に向かうようだ。……八二号線はやがて盤渓（ばんけい）峠を越えて，札幌の南部，豊平川の作る谷の方向に出る。
（佐々木譲「真夏の雷管」）

これは，時間を変数 t とする関数 $x=f(t)$, $y=g(t)$ の座標 (x, y) で表された動点Pの軌跡を示すのに似ている。

さらに，次のような例では，単に経路を示すだけで時間的な変化は感じられない。

⑺ a．Highway 101 goes from San Francisco to Los Angels.
b．この山麓を，等高線に沿うように北海道八九号線，別名藻岩山山麓通りが走っており，この道路の両側の斜面に，住宅街が拓（ひら）けている。　（佐々木譲「真夏の雷管」）

これは，区間 $I=[0, 1]$ から実数 X, Y の座標への関

数 $u: I \to X \times Y$ で表される $u(0)$ を始点，$u(1)$ を終点とする道（path）に似ている。

この付録では，日常言語で文あるいは命題として表されている移動とか経路が，数学では「運動の軌跡」とか「道」という関数で表現されることを指摘した。これとは逆に，本論で検討した ε-δ 論法は，運動の軌跡（関数）という「もの」を命題の形式として捉え論理に乗せようとするものであると言える。

注

1）Courant and Robbins（1996: 292）は，数列の極限の動的な捉え方について次のように述べている。

Our intuition suggests a "dynamic" idea of a limit as the result of a process of "motion": we move on through the row of integers 1, 2, 3, ⋯, n, ⋯ and then observe the behavior of the sequence a_n. We feel that the approach $a_n \to a$ should be observable.

2）Langacker（1990: 20）の例。

3）(6b)，(7)は，本多（2005）からの例。

4）(19)は，いずれも Sweetser（1997）からの例。Sweetser は，連続した運動ではなく，繰り返しの出来事に対応した変化の例もあげている。

ⅰ）Your apartment keeps getting bigger every time I visit.

また，直接的な知覚変化ではなく，もう少し抽象的な状況変化の例もあげている。

ⅱ）a．Services get longer as you go to more Orthodox synagogues.

b．The situation gets better every time I call her.

5）「と」についてのまとまった記述および議論は，久野（1973：114-121），坪本（1998：120-133）などに見られる。なお，この節は（中島 2001a, 2001b, 2002）をもとにしている。

6）英語では次の例のように From⋯ が知覚体験の継起を表すことがある。

ⅰ．From the top of the bank, the thousands upon thousand of flickering lanterns floating downstream were turning the surface of the river red.

(*Two Little Girls Called Ida* tr. by P. Bush)

土手の上から川面を見ると，いく百ともしれぬとうろうは，真っ赤に川面をうずめ，光をうつしてまたたきながら，しずかによりそい流れていく。

（松谷みよこ「ふたりのイーダ」）

さらに，次の例では知覚体験のもとづく判断が続いている。

ⅱ．From the look of the sky, which was filled with fat black clouds, there would soon be a thunderstorm.

(M. Ende *Momo* tr. by J. M. Brownjohn)

7）知覚体験の継起については植村（2002）の第三章，第四章が参考になる。植村は知覚体験の継起を「体験の流れ」と呼んでいる。

8）英語には日本語の「と」に対応するような接続詞はないが，when の一部の用法が「と」の用法と重なる。例えば，次の例の when は「とき」ではなく「と」が対応する。

ⅰ．a．The cars get three feet longer when you enter Pacific heights. (Sweetser 1997)

b．パシフィック・ハイツに入ると，車は３フィート長くなる。

また，be about to Verb when, be Verb-ing when などの形をしたときの when も，「とき」ではなく「と」が対応する。

ⅱ．Before I could find the peach she had seen overhead she had pulled the limb down and reached for it. I was about to help her get it when suddenly she dropped the peach she was holding and cried out.
（彼女がそれを取るのを手伝おうとすると，突然……） (E. Caldwell *The Visitor*)

ⅲ．Mrs. Miller had finished drying the supper dishes and was thumbing through an afternoon paper when she saw an advertisement of a picture playing at a neighborhood theater.（夕刊をめくっていると，……） (T. Capote *Miriam*)

when の用法については Declerck（1997）などが詳しい。

9）Lakoff and Núñez（2000: 186-197）も，本稿と同様，次のような二つの運動の関係に対しメタファーを用いた動的な説明を与えようとしている。

Visualizing the process via these metaphors, there are two coordinated trajectors in motion: As the first move from integer to integer starting with 1, the second moves correspondingly from point-location to point-location on the number line, ⋯ Lakoff and Núñez（2000: 191）

しかし，整数から実数のべき集合への関数という「もの」でもって変化，運動を説明しようとしているので，命題の形をした ε-δ 論法の説明に移行するのは難しい。これに対し，本稿は，「と」による書き換えを用いて命題の形を保持しながら ε-δ 論法を説明しようとするものである。

このことと関連するが，Núñez（2006），Marghetis and Núñez（2013）では，数学において動的概念がどのような働きをしているかについて論じられている。

10）「……のところに行く」という表現は，字句通りの身体的動作だけでなく動きを追いかける視線の動きなども表していると考えられる。物理学では，空間と時間を前提とし，運動を時間を変数とする距離の変化と捉えるが，逆に，運動が先にあり，空間と時間はその運動から生まれるとする考え方もある。ここでは，空間は前提とするが，時間は必ずしも前提としない。野矢（2005：158-165）はそのような空間を「距離空間モデル」と呼んでいる。

11）次の(ⅰ)の例では，先行する運動が後続する変化の原因となっているので，運動がなければ変化も生じない。

ⅰ．a．奥に向かって進むと，柵は段々高くなる。

b．何度も引っ越しをしていると，勤務先は段々

と近くなっていった/勤務先に段々と近づいて行った。

これに対し，次の(ii)の例では，後続の変化は「自立」しており，先行する運動がなくとも生じ得る。

ii．除夜の鐘が鳴り始めた。秒針が1周，2周，3周として行くと，長針が段々と0時に近づいて行く。

図-4の場合，○の位置の変化は(ii)の例と同じく運動主体の運動とは独立している。

12）青山（2011：151）はアキレスと亀の関係を「とき」を使って次のように表現している。

i．亀が前回進んだ地点にアキレスが着いたとき，亀はそこより前方に進んでいる。

ただ，この「とき」という関係は，推移的関係なので動的な感じが表現できない。「とき」による表現を並べても連続した繋がりはないので，動的な感じを出すためには繋がりを補ってやるか，「そこより前方」を「そのすぐ先」に代えてやらなくてはならない。これに対し，「と」による表現にはそうした繋がりと「そのすぐ先」という意味がもともと備わっている。

13）p_mを$\frac{1}{m}$とすると，次のようになるが，

$$\forall\varepsilon>0\ \exists m\in\mathbf{N}\left[\varepsilon>\frac{1}{m}\right]$$

これは，アルキメデスの公理：$\forall\varepsilon>0\ \exists n\in\mathbf{N}[n>\varepsilon]$と同値である。

14）この点についてはNúñez and Lakoff（1998: 91）を参照のこと。なお，図-5は平井崇晴氏から提供をうけたものである。

15）この点についてはNúñez and Lakoff（1998: 96-98）やLakoff and Núñez（2000, Ch. 14）などを参照。

16）(61)と(64)は，単調な数列では同値になる。参考までに，このことを具体的な数列で確認しておく。まず，次の(i)を(61)に当てはめると極限値が0であるので(ii)のようになる。

i．$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$

ii．$\forall\varepsilon>0\ \exists m\in\mathbf{N}\left[\varepsilon>\left|\frac{1}{m}-0\right|\right]$

これより，0の$\frac{1}{m}$近傍がε近傍に含まれるので次が成り立つ。

iii．$\forall\varepsilon>0\ \exists m\in\mathbf{N}\left\{n\ \middle|\ \left|\frac{1}{n}-0\right|\leqq\left|\frac{1}{m}-0\right|\right\}\subset\left\{n\ \middle|\ \left|\frac{1}{n}-0\right|<\varepsilon\right\}$

$$\leftrightarrow\ \forall\varepsilon>0\ \exists m\in\mathbf{N}\ \forall n\in\mathbf{N}\left[\frac{1}{n}\leqq\frac{1}{m}\rightarrow\frac{1}{n}<\varepsilon\right]$$

$$\leftrightarrow\ \forall\varepsilon>0\ \exists m\in\mathbf{N}\ \forall n\in\mathbf{N}\left[n\geqq m\rightarrow\frac{1}{n}<\varepsilon\right]$$

この逆も成り立つ。次の数列(iv)は1が極限値であるので(v)のようになる。

iv．$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \cdots, \frac{n}{n+1}, \cdots$

v．$\forall\varepsilon>0\ \exists m\in\mathbf{N}\left[\varepsilon>\left|\frac{m}{m+1}-1\right|\right]$

同様に，1の$\frac{m}{m+1}$近傍がε近傍に含まれるので次が成り立つ。

vi．$\forall\varepsilon>0\ \exists m\in\mathbf{N}$

$$\left\{n\ \middle|\ \left|\frac{n}{n+1}-1\right|\leqq\left|\frac{m}{m+1}-1\right|\right\}\subset\left\{n\ \middle|\ \left|\frac{n}{n+1}-1\right|<\varepsilon\right\}$$

$$\leftrightarrow\ \forall\varepsilon>0\ \exists m\in\mathbf{N}\ \forall n\in\mathbf{N}\left[\left|\frac{n}{n+1}-1\right|\leqq\left|\frac{m}{m+1}-1\right|\rightarrow\left|\frac{n}{n+1}-1\right|<\varepsilon\right]$$

$$\leftrightarrow\ \forall\varepsilon>0\ \exists m\in\mathbf{N}\ \forall n\in\mathbf{N}\left[n\geqq m\ \rightarrow\left|\frac{n}{n+1}-1\right|<\varepsilon\right]$$

17）表記は，Partee（1984），Hinrichs（1986）などを参考にした。「$e_1<e_2<e_3$」という表記では，出来事e_1, e_2, e_3が順に継起していくことを意味し，それに伴い時間も推移していく。時間だけでなく次のLewisの例の示すように，come/goなどの直示表現の基準点も出来事の継起に伴い推移する。

i．When the beggars came to town, the rich folk went to the shore. But soon the beggars came after them, so they went home. Lewis（1979）

また，「南に二ブロック走る（佐伯，e_1）」という表記は，出来事e_1において，行為者である佐伯が南に二ブロック走るという行為を行う，というように読む。

参考文献

青山拓央（2011）『新版　タイムトラベルの哲学』東京：ちくま文庫

Courant, R. H. Robbins（revised by I. Stewart）（1996）*What is Mathematics? An Elementary Approach to Ideas and Methods*, Oxford: Oxford University Press.

Declerck, Renaat（1997）When-*Clauses and Temporal Structure*, London: Routledge.

Hinrichs, Erhard（1986）"Temporal Anaphora in Discourse of English," *Linguistics and Philosophy* 9, 63-82.

本多啓（2005）『アフォーダンスの認知意味論―生態心理学から見た文法現象』東京大学出版会

久野暲（1973）『日本文法研究』大修館

Lakoff, G. and R. E. N Núñez（2000）*Where Mathematics Comes From: How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*, New York: Basic Books.

Langacker, R. W.（1990）"Subjectification," *Cognitive Linguistics* 1-1, 5-38.

Lewis, David（1979）"Scorekeeping in a Language Game," In R. Bauerle et al（eds.）*Semantics from Different Points of View*, Berlin: Springer, 172-87.

Marghetis, Tyler and Rafael Núñez（2013）"The Motion Behind the Symbols: A Vital Role for Dynamism in the Conceptualization of Limits and Continuity in Expert Mathematics," *Topics in Cognitive Science* 5, 299-316.

松本曜（1997）「空間移動の言語表現とその拡張」田中茂範・松本曜（1997）『空間と移動の表現』研究社出

版，第II部，pp. 125-230.

中島信夫（2001b）「具象概念から抽象概念のメタファー的構成―時間概念の場合―」『私学研修』第157・158号，105-118.

中島信夫（2002）「節間の時間関係と時間概念について」『日本語・英語・中国語における節構造の比較研究』甲南大学綜合研究所叢書　67 pp. 37-98.

中島信夫（2018）「ε-δ 論法における運動の概念について―認知意味論的考察―」『甲南大学紀要：文学編』No 168, pp. 71-79.

中山康雄（2003）『時間論の構築』東京：勁草書房.

野矢茂樹（2005）『他者の声 実在の声』産業図書

Núñez, R. (2006) "Do Real Numbers Really Move? Language, Thought, and Gesture: The Embodied Cognitive Foundations of Mathematics," In R. Hersh ed. *18 Unconventional Essays on the Nature of Mathematics*, New York: Springer, pp. 160-181.

Núñez, R. E. and G. Lakoff (1998) "What Did Weierstrass Really Define?: The Cognitive Structure of Natural and ε-δ Continuity, *Mathematical Cognition*, 4 (2), 85-101.

Partee, B. H. (1984) "Nominal and Temporal Anaphor," *Linguistics and Philosophy* 7, 243-286.

Sweetser, Eve (1997) "Role and Individual Interpretations of Change Predicated," In J. Nuyts and E. Pederson (1997) *Language and Conceptualization*, Cambridge: Cambridge University Press, 116-136.

坪本篤朗（1998）「文連結の形と意味と語用論」In 赤塚紀子・坪本篤朗（1998）『モダリティと発話行為』東京：研究者出版，第Ⅱ部.

植村恒一郎（2002）『時間の本性』東京：勁草書房