

日経平均スポット・ ボラティリティ日次経路の 関数 ARCH モデルによる予測⁽¹⁾

石 田 功

要旨

本稿は、日経平均株価の日中スポット・ボラティリティ経路の予測における関数 ARCH モデルの有用性を検証するものである。実証分析の結果は、少なくとも、用いたイン・サンプルおよびアウト・オブ・サンプルの標本期間において、関数 ARCH(1) モデルのうち共分散作用素の少数の固有値・固有関数を用いるバージョンによる予測が、HAR モデルによる実現分散時系列の日次ボラティリティ予測値を日中季節性で調整し得られるベーシックな経路予測を、RMSE 基準でアウトパフォームするというものであった。

キーワード：スポット・ボラティリティ経路，日中季節性，関数データ解析

JEL Classifications: C22, C58, G17

目次

はじめに

I 関数 ARCH (1) モデルとその推定

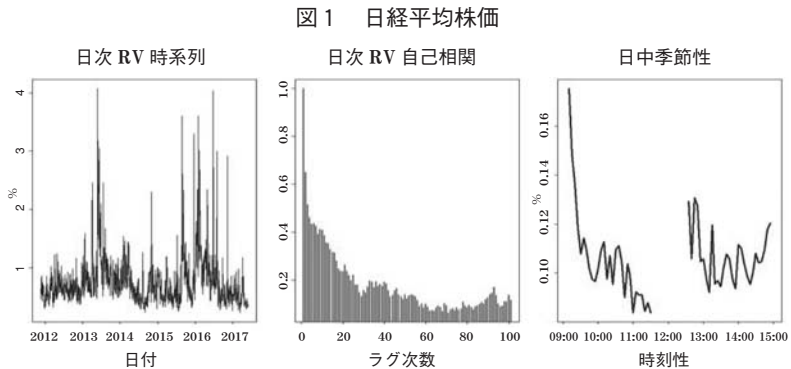
II 日経平均スポット・ボラティリティ日次経路の関数 ARCH モデルによる予測

おわりに

(1) 本研究の一部は科研費基盤研究 (C)25380266 の助成を受けた。

はじめに

資産価格のボラティリティは金融の様々な分野の意思決定において重要な役割を持つ変数であり、この観測、時系列モデリング、予測の手法は近年目覚ましく発展した。⁽²⁾ 多くの場合、資産価格の日次リターンや日中高頻度データから構築した日次変数によりボラティリティ変動モデルを推定、それを将来の1日間やより長期のボラティリティ予測に用いるということが行われてきた。例えば、日経平均株価の日次実現分散 (realized variance、以下、RV) の平方根の時系列 (図1左パネル) のコレログラム (図1中央パネル) は長期依存性を示唆するが³ (データの詳細については後述)、Ishida and Watanabe (2009) は日経平均株価日次ボラティリティの予測における長期依存型時系列モデル ARFIMA の有用性を示した。



短期のトレーディングや執行戦略等においては、ボラティリティの日次レベルの変動だけでなく、より短期の瞬間的ボラティリティ (スポット・ボラティリティ) の計測や予測が重要になる。株価のスポット・ボラティリティ

(2) 例えば、Bauwens et al. (2012) を参照されたい。

日経平均スポット・ボラティリティ日次経路の関数 ARCH モデルによる予測については、相対的に取引セッションの開始後と終了前に高く、半ばに低いという U 字型の日中季節性パターンが多くの市場において観測されている。図 1 右パネルは日経平均株価の取引時間内各 5 分インターバルの対数リターンの時系平均の平方根を時刻の関数としてプロットしたものであるが、東京証券取引所現物株取引の前場開始直後および大引け近くに加えて、昼休み後の後場開始直後も値が高くなっている。日中各時刻のスポット・ボラティリティの予測手法としては日次予測を日中季節性により調整する方法があるが(例えば, Bos et al. 2012), 本稿では近年, 統計学において開発された関数データ解析のアプローチが日経平均株価の日中短期ボラティリティの予測精度向上に役立つかについての予備的な検証を行う。具体的には, 過去の短期リターンの日次経路データから翌日の日中ボラティリティ経路を予測する Hörmann et al. (2013) の関数 ARCH モデルを日経平均株価の日中高頻度データに適用する。石田 (2016) も関数 ARCH モデルを日経平均株価データへ適用しているが, イン・サンプルでのモデル推定結果の報告にとどまっている。

以下, 第 1 節において関数 ARCH モデルとその推定と予測における利用方法について簡単に説明し, 第 2 節において関数 ARCH モデルの日経平均 RV の予測におけるパフォーマンスを報告, 最後にまとめと今後の課題について述べる。

I 関数 ARCH (1) モデルとその推定

本節では Engle (1982) の ARCH モデルを関数時系列モデルに拡張した Hörmann et al. (2013) について説明する。⁽⁴⁾

(3) 関数データ解析の理論と応用を幅広く展望する入門書としては Kokoszka and Reimherr (2017) がある。

(4) 関数 ARCH (1) の本節より若干詳しい日本語解説としては石田 (2016) がある。

F を定義域 $[0, 1]$ の実関数から成る任意の空間とすると、次式 (1), (2) を満たす関数時系列 $\{Y_t(s) \in F, t \in \mathbb{Z}, s \in (0, 1)\}$ は F 値の関数 ARCH (1) 過程と定義される (Hörmann et al. 2013) :

$$Y_t = \varepsilon_t \sigma_t \quad (1)$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha(Y_{t-1}^2) \quad (2)$$

ここで, $\{\varepsilon_t\}$ は F 上の i.i.d. 確率関数列⁽⁵⁾, $\omega \in F^+, \alpha: F^+ \rightarrow F^+, F^+$ は F 内の非負関数の集合である。Hörmann et al. (2013) は, F が自乗可積分関数のヒルベルト空間で (内積 $\langle x, y \rangle := \int_0^1 x(s)y(s)ds$), α が

$$\alpha(x)(s) := \int_0^1 a(s, u)x(u)du, \quad s \in [0, 1] \quad (3)$$

の形を持つ有界作用素とすれば, いくつかの追加的条件の下で, (1), (2) が一意の強定常解を持つことを示した。

本稿では, 東京証券取引所の前場開始時刻午前 9 時を $s=0$, 後場終了時刻午後 3 時を $s=1$ とし (昼休みの 1 時間の時間経過は 0), 日経平均株価の第 t 日の時刻 s の超短期リターン $Y_t(s) := \ln P_t(s) - \ln P_t(s-h)$ ($P_t(s)$ は第 t 日, 時刻 s の日経平均株価。実証分析では $h=5/300$, すなわち 5 分間) の関数 ARCH(1) モデルを考える。すべての t, s について $E[\varepsilon_t(s)] = 0$, $E[\varepsilon_t^2(s)] = 1$ とする。このとき, $E_{t-1}[Y_t^2(s)] = E_{t-1}[\varepsilon_t^2(s)\sigma_t^2(s)] = \sigma_t^2(s)E_{t-1}[\varepsilon_t^2(s)] = \sigma_t^2(s)$ なので, $\sigma_t^2(s)$ は第 t 日時刻 s のスポット・ボラティリティとなり, $\{\sigma_t^2(s), s \in (0, 1)\}$ は第 t 日のスポット・ボラティリティが日中に辿るスポット・ボラティリティ経路となる。式 (3) を式 (2) に代入すれば,

$$\sigma_t^2(s) = \omega(s) + \int_0^1 a(s, u)Y_{t-1}^2(u)du \quad (4)$$

(5) i.i.d. 確率関数列の厳密な定義については Bosq (2000) を参照されたい。

日経平均スポット・ボラティリティ日次経路の関数 ARCH モデルによる予測となり、 t 日の各時点のスポット・ボラティリティがその前日 $t-1$ 日の各時点の超短期リターン 2 乗の加重和となっていることが分かる。

Hörmann et al. (2013) は、 $\{Y_t\}$ が関数 ARCH (1) 過程であるとき、 $\{Y_t^2\}$ は関数 AR (1) 過程 (FAR (1) 過程) となることに着目、Bosq (2000) の理論を拡張し、式 (5)-(6) で表される ω, a の Yule-Walker 型推定量が一定の条件の下で一致推定量となることを示した。

$$\hat{a}(s, u) := \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^{T-1} \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^p \hat{\lambda}_j^{-1} \langle Y_t^2, \hat{\phi}_j \rangle \langle Y_{t+1}^2, \hat{\phi}_i \rangle \hat{\phi}_i(u) \hat{\phi}_j(s),$$

$$s, u \in [0, 1] \quad (5)$$

$$\hat{\omega} = \hat{m} - \hat{a}(\hat{m}), \quad \hat{m} := T^{-1} \sum_{t=1}^T Y_t^2 \quad (6)$$

ここで、 $(\hat{\phi}_i, \hat{\lambda}_j)$ は共分散作用素 $Cx := E[\langle Y_t^2, x \rangle Y_t^2]$ の標本バージョン

$$\hat{C}x := \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \langle Y_t^2, x \rangle Y_t^2 \quad (7)$$

の固有関数、固有値のペア (固有値の大きい順に p 個)、内積 $\langle x, y \rangle := \int_0^1 x(s)y(s)ds$ 。通常、 p にはあまり大きな値は用いられない。スポット・ボラティリティ経路の予測には

$$\hat{\sigma}_{t+1}^2 = \hat{\omega} + \hat{a} Y_t^2 \quad \left(\hat{\sigma}_{t+1}^2(s) = \hat{\omega}(s) + \int_0^1 \hat{a}(s, u) Y_t^2(u) du \right) \quad (8)$$

を用い、予測評価は次式の RMSE により行う

$$RMSE := \sqrt{T^{-1} \sum_{t=1}^T \int_0^1 (Y_t^2(s) - \hat{\sigma}_t^2(s))^2 ds} \quad (9)$$

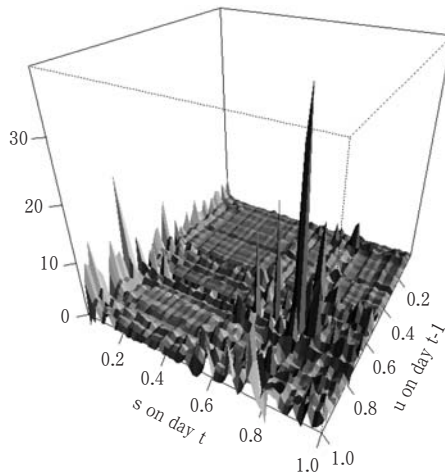
II 日経平均スポット・ボラティリティ日次経路の関数 ARCH モデルによる予測

本節では、まず、日経平均株価データに関数 ARCH (1) に適用した結果を紹介する。日経平均株価データは、日経メディア・マーケティング社の日経 NEEDS ティックデータ・株価指数先物・オプションデータの、東証の

取引時間が現在の午前 9:00-11:30, 後場 12:30-15:00 (計 5 時間) になった 2011 年 11 月 21 日から 2017 年 5 月 31 日までのものを用い, 関数データ解析関連の計算には R の `fda` パッケージ (Ramsay et al. 2018) を用いた。 $h=5$ 分とし, 1 日 60 観測値の日経平均株価の 5 分間対数リターン 2 乗を計算し (昼休みの時間経過は無視, $s=1/60$ および $s=31/60$ のリターンの計算にはそれぞれ前場, 後場の最初の公表値を用い, $s=30/60$ には前場最後の 5 分間のリターンを用いた), B-spline (基底数 60, 次数 2) により関数データ化し $\{Y^2(s), s \in (0, 1)\}$ を得た。直近 500 取引日 (約 2 年) は予測評価のアウト・オブ・サンプル期間として残し, 1355 日分のデータと式 (5), (6) により $a(s, u)$ 及び $\omega(u)$ を推定した (予測変数の構築に 22 のラグ観測値が必要な後述の HAR モデルと予測対象期間を同期するために $\hat{\sigma}^2(s)$ のイン・サンプル予測は 1332 日分)。図 2 は $p=5$ の場合に得られた \hat{a} のグラフであるが ($\hat{\omega}$ のベースとなる \hat{m} は各時刻の対数リターン 2 乗の時系列平均であり, 図 1 右パネルと形状的に大差ないので省略する), 1 取引日が 1 時間の昼休みを挟んで前場・後場に分割されている影響からか, グラフは Hörmann et al. (2013) が米国 S & P 100 指数を用いて推定した相対的に 4 角 (取引開始直後・終了直前から翌日取引開始直後・終了直前への影響) が高く中央部分が低い形状のグラフ (Hörmann et al. 2013, Figure 3) を 2×2 で並べたような形状になっている (上から見れば漢字の「田」の形状)。特に, 後場から翌日後場への影響が相対的に大きくなっている。また, Hörmann et al. (2013) の \hat{a} ほどには形状がスムーズでない原因としては, 1 分間隔で重複する 5 分リターンを用いた Hörmann et al. (2013) と異なり本稿の分析では重複しない 5 分リターンを用いたことと, 離散観測データ連続関数化に際して基底数を 60 に設定し, スムージングを行っていないこと等が考えられる。

次に, スポット・ボラティリティ日次経路の予測であるが, 予測対象であるスポット・ボラティリティ経路の実現値は直接観測できないので

図2 $\hat{a}(s, u)$



$\{Y_t^2(s)\}$ で代用し、式(9)の RMSE により精度の評価を行った。比較対象としては、次の3モデルそれぞれによる予測とした。

- ・ ボラティリティの予測可能な日次変動を無視し日中季節性のみ $\hat{m}(s)$ で捉えるモデル
- ・ 日中各5分インターバルのリターン分散を HAR モデル (Corsi 2009) により予測した RV の60分の1とするモデル (日中季節性はなく同一取引日内のスポット・ボラティリティは一定)
- ・ HAR モデルにより1日の RV を予測し、各5分インターバルのリターン分散を RV 予測値 /60 に $\hat{m}(s) - \bar{m}$ を加え日中季節性調整したものとするモデル ($\bar{m} = \int_0^1 \hat{m}(s) ds$)

RV は日中5分間対数リターンの2乗(60観測値)の和で定義した(夜間リターン、昼休みリターンは含まれず)。また、HAR モデルの予測変数は RV の1次のラグ、1~5次のラグの平均、1~22次のラグの平均の3変数とした。 $\{Y_t(s)\}$ の関数 ARCH (1) モデル (すなわち $\{Y_t^2(s)\}$ の関数 AR (1)

モデル) としては $p=1$ から $p=5$ までのそれぞれのバージョンを用いた。アウト・オブ・サンプル予測には各モデルのパラメータ、関数、作用素のイン・サンプル推定値と各日の予測に必要な $\{Y_t^2(s)\}$ のラグを用いた。結果は表に示した。イン・サンプルでは、関数 ARCH (1) モデルの $p=1 \sim p=5$ すべてのバージョンが3つのライバル・モデルを RMSE 基準でアウトパフォームし、関数 ARCH (1) モデルの中では $p=5$ の場合に最も RMSE が小さかった。アウト・オブ・サンプルでは、関数 ARCH (1) モデルの中では逆に $p=1$ の場合が最も RMSE が小さく、ライバル3モデルを RMSE 基準でアウトパフォームした。

表 日経平均株価スポット・ボラティリティの日次経路予測結果

予測モデル	イン・サンプル	アウト・オブ・サンプル
	RMSE	RMSE
$\hat{m}(s)$	0.0491	0.0821
HAR	0.0484	0.0821
HAR + $\hat{m}(s)$	0.0480	0.0816
関数 ARCH (1) $p=1$	0.0460	0.0814
関数 ARCH (1) $p=2$	0.0457	0.0816
関数 ARCH (1) $p=3$	0.0456	0.0818
関数 ARCH (1) $p=4$	0.0443	0.0827
関数 ARCH (1) $p=5$	0.0437	0.0823

おわりに

本稿では、日経平均株価スポット・ボラティリティの日次経路の関数 ARCH モデルによる予測精度の検証を行った。関数 ARCH (1) モデルは、HAR モデルによる日次 RV 予測を日中季節性により調整した予測モデル等を精度においてアウトパフォームした。精度向上は若干のみであったが、日

日経平均スポット・ボラティリティ日次経路の関数 ARCH モデルによる予測
 次ボラティリティの長期依存性を捉える HAR モデルと比較して、関数
 ARCH (1) モデルは 1 次 (= 1 日) のラグしか用いないモデルであり、本稿
 の実証分析は関数データ解析アプローチによるスポット・ボラティリティ予
 測の可能性の検証としては予備分析レベルに過ぎない。より高次の関数
 ARCH (q) モデルや、最近開発された Aue et al. (2017) の関数 GARCH モ
 デル、更には関数時系列を Karhunen-Loève 展開 (例えば、Kokoszka and
 Reimherr 2017, p. 41 参照)

$$Y_t^2(s) \approx m(s) + \sum_{j=1}^p \xi_{j,t} \varphi_j(s) \quad (10)$$

により近似し、スコア時系列 $\{\xi_{j,t} := \langle Y_t^2, \varphi_j \rangle, j=1, \dots, p\}$ の VAR モデル
 予測を組み込むアプローチ (Aue et al. 2015) があるが、これらは予測向上
 に役立つ可能性がある。その他、関数データ解析アプローチにはまだスポッ
 ト・ボラティリティ経路予測で試みられていない手法が豊富に含まれるが、
 これらの応用については今後の課題とする。

参 考 文 献

- Aue, A., Horváth, L. and Pellatt, D. 2017. "Functional Generalized Autoregressive
 Conditional Heteroscedasticity." *J. Time Series Analysis* 38: 3-21.
- Aue, A., Norinho, D., and Hörmann, S. 2015. "On the Prediction of Stationary Functional
 Time Series." *J. American Statistical Association* 110: 378-391.
- Bos, C., Janus, P., and Koopman, S. 2012. "Spot Variance Path Estimation and Its
 Application to High-Frequency Jump Testing." *J. Financial Econometrics* 10: 354-389.
- Bauwens, L., Hafner, C., and Laurent, S. (Eds.) 2012. *Handbook of Volatility Models and
 their Applications*. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons.
- Bosq, D. 2000. *Linear processes in Function Spaces*. New York: Springer-Verlag.
- Corsi, F. 2009. "A Simple Approximate Long-Memory Model of Realized Volatility." *J.
 Financial Econometrics* 7: 174-196.
- Engle, R. 1982. "Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the
 Variance of United Kingdom Inflation." *Econometrica* 50: 987-1008.
- Hörmann, S., Horváth, L., and Reeder, R. 2013. "A Functional Version of the ARCH
 Model." *Econometric Theory* 29: 267-288.
- Ishida, I., and Watanabe, T. 2009. "Modelling and Forecasting the Volatility of the Nikkei

- 225 Realized Volatility Using the ARFIMA-GARCH Model.” CIRJE-F-608, University of Tokyo.
- Kokoszka, P., and Reimherr, M. 2017. *Introduction to Functional Data Analysis*. Boca Raton, Florida: CRC Press.
- Ramsay, J., Wickham, H., Graves, S., and Hooker, G. 2018. “Package ‘fda’, Version 2.4.8.” <https://cran.r-project.org/web/packages/fda/fda.pdf>.
- 石田功. 2016. 「日経平均スポット・ボラティリティ日次パスの関数 ARCH モデリング」. 『大阪取引所先物・オプションレポート』 31 (1).