不確実性下での提携形成交渉

三　上　和　彦

甲南経営研究　第50巻　第１号　抜刷
平 成 21 年 9 月

甲南経営研究　第50巻第１号（2009.９）

不確実性下での提携形成交渉

三　上　和　彦

１　イントロダクション

本稿の目的は不確実な資産を保有する経済主体が，不確実な資産（確率的利得）の再配分交渉を行うモデルを提示し，その含意を明らかにすることである。特に，確率的利得の再配分は，提携を形成し，その提携メンバー間でのみ行われるとする。したがって，本稿で考察するモデルには提携形成のプロセスも含むことになる。このとき，確率的利得の再配分の結果とともに，どのような提携構造が形成されるかということについても注目すべきである。

以上の特徴をモデルに組み込むために，本稿では Yildiz (2002) の不確実資産の再配分交渉モデルに提携形成プロセスを含んだモデルを提示する。Yildiz (2002) のモデルは有限期の二人交渉モデルであり，最終期において，自分が保有する資産の評価額が決定されるという想定がなされている。最終期以前では，プレイヤーはどのような評価額になるかについては不確実な知識しか持っていないが，その評価額に関し，何らかの情報が時間の経過とともに得られる。最終期に至るまでの各時点において，プレイヤー間で彼らが直面しているリスクのシェアに関し交渉が行われるが，本稿では Yildiz (2002) の二人交渉とは異なり，一般的な n 人による交渉を想定する。したがって，Yildiz (2002) のモデルでは全体提携が組まれ，リスクシェアリングが行われるか，あるいは，個々のプレイヤー自身でリスクに直面することになるかの二つの状況しか起こりえないが，本稿のモデルでは，部分的な提

携が形成され，彼らの間だけで，リスクがシェアされる可能性も存在する。

以上のモデル設定において，本稿ではまず，各期におけるリスクシェアリングの交渉において提案は必ず受け入れられることを示す。そして，交渉ゲームの環境が凸性を満たすなら，交渉の各期において全体提携が形成されることを示す。したがって，凸性の仮定の下では，戦略的な交渉遅延は発生せず，動学的な意味での効率性が達成されることになる。

不確実な資産に関するリスクシェアリングについては，これまでも多くの分析がなされてきている。代表的なものに，Wilson（1968），Rosing（1970），Pratt（2000）などがある。これらのモデルは，全体提携が形成されているときの確率的利得の分配が考察されており，この全体提携での配分という前提を正当化するいつくかの仮定がなされている。しかしながら，内生的な提携形成問題は扱われていない。

上記に挙げた Yildiz（2002）は Wilson（1968）を拡張したもので，確率的利得に関する情報が時間の経過とともに開示される動学的な交渉モデルを提示している。しかし，彼のモデルは二人ゲームであり，そもそも提携形成の問題は扱っておらず，三人以上のゲームで生じる可能性のある交渉遅延，効率性の問題は検討されていない。

一方，n 人の提携形成モデルとして代表的なものは，Chatterjee, Dutta, Ray and Sengupta（1993），Okada（1996）である。彼らは n 人の提携形成のプロセスを含むモデルにおいて，効率性，遅延，全体提携形成の条件などを考察している。しかし彼らのモデルでは，交渉パイの不確実性は扱われていない。一般に交渉段階で交渉対象が明確である場合は少ない。本稿は，彼らのモデルに不確実性を導入したものといえる。

また，Suijs and Borm（1999）は，価値が不確実な場合の協力ゲームモデルを考察している。本稿において，彼らの結果の一部を用いることになるが，彼らのモデルは戦略的交渉モデルとはなっていない。

本稿は，以下のように構成されている。2節では，リスクシェアリングの交渉モデルを提示する。3節では，交渉の提案者は必ず受け入れられる提案を行うことが示される。4節では凸性の仮定の下で，全体提携が形成されることを示す。

2　モ　デ　ル

本節ではプレイヤーが直面する経済環境と想定する交渉プロセスを提示する。n 人のプレイヤーで構成される経済を考える。彼らは将来のある時点で資産を受け取るが，その資産の価値はその時点になるまで確実に知ることはできない。したがって，それは確率的な利得である。プレイヤーは提携を形成して，この確率的利得の再配分に関して交渉を行うものとする。

交渉の最終期は有限とし，それを $\bar{t}$ で表す。交渉の期を $0, 1, \ldots, \bar{t}$ という非負の整数で表す。交渉は0期から始まる。

各交渉期 t の最初に，各プレイヤーはすべてのプレイヤーが知ることのできる公開情報 y_t を受け取る。このシグナルの実現値によって，その期において提案するプレイヤーが決まり，そして，交渉の最終期においてプレイヤーが受け取ることになる確率的利得に関する何らかの情報を得ることになる。

$\{Y_t\}$ をある確率過程とし，それは $\{y_t^1, \ldots, y_t^n\}$ の値をとるとする。確率変数 Y_t の実現値を y_t^i とする。ここで，一般性を失うことなく y_t^i が実現したとき，それはプレイヤー i がその t 期における提案者として選ばれたことを意味すると仮定する。

各プレイヤーが最終期 $\bar{t}$ において受け取ることになる確率的利得はシグナルのすべての実現値に依存する。

$X_{\{i\}}$ をプレイヤー i が提携を形成していないときに最終期において受け取る確率的利得とする。最終期になるまでにプレイヤーは提携を形成するか否かを決定する。もし提携を形成すれば，その提携内のメンバー間でリスク・

シェアに関するルールを決定する。

最終期に到達するまでに提携が形成されれば，その時点において各プレイヤーが直面する利得は不確実なので，シグナルの流列の関数として表される確率的利得の実現値それぞれに対して，その提携内のメンバー間で保有することになるシェアの割合がリスク・シェアのルールである。

ここで，X_S を提携 S が保有する確率的利得とし，x_S を確率的利得 X_S の配分，$Z(S) \ni x_S$ を提携 S にとって可能な配分の集合とする。

ゲームは次のように進行する。各 t 期の最初にシグナルが実現し，それに基づいて提案者が決定される。例えば，もし 0 期においてシグナル y_0^i が実現すれば，プレイヤー i が 0 期における提案者として選ばれ，自分自身を含む提携と，そしてその提携がその時点で選ぶことのできる条件付き消費計画を提案する。その提携メンバーに選ばれたプレイヤーはある所与の固定された順番で，その提案を受け入れるか否かを決定する。もし，その提携メンバー全員がその提案を受け入れれば，その提携メンバーはゲームから離脱し，ゲームは次の期に進む。その期においては残りのプレイヤーでゲームがプレイされ，前期と同様にあるシグナルに基づいて，提案者が決定され，その提案に関する応答がなされる。提案が受け入れられる限り，このようにゲームは進行する。

一方，もし提案が拒否されれば，ゲームは次の期に進み，再びあるシグナルの実現値に基づいて提案者が決定され，前期と同様にある提携と，その提携が選ぶことのできる条件付き消費計画が提案され，それに対する応答がなされる。このようにして，もしどの提携にも属さないプレイヤーが存在したなら，最長 $\bar{t}$ までゲームは進み，もしここでも提携に属さないプレイヤーは個人的な利得 $X_{\{j\}}(h(y_{\bar{t}}^i))$ を受け取ることになる。ここで，$\bar{t}$ は有限の正の整数であり，$X_{\{j\}}(h(y_{\bar{t}}^i))$ は最終期 $\bar{t}$ においてシグナル $y_{\bar{t}}^i$ が実現し，シグナルの系列が $h(y_{\bar{t}}^i)$ になったときに，どの提携にも属していないプレイヤー j

が受け取る確率的利得である。したがって一般的に最終的に受け取る利得は各期におけるシグナルすべてに依存する。逆に考えれば，各シグナルは最終的な利得に関する情報を与えているとも見なすことができる。

提携に属しているプレイヤーは，最終期において確率的利得の実現値を受け取り，その期までに形成された提携メンバー間で契約された条件付き消費計画にしたがって，実現した利得の再配分を行う。$X_S(h_t^i)$ が提携 S が獲得することのできる確率的利得であったので，

$$X_S(h_t^i)=\sum_{i\in S}X_{\{i\}}(h(y_t^i))$$

となる。この X_S を契約に基づいて再配分する。

プレイヤーは利得に関し通時的な割引は行わないとする。しかし，プレイヤーはなるべく早く提携の形成を行おうとする。なぜなら，もしプレイヤーの提携形成が遅れれば，彼らが直面するリスクをシェアする機会が失われていくからである。つまり，時間の経過とともに彼らが直面するリスクを交換する機会が小さくなっていく。これはプレイヤーが最終的に受け取る利得が各期において発生するシグナルに依存し，時間の経過とともに実現可能な利得の組合せが減少していくという事実が反映されている。

プレイヤーは完備性，推移性，連続性を満たす選好関係 $\succsim_i$ によって確率的利得を評価する。また，プレイヤーはリスク回避的と仮定する。

次の意味で選好関係 $\succsim_i$ の優加法性を仮定する。

仮定 1. N のすべての部分集合 S, T に対して，$S\cap T=\emptyset$ であり，$x_S\in Z(S)$，$x_T\in Z(T)$，そして提携 $S\cup T$，$x_{S\cup T}\in Z(S\cup T)$ に，次のような選択可能配分が存在する。

$$x_{S\cup T}^i\succsim_i x_S^i \text{ for all } i\in S,$$

$$x_{S\cup T}^j\succsim_j x_T^j \text{ for all } j\in T.$$

したがって，提携 S と T それぞれが別々に契約を結ぶことのできる配分に対するプレイヤーの評価が何であれ，それらの提携が一つの提携を形成することで，彼らが受け取ることになる配分を必ず改善することができることをこの仮定は意味している。

以上のモデルを以下のシンプルな例で確認しておこう。

例 1. プレイヤーは三人存在し，$\bar{t}=1$ とする。したがって，交渉回数は二回である。各プレイヤーは各期（０期，１期）のはじめに公開シグナル $Y_t, t=0, 1$ の実現値を受け取る。仮定より Y_t が取り得る値はプレイヤー数の３と同じであり，それぞれを y_t^1, y_t^2, y_t^3 とし，特に時間 t からは独立であると仮定する。また，そのシグナルは次の三次元ベクトルとする。

$$y_t^1=(1, 0, 0),\ \forall t \in 0, 1,$$

$$y_t^2=(0, 1, 0),\ \forall t \in 0, 1,$$

$$y_t^3=(0, 0, 1),\ \forall t \in 0, 1.$$

y_t^i が実現すれば，t 期における提案者はプレイヤー i に決定される。この三つのシグナルの実現値は等確率で生じるとする。

各プレイヤーが最終期において得ることになる資産は０期と１期のシグナルの実現値の合計とする。したがって，

$$(X_{\{1\}}, X_{\{2\}}, X_{\{3\}})=(Y_0+Y_1)$$

となる。この確率変数の実現値をすべて書き下すと，$(2, 0, 0)$，$(0, 2, 0)$，$(0, 0, 2)$，$(1, 1, 0)$，$(1, 0, 1)$，$(1, 1, 0)$ となる。ここで第 i 要素はプレイヤー i が受け取る資産額を表している。

１期におけるシグナルが実現する前に提携 S が形成されているときの，提携 S が再配分可能な利得を考える。提携 $S=\{1, 2\}$ とし，０期におけるシグナルの実現値が $y_t^1=(1, 0, 0)$ であったとする。このとき，１期におけるシグナルの実現値に応じて再配分可能な資産は２，２，１のいずれかとなる。それぞれ順に，y_1^1, y_1^2, y_1^3 のシグナルが実現したときの状況に対応している。こ

のとき，提携 S は１期におけるシグナルの実現値に応じた条件付きの配分計画を立てることができる。０期におけるシグナルの他の実現値の場合も同様に考えることができる。

０期のシグナルの実現値が明らかになる前の提携 S にとって再配分可能な資産は次のようになる。(1)

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

この行列における第 kl 要素は，０期におけるシグナルが y_0^k で，１期目のシグナルが y_1^l のときに，提携 S にとって配分可能な資産額を表している。それぞれの各要素は $\frac{1}{9}$ の確率で生じる。このとき，提携 S は９つの状況に応じた資産の配分を決めることができる。同様に他の提携に再配分可能な資産を求めることができる。

上記の例より明らかなように，時間の経過とともに条件付けられる可能性が減少していくので，リスク回避的なプレイヤーはなるべく早く提携を形成して自ら直面するリスクの共有を図ろうとするであろう。

任意の提携において，その確率的利得の配分を考察するにあたってパレート効率的な配分が注目される。そこで，パレート効率的な配分の定義を以下で与えておく。

任意の t においてシグナル y_t^i が実現し，そのシグナルへのパス $h(y_t^i)$ が確定している状況を考える。

定義 1. 次の条件が満たされるとき，提携 S の配分 $x_S(h(y_t^i))$ を $h(y_t^i)$ を所与としたパレート効率的な配分という。その条件とは，

（1）　ゲームのルールに従えば，０期のシグナルが実現する前に提携を組むことは不可能であるが，これは $\bar{t}$ がより大きい場合に適用される状況と考えることができる。

$$x_S^{j\prime}(h(y_t^i)) \succsim_j x_S^j(h(y_t^i)),\ \forall j \in S$$

かつ提携 S に属する少なくとも一人のプレイヤーに対しては強い意味で上記の関係が成立するような提携 S の配分 $x'_S(h(y_t^i)) \in Z(S|h(y_t^i))$が存在しないことである。

もし，任意の $S \subseteq N$, $t \in \{0, 1, \ldots, \bar{t}\}$, $i \in N$ について，$X_S(h(y_t^i))$ がパレート効率的なすべての配分を含むとき，X_S をパレート完備という（Yildiz (2002)）。

Yildiz (2002) はパレート完備性が満たされないときに均衡で交渉の遅延が生じる例を提示し，また，パレート完備性が満たされる条件を提示している。以下においてはパレート完備性が満たされると仮定する。

提携を形成することによって，その提携メンバーは獲得できる確率的資産に関する配分を決定することになるが，もちろん，その提携にとって配分可能な資産が異なれば，一般的には提携メンバーが望む配分も異なってくる。ある提携による決定がその可能性に影響を与えることができるなら，そのようなことが可能であるかどうかを検討する必要がある。もし，提携による決定（協力的決定）が対応するパレート効率フロンティアに従って順序づけられるならば，問題は生じないが，はたしてこのような順序づけは可能なのであろうか。

このような問題に最初に取り組んだのは Wilson (1968) である。彼は，この順序づけが「提携の」代表的期待効用水準の大小によって決定される条件を明らかにした。その条件を導出するために行った仮定は次のようなものである。パレート効率フロンティア上のシェア・ルールはその提携（Wilson は部分提携を考えていないので全体提携）が得ることのできる利得の大きさ（もちろん，これは事前に分かるものではなく，事後的にその大きさが確定する）と確率変数依存し，提携による行動には依存しない，という仮定である。

この仮定の下で，Wilson (1968) は全体提携（シンジケート）が代表的効

用関数，代表的確率分布を持つ必要・十分条件を導出した。このような効用関数が存在するならば，すべての提携メンバーは所属する提携にすべての意思決定を委任することができる。

Rosing（1970）は Wilson（1968）モデルの問題点として，シェア・ルールが提携による決定（協力的決定）に依存しないことが問題点であると指摘した。そこで，彼は意思決定それぞれに対応したパレート効率フロンティア上でのシェア・ルールを考察した。

すべての決定が提携グループに委任されるなら，その提携が形成されると考えてもよいが，その必要条件は，意思決定それぞれに対応したパレート効率フロンティアがそれぞれ交差しないことである。なぜなら，もし交差しているなら，その提携メンバー内の少なくとも一つのメンバー・ペア間で，意思決定に関する対立が生じているからである。

そこで，本稿で考察するモデルでのパレート効率フロンティアの位置について述べておく。本稿で想定されているモデルでは，提携形成後に各メンバーがパレート効率フロンティアに影響を与えるような意思決定は含まれていない。したがって，Rosing（1970）で考察されていたような提携の協力的行動決定に伴うパレート効率フロンティアの位置に関する問題は存在しない。

しかし本稿のリスク・シェアリングモデルは動学的である。したがって，各期におけるパレート効率フロンティアが存在することになり，したがって通時的なパレート効率フロンティアの位置関係が問題となってくる。

また仮定より，プレイヤーはどの時点で合意に至るかということに関心がないので，プレイヤーは獲得する利得を割引くこともない。したがって，プレイヤーが交渉するパイの大きさが時間の経過とともに単調に減少していくことも一般には考えられない。したがって，Rosing（1970）で提起された問題と同様に本稿で考察するモデルにおいても，パレート効率フロンティアが交差する可能性が一般的には存在する。

一方で，本稿のリスクシェアリング・モデルでは，最終的にプレイヤーが受け取ることになる資産に関する情報が逐次的に開示されていく。したがって，プレイヤーが最終的に受け取ることになる資産額に関し，その確実性が次第に増していく。この事実は時間の経過とともに，プレイヤーにとってはリスクを共有する機会を損失していくことを示している。以前には可能であったリスク・シェアの可能性が時間の経過とともに不可能になっていく。

いまプレイヤーはリスク回避的な選好を持つと仮定しているので，このリスク・シェアの可能性の減少は明らかに交渉パイが減少し，しかも，時間の経過とともに少なくとも一人のプレイヤーにとって，よりよいリスク・シェアの配分を受け取る可能性が少なくなっていくことを意味している。また，前述のように，ある時点において，複数のパレート効率フロンティアを生じさせる意思決定は存在しないので，各時点に可能なパレート効率フロンティアは一つである。したがって，本稿のリスクシェアリング・モデルにおいてはパレート効率フロンティアが通時的に交差する可能性はなく，一様にプレイヤーはなるべく早く合意に至ることを望むことになる。

3　均　　衡

本節ではまず次のことを示す。各期において選ばれたプレイヤーは受け入れられる提案を行う。もしこれが証明されれば，均衡において意図した遅延は生じないことが分かる。

ゲームは有限の展開型で表現されるので，均衡を求めるのに後ろ向きの帰納法を用いることができる。もし最後の期までにまだ交渉を行っているプレイヤーが存在すれば，そのプレイヤーは自分自身が受け取ることになる利得を得ることになる。つまり，残っているプレイヤー間で提携が形成され，リスクが再配分されることはない。これは，定義より，シグナルはその期における提案者を決めるとともに，プレイヤーが受け取る利得に関する情報も与

えているので，最後のシグナルが実現した後，プレイヤーが受け取る利得も確定する。したがって，残っているプレイヤー間で彼らのリスクを補償しあう機会が存在しないことになる。リスクの再配分は，必ず少なくとも一人の誰かが受け取った利得を別の誰かに移転する行為なので，利得が確定した段階でリスク再配分を行えば，その利得を移転するプレイヤーの利得が必ず減少する。もし，残っているプレイヤーがただ一人ならば，もともとリスクを交換する相手が存在しないので，自分の利得を受け取ることになる。したがって，$\bar{t}$ 期においては，提案者が誰であっても残っているプレイヤー間で提携が形成されることはない。

この事実を所与として，t 期においてシグナル y_t^i が実現した後の部分ゲームを考えよう。ここでプレイヤー i が提案者として選ばれている。プレイヤー i に関する次のような問題を考える。プレイヤー i は次の制約の下で，プレイヤー i に最も望ましい確率的利得

$$x_S^i(h(y_t^i))$$

をもたらす提携 S と配分 $x_S(h(y_t^i))$ を選ぶ。

制約１：

$$i \in S \subseteq N.$$

この制約は提案者であるプレイヤー i は提案する提携 S に含まれていなければならないことを要求するものである。もし，現在考えているプレイヤー i の問題が，ある合意がすでになされた後の部分ゲームおけるものならば，条件にある N は $N \backslash T$ に置き換える必要がある。ここで T はある提携に参加しているすべてのプレイヤーの集合である。

制約２：

$$x_S^j(h(y_t^i)) \succsim_j V_{t+1}^j(h(y_t^i)),\ \forall j \in S, j \neq i.$$

この条件は，プレイヤー i が提案する提携メンバーに入れるプレイヤーに対しては，同時に提案している配分（確率的利得の再配分）は，少なくともそ

のメンバーの留保利得を与えるものでなくてはならないことを要求するものである。ここで，$V^j_{t+1}(h(y^i_t))$ はシグナル y^i_t が実現した後の t 期におけるプレイヤー j の留保利得を表している。これはプレイヤー j が次期以降に受け取ることができると予想している利得である。

制約 3：

$$x_S(h(y^i_t))\in Z(S|h(y^i_t)).$$

ここで $Z(S|h(y^i_t))$ はヒストリー $h(y^i_t)$ の下で，提携 S のメンバー間で可能な確率的利得の配分の集合である。この制約は，プレイヤーが提案する確率的利得の配分は，シグナル y^i_t が実現した後に配分可能なものでなければならないことを要求するものである。シグナルの実現値は，最終的にプレイヤーが受け取ることになる利得に関し，部分的な情報をもたらすものなので，時間の経過とともに可能な確率的利得の配分も減少していくことに注意しなければならない。

以上のプレイヤー i に関する問題は，プレイヤー i が提案者として選ばれたときに，提案した提携およびその提携内におけるメンバー間での確率的利得の配分が，その提携メンバーすべてに受け入れられるときに，プレイヤー i にとって最適な確率的利得の配分を与えるものである。一般的には，この提案が均衡においてなされるとは主張できない。なぜなら，プレイヤー i にとって，受け入れられない提案を行う方がよりよい配分を与えるかもしれないからである。そこで，次に上記の制約を満たす配分は拒否されるすべての配分を支配することを示す。

次のようなプロセスに基づいて，$Z(N|h(y^i_t))$ 内の実現可能な配分を構成する。

1. x_1 をプレイヤー n だけで構成される提携で実現可能な配分とし，次の性質を満たすものとする。

$$x_1=V^n_{t+1}(h(y^i_t)).$$

ここでのプレイヤー n は，プレイヤー i 以外のどのプレイヤーでもよい。すると，x_1 はプレイヤー n にとっての留保利得で，またそれは確率的利得でもある。

2.　1．で構成した x_1 を用いて次のように x_2 を構成する。

$$x_2=b(\{n\},x_1,n-1).$$

ここで，$b(\{n\},x_1,n-1)$ は，プレイヤー n に対して，少なくとも x_1 よりよい配分を与えるようプレイヤー $n-1$ と提携 $\{n\}$ が一つの提携を組んだとき，プレイヤー $n-1$ にとってベストな配分である。正確には，

$$b(\{n\},x_1,n-1)\in B(\{n\},x_1,n-1)$$
$$=\{y\in Z(\{n\}\cup\{n-1\}\,|\,y^n\succsim_n x_1^n)\}$$

かつ

$$x_2^{n-1}\succsim_{n-1}y^{n-1},\ \forall y^i\in B(\{n\},x_1,n-1)$$

である。同様にして n まで，

$$x_n=b(N\backslash\{i\},x_{n-1},i)$$

と定める。x_n は作り方より，プレイヤー i を除いたすべてのプレイヤーの配分は，少なくとも x_{n-1} よりはよいという条件の下で，プレイヤー i が他のすべてのプレイヤーで構成される提携と新たな提携を組んで得られる選択可能なすべての確率的利得のなかで，プレイヤー i にとって，最も望ましい配分を表している。したがって一般的に，

$$b(S,x,i)\in B(S,x,i)=\{y\in Z(S\cup\{i\})\,|\,y^j\succsim_j x^j,\ \forall j\in S\}$$

かつ，

$$b^i(S,x,i)\succsim_i y^i,\ \forall y^i\in B(S,x,i)$$

と表すことができる。

シグナル y_{t-1}^i を所与として，x_2 より順に配分 x がどのように構成されるかを確認する。まず $x_2=b(\{n\},x_1,n-1)$ とする。$B(\{n\},x_1,n-1)$ の定義

より，$x_2^n \succsim_n x_1^n = V_t^n(h(y_{t-1}^i))$ となる。また優加法性の定義より，

$$x_2^{n-1} \succsim_{n-1} X_{\{n-1\}}(h(y_{t-1}^i)) = V_t^{n-1}(h(y_{t-1}i))$$

かつ

$$x_2 = (x_2^n, x_2^{n-1}) \in Z(\{n, n-1\} | h(y_{t-1}^i)).$$

同様にして，

$$x_n = (x_n^1, \ldots, x_n^i, \ldots, x_n^n) \in Z(N | h(_{t-1}i))$$

を構成することができる。

以上より，x_n の構成方法と優加法性より，

$$x_n^j \succsim_j V_{t+1}^j(h(y_t^i)),\ \forall j \in N, j \neq i.$$

ということができる。各プレイヤーは提携形成後においても，少なくとも自分が直面する確率的利得以上を確保できる。したがって，もし提案者 i が提案 x_n を行えば，各プレイヤー $j \in N \setminus \{i\}$ に少なくとも各プレイヤーに自身の留保利得を保証することができる。

また，

$$x_n = (x_n^1, \ldots, x_n^n) \in Z(N | h(y_t^i))$$

より，提案 x_n は実現可能である。

したがって (N, x_n) は上記の最大化問題における実行可能な解である。

さらに $(N, (V_{t+1}^1, \ldots, V_{t+1}^n))$ も実行可能な解の候補の一つなので，

$$x_n^i \succsim_i V_{t+1}^i.$$

したがってプレイヤー i は受け入れられる提案をすることで，少なくとも x_n^i を確保することができる。

以上より，利得 x_n^i は受け入れられない提案をすることによって得られる利得 V_{t+1}^i よりよいので，以下のレンマを得る。

レンマ 1. 均衡において意図的な遅延は存在しない。

これは，ある一つの可能な解 (N, x_n) が，提案者が受け入れられない提案をするすべての提案行動を支配するからである。

しかし，プレイヤー i が全体提携を提案するかどうかは明らかではない。なぜなら，部分提携が形成されるもので，受け入れられる配分よりよい配分があるかもしれないからである。

次節で，選ばれた提案者は各期において全体提携を提案する条件を示す。もちろん，この条件は，これまでになされた条件よりもよりきついものを確率的利得に課すものである。

4　コアと効率性

定義２（Suijs and Borm（1999））. ゲームは次の条件を満たすとき，凸であるという。任意の $U \subset N$ と $S \subset T \subset N \backslash U$ 対して次のことが成立する：すべての $x_S \in IR(S)$ と $x_T \in IR(T)$ と

$$x^i_{S \cup U} \succsim_i x^i_S, \ \forall i \in S$$

を満たすすべての $x_{S \cup U} \in Z(S \cup U)$ に対して，次のような配分 $x_{T \cup U}$ が存在する。

$$x^i_{T \cup U} \succsim_i x^i_T, \ \forall i \in T$$

$$x^j_{T \cup U} \succsim_j x^j_{S \cup U}, \ \forall j \in U.$$

もし，ゲームが上記の定義による凸性を満たすならば，より大きい提携に参加することは，より利得改善的であるといえる。これを定義に沿って説明してみる。提携 U と提携 T が一つの提携を形成しようとしているとする。提携 T の一部のメンバーで構成される提携を S とする。形式的には，したがって，S は T の部分集合となる。提携 S のメンバーが受け取ることのできる個人合理的な確率的利益の集合が $IR(S)$ で，その任意の要素を x_S とする。同様に提携 T のメンバーが受け取ることのできる個人合理的な確率的利益の集合を $IR(T)$ とし，その任意の要素を x_T とする。

ここで提携 U が提携 T と一つの提携を形成する場合と，T の部分集合となる提携 S と一つの提携を形成する場合を考察し，提携 T と一つの提携を

形成するのがより望ましい場合，このゲームは凸性を満たすことになる。定義に沿ってその条件を確認してみる。より小さい提携 S のメンバーにとって，提携 U と一つの提携を形成することで得られる利得のなかで，個人合理性を満たす利得よりも少なくともよりよい利得を考える。これは，提携 $S \cup T$ においても提携 S のメンバー全員にその個人合理的な利得を割り当てることが可能であることから，そのような利得を考えることができる。このとき，提携 U が S ではなくより大きい提携 T と一つの提携を形成して，そのメンバーに選択可能な確率的利得配分のなかで，提携 T におけるどんな個人合理的な配分よりも，提携 T のメンバーにとってよりよく，また，$S \cup U$ で，上記の提携 S の個人合理性をみたすどんな配分よりもよりよい配分を更に上回る配分が存在するならば，このゲームは凸性を満たすことになる。

この凸性を仮定して，上記で構成した確率的利得の配分 x_n はコア配分となっていることを示す。ここでコアとは，全体提携からどんな部分提携による再配分を考えても，少なくとも一人のプレイーヤーにとってその再配分は望ましくないものである場合をいう。

レンマ 2. $x_n = b(N \setminus \{i\}, x_{n-1}, i)$ はコア配分である。

証明．以下では，x_n だけではなく，$x_k, k=1, \ldots, n$ がそれぞれ対応する協力ゲームのコア配分となることを示す。

x_1 は，一人ゲームにおける個人合理的配分なので，コア配分であることは明らかである。次に，x_{n-1} がコア配分であると仮定する。部分提携 $S \subset N \setminus \{i\}$ を考える。x_n がコア配分であることをチェックするためには，提携 S による逸脱と，提携 S にプレイヤー i を加えた提携による逸脱を考えなければならない。まず提携 S による逸脱を考える。いま仮定より，x_{n-1} はコアであり，x_n の構成方法から $x_n^j \succsim_j x_{n-1}^j$ である。プレイヤー i を含まない提携 S が全体提携 N からの逸脱を企てて，彼らで行う確率的利得のどんな再配分も，プレイヤー i を含まないゲームにおいて得られる x_{n-1} よりも厳密により良くな

ることはない。これは，x_{n-1} がコアであることから得られる。しかも全体提携 N における配分 x_n において，逸脱を企てている提携 S のメンバー全員は少なくとも x_{n-1} において得られる x^j_{n-1} よりも少なくともより良い配分を得ているので，上記の事実と合わせて，提携 S がより利得改善的な確率的利得の再配分を行うことは不可能である。

次にプレイヤー i を含む提携 $S\cup\{i\}$ による利得改善的な逸脱が可能か考察する。y^i をプレイヤー i が $S\subset N\setminus\{i\}$ となる提携 S と一つの提携を形成することで得られるプレイヤー i にとってベストな配分とする。これは，提携 S のメンバーには，個人合理的な配分を与え，提携 $S\cup\{i\}$ において，得られるプレイヤー i にとってのベストの配分である。

いま，ゲームの凸性を仮定しているので，全体提携において実行可能な配分 $z\in Z(N)$ のなかに次の２つの性質を満たすものが存在する。

- $z^i\succsim_i y^i$.
- $z^i\succsim_j x^j_{n-1},\ \forall j\in T,\ T=N\setminus\{i\}$.

したがって，このような配分 z はプレイヤー i を除くすべてのプレイヤーが x_{n-1} よりは弱い意味でより良い配分となっている任意の配分と考えることができる。x_n の構成方法から，

$$x^i_n\succsim_i z^i\succsim_i y^i$$

が成立する。y はプレイヤー i が提携 S と一つの提携を形成することで得られるベストの配分なので，プレイヤー i は，提携 S とともに全体提携 N からどんな逸脱を考えても，利得改善的な配分を得ることはできない。つまり，配分 x^i_n は，配分 y^i を支配する。したがって，x_n はコア配分であることが示された。 □

レンマ２より，リスクシェアリングの交渉において，各期のシグナルに従って選ばれた提案者は，自身の最大化問題において，部分提携をその最適解として選ぶことはない。なぜなら，全体提携を形成して提案する配分 x_n（こ

れは，すべてのプレイヤーに受け入れられる）は，部分提携を組んで得られるどんな利得よりもより良いからである。したがって，全体提携における配分 x_n は部分提携による任意の配分を支配する。よって，提案者となったプレイヤーは全体提携を提案する。

レンマ１より，選ばれた提案者は各期において，受け入れられる提案を行うので，提案者はゲームの凸性が満たされているとき，各期において，全体提携を提案するということができる。

命題 1. ゲームが凸性を満たすとき，リスクシェアリングの交渉において，提案者は全体提携を提案し，その提案は受け入れられる。したがって，この交渉に遅延は生じない。

ただし，この結果より，提案者はこの配分 x_n を提案するということを一般的に主張することはできないことに注意しなければならない。x_n はコア配分であるが，コア配分は，唯一とは限らないからである。

参 考 文 献

Chatterjee, Kalyan, Bhaskar Dutta, Debraj Ray, and Kunal Sengupte (1993) "A Noncooperative Theory of Coalitional Bargaining," *Review of Economic Studies*, Vol. 60, pp. 463-477.

Okada, Akira (1996) "A Noncooperative Coalitional Bargaining Game with Random Proposers," *Games and Economic Behabior*, Vol. 16, pp. 97-108.

Pratt, John W. (2000) "Efficient Risk Sharing: The Last Frontier," *Management Science*, Vol. 46, No. 12, pp. 1545-1553, December.

Rosing, Jakob (1970) "The Formation of Groups for Cooperative Decision Making under Uncertainty," *Econometrica*, Vol. 38, No. 3, pp. 430-448, May.

Suijs, Jeroen and Peter Borm (1999) "Stochastic Cooperative Games: Superadditivity, Convexity, and Certainty Equivalents," *Games and Economic Behavior*, Vol. 27, pp. 331-345.

Wilson, Robert (1968) "The Theory of Syndicates," *Econometrica*, Vol. 36, No. 1, pp. 119-132.

Yildiz, Muhamet (2002) "Bargaining over Risky Assets," *Contributions to Economics Theory*, Vol. 2, No. 1, pp. 1-30.