甲南経済学論集第65巻第１・２号　2024年９月

〔資料紹介〕

Gerardi, Maestri and Monzón（2022）“Bargaining over a Divisible Good in the Market for Lemons,” を読む（1）*

宮　川　敏　治†

概要

この研究資料では，近年 American Economic Review に発表された Gerardi, Maestri and Monzón（2022）の内容，および，証明の方法を紹介する。また，当該の論文の紹介にとどまらず，その前提となる研究である Deneckere and Liang（2006）についても詳細に紹介し，それを踏まえた上で，Gerardi et al.（2022）の新規性や新しい問題を解くための解決しなければならなかった部分を明らかにする。さらに，Gerardi et al.（2022），および，Deneckere and Liang（2006）の証明を理解するために必要とされる数学的な知識や定理についても概観する。

キーワード：非協力交渉ゲーム理論，不完備情報，相互依存価値，レモン市場

JEL classification codes: C78.

* 本稿は『甲南経済学論集』の経済学部専任教員による執筆の輪番制に基づき，筆者が当番回にあわせて寄稿したものである。本稿には筆者による独自のモデルによる分析や証明は含まれていない。紹介に用いた論文の著者である Dino Gerardi, Lucas Maestri, Ignacio Monzón, Raymond Deneckere, Meng-Yu Liang および，Lawrence Ausubel には記して感謝の意を表したい。

† 甲南大学経済学部教授。住所：兵庫県神戸市東灘区岡本8-9-1。
E-mail: miyakawa@konan-u.ac.jp

はじめに

この研究資料では，近年，アメリカ経済学会の学会誌 American Economic Review に掲載された Gerardi, Maestri and Monzón（2022）の“Bargaining over a Divisible Good in the Market for Lemons,”の内容，および，証明の方法を紹介する。この論文は，Fudenberg, Levin and Tirole（1985）, Gul, Sonnenschein and Wilson（1986）以来，継続的に研究が積み重なれてきた「不完備情報の非協力交渉ゲーム理論」の最新の研究成果である。不完備情報の非協力交渉ゲーム理論のモデルとして，最も有名なのは Fudenberg, Levin and Tirole（1985）と Gul, Sonnenschein and Wilson（1986）が考察した「不可分財の売り手と買い手がいて，売り手の財の生産費用は公的情報であるが，買い手の財の評価が私的情報である下で財の売買とその価格を交渉する」モデルである。このモデルの私的情報は買い手の財の評価額であるが，この情報は当該の買い手のみに影響を与えて，売り手のファンダメンタルである生産費用には影響を及ぼさない。その意味で，私的価値モデル（private value model）とも呼ばれている。Gul, Sonnenschein and Wilson（1986）のモデルに基づいた研究がその後，数多く行われたが，その中でも不完備情報の非協力交渉ゲーム理論の大きな進展をもたらした研究が，この研究資料でも紹介する Deneckere and Liang（2006）による研究である。この論文は，不可分財の売買交渉モデルであるが，売り手の財の品質が売り手の私的情報であり，買い手のその情報を知らない下で購入価格を提案するというモデルである。このモデルの私的情報は売り手の持つ財の品質であり，この品質は買い手の財の評価額に影響を直接与えることになる。買い手の財に対する評価が，売り手の所有する情報である財の質に依存することから，このモデルは相互価値モデル（interdependent value model）とも呼ばれ，さらに，私的情報が存在する財の売買交渉の例としてよく知られたアカロフの中古車市場の財の

品質に関する私的情報を考察できるモデルとして，不完備情報の非協力交渉ゲーム理論における重要な貢献となっている。しかし，Deneckere and Liang（2006）以降，分析の複雑さもあって，Deneckere and Liang の基本モデルに大きな手を加える研究はあまり行われなかった。そのような状況の中で，Deneckere and Liang（2006）のモデルと同様に財の品質が売り手の私的情報である下で，その財を分割して売買することが可能にして，売り手と買い手の売買交渉を考察した研究が Gerardi, Maestri and Monzón（2022）である。この拡張は，モデルをより現実的なものに近づけるという側面があることに加えて，販売方法と財の品質のシグナリングの問題を考察したり，品質の情報が伝搬する可能性がある中で複数財を販売する状況を考察する足がかりとなり得るものであり，非常に重要な貢献であると考えられる。したがって，この研究資料では，Gerardi, Maestri and Monzón（2022）の論文を丁寧に読み，その内容を紹介するということを行う。

具体的には，まず，Gerardi, Maestri and Monzón（2022）の直接の先行研究である Deneckere and Liang（2006）の内容，および，定理の証明の方法を紹介し，次に，Deneckere and Liang（2006）の中で用いられた数学的な定理を概観し，その証明も与えておく。その後に，Deneckere and Liang（2006）との比較をしながら，Gerardi et al.（2022）で得られている定理の紹介と証明の方法の解説を行っていく。

1　Deneckere and Liang（2006）

Deneckere and Liang（2006）では，売り手と買い手は不可分財の売買とその取引価格について交渉をしている状況を考察している。売り手がその不可分財に関して，財の生産費用，または，財の品質についての私的情報を有していて，買い手は財の購入価格を提案し，提案が受諾されれば，その価格で財が取引され，ゲームは終了する。しかし，提案が拒否されれば，次の期に

移行し，再び買い手が財の購入価格を提案するというプロセスが繰り返されるモデルが想定されている。これに対して，同じ不可分財の売買交渉を想定しているが，買い手の財の評価額が私的情報で，売り手が販売価格を提案する Gul, Sonnenschein and Wilson（1986）や Fudenberg, Levin and Tirole（1985）の私的価値モデルでは，各期の戦略が提案される価格にのみ依存するという定常性を課した定常逐次均衡点が一意であり，独占価格から徐々に財の限界費用と等しい価格（最低価格）まで均衡価格は下がっていくことが示されている。さらには，提案の間隔が狭まっていくと，言い換えると，割引因子が 1 に収束する極限をとると，均衡では最低価格を売り手がすぐに提案し，その提案が確率 1 で受諾されるという効率的な結果が得られるという「コース推測（Coase conjecture)」が成立することが知られている。一方，Deneckere and Liang（2006）では，以下で見るように，私的価値モデルで得られたような割引因子を 1 に収束させて得た極限の定常逐次均衡点が効率的な結果を実現するというコース推測は必ずしも成立せず，合意の遅れが伴う極限均衡が存在することを示している。

1.1　モデル

売り手と買い手が，不可分財 1 単位の取引に関する交渉を行う。各取引者の財の価値は，確率変数 $q \in [0, 1]$ の実現によって決定される。正確には，シグナル q が，関数 $v : [0, 1] \to \mathbb{R}_+$ と $c : [0, 1] \to \mathbb{R}_+$ を通じて，買い手の評価と売り手の費用を決定するとする。売り手がシグナルの実現について知っているが，買い手はシグナルの分布しか知らない。シグナルの分布は一様分布を仮定する。関数 $c(\cdot)$ は，q の増加関数とする。正則条件として，$v(\cdot)$ と $c(\cdot)$ は，$q=0$ では右連続でもある左連続関数であるとする。取引からの利益はゼロを下界とすることが（取引利益がある）共有知識であるとする。

仮定 1．すべての $q\in[0,1]$ に対して $v(q)-c(q)\geq\Delta$ とするような Δ が存在する。

また，次のような状況となることに注意しておく。

補題 1．最善の効率的（*first best efficient*）な取引が可能であることと $E(v(q))=\int_0^1 v(q)dq\geq c(1)$ は同値である。

証明：First best efficiency は，すべての売り手のタイプ q が確率 1 で取引をすることを要求する。これは，期待移転が売り手のタイプに独立でなければならない（そうでなければ，任意の売り手のタイプがより高い期待移転を受け取るためにタイプを偽る誘因が発生する）ことを意味する。この移転を t で表すと，タイプ $q=1$ の売り手の個人合理性（参加条件）は $t\geq c(1)$ であることを要求する。買い手のこのメカニズムへの参加から得られる期待効用は $E(v(q))-t$ に等しくなるので，買い手の個人合理性は $E(v(q))\geq t\geq c(1)$ を意味する。 □

この論文で考察する交渉プロトコルは，情報を持たない party がすべての提案を行う無限期間の交渉ゲームである。このゲームでは，無限の数の期があり，$n=0, 1, 2, \ldots$ で表すことにする。各期において，まず，買い手が売り手に価格 $p\in\mathbb{R}_+$ を提案する。提案を観察して，売り手がそれを受諾する（A）と，取引が提案された価格で行われ，ゲームは終了する。もし，拒否した（R）なら，ゲームは次の期に移る。ゲームの結果は，ペア（p, n）で表せる。売り手と買い手の割引率 r は共通で，買い手の提案の時間の長さを ζ とすると，割引因子は $\delta=e^{-r\zeta}$ で表される。結果が（p, n）のときの買い手の利得は $\delta^n(v(q)-p)$ となり，売り手の利得は $\delta^n(p-c(q))$ となる。取引が永遠に行われないときには，どちらのプレイヤーの利得もゼロになるとする。

この交渉ゲームの定常均衡に注目する。ここでの定常均衡とは，売り手の受諾，拒否の意思決定がそこに至るまでの履歴には依存せず，そのときの買い手の提案にのみ依存するような逐次均衡（sequential equilibrium）を意味

する。このとき，売り手のタイプ q が n 期に提案 p_n を受諾することと $p_n \geq P(q)$ であることが同値になるような非減少で左連続な関数 $P(q)$ が存在することになる。結果として，任意の履歴に対して，買い手の信念は常に prior を切断（truncation）したもの，すなわち，$[q_n, 1]$ というかたちの区間上の一様分布，となる。カットオフレベル（cutoff level）q_n が状態変数としての役割を果たし，その結果，定常均衡はマルコフ性をもつことになる。$G_q(\cdot)$ を状態 q での買い手の信念（確率分布）とし，$g_q(\cdot)$ を対応する密度とする。

$W(q)$ を状態が q での最大化された期待利得とすると，動学的最適化（動的計画）の価値関数を想定すれば，

$$W(q)=\max_{q'\geq q}\left\{\int_q^{q'}(v(z)-P(q'))g_q(z)dz+\delta(1-G_q(q'))W(q')\right\} \quad (1)$$

となる。右辺第 1 項は売り手が提案価格を受諾することでの期待利得であり，第 2 項は拒否が起こって次の期から状態 q' でゲームが始まるときの期待利得を表している。また，$R(q)=(1-q)W(q)$ は区間 $[q, 1]$ にタイプが入っている売り手と取引することから得られる買い手の期待利得を表している。そうすると，(1)は次のように簡単化できる。

$$R(q)=\max_{q'\geq q}\left\{\int_q^{q'}(v(z)-P(q'))dz+\delta R(q')\right\}. \quad (2)$$

$\mathcal{Y}(q)$ を(2)の最大化を実現する解対応（argmax correspondence）とする。（後で解説する）**一般化された最大値定理**によって，$\mathcal{Y}$ は非空，凸値，上半連続対応となる。さらに，価値関数 $R(\cdot)$ も連続となる。また，$t(q)=\min \mathcal{Y}(q)$ とすると，$t(\cdot)$ は非減少，かつ，左連続関数となり，$\mathcal{Y}$ が single-valued である任意の点で連続となる。

均衡では売り手の受諾の意思決定は(2)で表される売り手の提案行動を所与として最適でなければならない。状態 q が買い手の価格提案 $P(q)$ でもた

らされ，次の期，買い手の提案は $P(t(q))$ なるので，

$$P(q)-c(q)=\delta(P(t(q))-c(q)) \tag{3}$$

となる。これは，売り手タイプ q が価格 $P(q)$ を受諾することと，１期待ってより高い価格提案 $P(t(q))$ を受諾することが無差別であることを意味している。

上記の $\{P(\cdot), R(\cdot), t(\cdot)\}$ を用いて定常均衡経路を決定することができる。

1.2　A Two-Type Example

ここではタイプを２つにして単純化することで，結果がどのようにして得られるかの直感を与えることを試みる。まず，売り手の費用と買い手の評価はそれぞれ次のように与えられるとする。

$$c(q)=\begin{cases} 0 & \text{for} \quad q\in[0,\ \hat{q}], \\ \bar{c} & \text{for} \quad q\in(\hat{q},\ 1]; \end{cases} \tag{4}$$

$$v(q)=\begin{cases} \underline{v} & \text{for} \quad q\in[0,\ \hat{q}], \\ \bar{v} & \text{for} \quad q\in(\hat{q},\ 1]. \end{cases}$$

ただし，$\bar{c}>0$, $\underline{v}>0$, $\bar{v}>\bar{c}$, $\bar{v}\geq\underline{v}$ である。ここで，もし $v(\cdot)$ が一定であるならば，モデルは私的価値モデルとなる。

ここでは，バックワードインダクションを用いて定常均衡を構築していく。まず最初に，買い手の最終均衡提案が，最も高い売り手の費用 $\bar{c}$ と等しくなければならないことを見る。任意のより低い価格提案はすべての残っている売り手のタイプたちに受諾されない。一方で，任意の $\bar{c}$ より高い価格提案は，確率１で受諾される。したがって，より低い価格を提案することは戦略としては支配されることになる。今，均衡において，ゲームが終了する前に n 期間の交渉期間が存在するとすると，$\bar{c}$ をもつ売り手タイプは，最終ラウンドまで受諾をしないので，現在の提案である p_n は，費用が０である売り手

タイプたちを「受諾すること」と「最終提案 $\bar{c}$ を受け取るためにさらに n 期間待つこと」を無差別にする。つまり，

$$P(q)=p_n=\bar{c}\delta^n \quad \text{for} \quad q\in(q_n, q_{n-1}], \tag{5}$$

ただし，q_{n-1} は，受諾価格が p_n である最も高い売り手タイプであり，さらに，$q_{-1}=1$，$q_0=\hat{q}$ としている。カットオフ水準の列 $\{q_n\}$ を決定するために，我々は買い手の最適問題を考えなければならない。状態が q_1 のとき，「買い手は $p_0=\bar{c}$ を提案する（この価格だと残っているすべての売り手のタイプが受諾する)」ことと「$p_1=\bar{c}\delta$ を提案する（この価格だと $(q_1, q_0]$ に入るすべての売り手タイプが受諾し，最終提案 p_0 となる次の期にいく)」ことが無差別にならなければならない。今，$m_n=q_{n-1}-q_n$ で n 期の合意に至る事前確率を表すと，まず，

$$R(q_1)=(\underline{v}-\delta\bar{c})m_1+\delta(\bar{v}-\bar{c})m_0=(\underline{v}-\bar{c})m_1+(\bar{v}-\bar{c})m_0,$$

ただし，$m_0=(1-\hat{q})$，を得る。この式を m_1 について解くと，$m_1=(\bar{v}-\bar{c})m_0/\bar{c}$ となる。

同様に，$n>1$ のとき，状態 q_n において，「買い手は価格 p_n を提案すること」と「価格 p_{n-1} を提案すること」が無差別でなければならない。価格 p_n は $(q_n, q_{n-1}]$ に入るすべての売り手のタイプによって受諾され，価格 p_{n-1} は $(q_n, q_{n-2}]$ に入るすべての売り手のタイプによって受諾される。つまり，

$$R(q_n)=(\underline{v}-p_n)m_n+\delta R(q_{n-1}) \tag{6}$$

$$=(\underline{v}-p_{n-1})m_n+R(q_{n-1}) \tag{7}$$

となる。これより，

$$(1-\delta)R(q_{n-1})=(p_{n-1}-p_n)m_n \tag{8}$$

となる。

(8)は次のような解釈ができる：p_n を提案するよりも p_{n-1} を提案することで買い手は1期間早く継続余剰である $R(q_{n-1})$ をえることができる利点がある。一方で，$(q_n, q_{n-1}]$ に入る売り手に対して $p_{n-1}-p_n=(1-\delta)\,p_{n-1}$ を失

う。均衡の構成より，取引を早くすることからの利得とそうすることでの損失がバランスしていなければならない。

$n-1$ 期から n 期の価格減少は $(1-\delta)p_{n-1}$ に等しいので，（８）は，

$$R(q_{n-1})=p_{n-1}m_n \tag{9}$$

と書き換えることができる。（９）は，買い手の n 期の期待支払いが割り引かれた継続利得と等しい，つまり，$p_n m_n=\delta R(q_{n-1})$，と解釈できる。したがって，（７）から，各期 $(n>1)$ において買い手の期待総利得がその期に生み出される期待社会余剰と等しいことになるので，

$$R(q_n)=\underline{v}m_n \tag{10}$$

となる。(10)を（８）に代入すれば，取引を早めることで得られる純便益がないことを，次の m_n についての無差別条件に変換できる。つまり，

$$m_n=\frac{\underline{v}}{\overline{c}\delta^{n-1}}m_{n-1} \tag{11}$$

となる。$\rho=\underline{v}/\overline{c}$ と定義すると，差分方程式は，境界条件 $m_1=(\overline{v}-\overline{c})m_0/\overline{c}$ を使えば，前向きに帰納的に解けて，

$$m_n=\rho^{n-1}\delta^{-(n(n-1))/2}m_1=\rho^{n-1}\delta^{-(n(n-1))/2}\frac{(\overline{v}-\overline{c})m_0}{\overline{c}} \tag{12}$$

となる。(12)の解を $m_n(\delta)$ と書くことにして，$N(\delta)=\min\{n:\sum_{i=0}^{n}m_i(\delta)\geq -1\}$ とする。ここでは，ジェネリックに考えることにして，$\sum_{i=0}^{n}m_i(\delta)>1$ が成り立っているとする。すると，解について次のようにまとめることができる。

命題 1．$v(\cdot)$, $c(\cdot)$ は（*4*）で与えられるとする。さらに，$0<q_{N-1}<\cdots<q_0=\hat{q}$ は(*11*)で再帰的に定義され，p_n は（*5*）で定義されるとする。このとき，すべての $\delta<1$ に対して，一意の定常的な 3 つの組が以下のように与えられる。

$$P(q)=p_n,\ q\in\begin{cases}[0,\ q_{n-1}], & \text{if}\quad n=N,\\ (q_n,\ q_{n-1}], & \text{if}\quad n=0,\ 1,\ \ldots,\ N-1;\end{cases}$$

$$t(q)=q_{n-2},\ q\in\begin{cases}[0,\ q_{n-1}], & \text{if}\quad n=N,\\ (q_n,\ q_{n-1}], & \text{if}\quad n=2,\ 3,,\ \ldots,\ N-1,\\ (q_1,\ 1], & \text{if}\quad n=1;\end{cases}$$

$$R(q)=\int_q^{q_{n-1}}(v(z)-p_{n-1})dz+\delta R(q_{n-2}),$$

$$q\in\begin{cases}[0,\ q_{n-1}], & \text{if}\quad n=N,\\ (q_n,\ q_{n-1}], & \text{if}\quad n=2,\ 3,,\ \ldots,\ N-1,\\ (q_1,\ 1], & \text{if}\quad n=1.\end{cases}$$

命題１にそって，買い手は p_{N-1} を提案することから始め，この価格は $[0,\ q_{N-2}]$ に入るすべての売り手タイプが受諾する。拒否された場合，買い手は p_{N-2} に提案価格を上昇させ，この価格は $(q_{N-2},\ q_{N-3}]$ に入るすべての売り手タイプに受諾される。このようなかたちで，状態が q_0 に至るまで続いていく。そして，状態 q_0 では買い手は最終提案 $p_0=\bar{c}$ を行う。結果として，交渉は $N(\delta)$ 期まで続くことになる。

次に，$\delta\to1$ としたときの上の解の考察をする。まず，$\rho=\underline{v}/\bar{c}\geq1$ の場合を見る（このケースは私的価値ケースも含む）。$\rho\geq1$ は，$\underline{v}>\bar{c}\delta^n=p_n$ がすべての $n\geq1$ について成り立つことを意味する。つまり，任意の時点で買い手は常に，もし p_n を受諾したら，正の余剰を得られることを予想する。終点から後ろ向きに解いていくところで見たように，買い手の期待割引余剰は増加していく。つまり，$R(q_n)-R(q_{n-1})>0$ である。買い手は，継続価値の受け取りの遅れと増加価格による価格差別による利得のトレードオフに直面しているので，買い手は，n が増加するにつれて，価格差別を嫌うことになる。つまり，受諾確率は交渉過程の初期の段階でより高くなる。記号で表すと，すべての $n>1$ に対して $m_n>m_{n-1}$ となる。この不等式は，交渉ラウン

ドの数 $N(\delta)$ が有限で δ に関して一様有界であることを意味する。このことからコース推測が成立することになる。なぜなら，交渉が多くても $\hat{N}$ ラウンドで終わるのであれば，初期価格は $\delta^{\hat{N}-1}\bar{c}$ より低くならないことになり，$\delta\to1$ をとれば，$\bar{c}$ に収束することになる。

次に $\rho<1$ の場合を考えよう。$\rho<1$ のもとでは，δ が十分に 1 に近いときに，$\underline{v}<\bar{c}\delta^n$ となるような整数 $n\geq1$ が存在する。そのような n では，買い手は売り手が提案 p_n を受諾したときには，負の余剰を得ることになると予想する。状態 q_0 からバックワードに議論をすすめていくと，不等式 $\underline{v}<\bar{c}\delta^{n-1}$ が維持される限り，買い手の期待利潤は n の減少関数になる。買い手は価格上昇による価格差別の利益と継続価値の受け取りの遅れのトレードオフに直面するので，買い手は n が増加するにつれてより強く価格差別しようとすることになる。これは事前の受諾確率 m_n が n の減少関数になることで反映される。重要なのは，δ が 1 に近くなると，$\underline{v}<\bar{c}\delta^{n-1}$ が成立する期間の数が（上界なしに）増加することである。この結果として，極限をとっても，合意の遅れが起こるかもしれないことになる。

合意の遅れが起こるかどうかを見るために，$\delta\to1$ をとったときに，後ろ向きの均衡構築がどこまで可能になるかを計算してみよう。まず，$q^*=1-\sum_{i=0}^{\infty}m_i(1)=1-m_0-m_1(1+\rho+\rho^2+\cdots)$ とする。$q^*<0$ であれば，$\hat{N}=\min\{n:\sum_{i=0}^{n}m_i(1)\geq1\}$ を定義できる。そうすると交渉は割引因子に関係なく $\hat{N}$ 以上は続かない。そうするとコース推測は成立することになる。次に，$q^*=0$ であれば，交渉のラウンドの数は，任意の $\delta<1$ に対して有限となる。しかし，$\delta\to1$ のとき，上限（上界）なく交渉ラウンドの数は増加する。にもかかわらず，命題 2 で示すように，この場合もコース推測は成立する。少し計算をすると条件 $q^*\leq0$ と $E(v)\geq\bar{c}$ が同値であることを示すことができる。つまり，$E(v)\geq\bar{c}$ が，2 タイプモデルでコース推測が成立することとの同値の条件になる。

それでは，$q^*>0$ の場合を見ていこう。このとき，極限で，q^* のところで後ろ向きの均衡構築がうまくいかなくなる。この理由は非常に自然である。q^* の定義より，任意の $q>q^*$ に対して，任意の $\delta<1$ で $\sum_{i=0}^{n} m_i(\delta)\geq 1-q$ となるような $n<\infty$ が存在する。任意のそのような状態においては，δ に関係なく，買い手が最終提案をするまでに n 期以下しかかからない。つまり，任意の状態 $q>q^*$ に対して，コース推測が適用できて，買い手の極限をとったところでの期待余剰は $\tilde{R}(q)=E[v(z)-\overline{c}|z\geq q]$ となる。買い手は $(q^*, \hat{q})$ に入るすべての取引では，$\overline{c}-\underline{v}$ の期待損失を被り，$(\hat{q}, 1)$ に入るすべての取引において，$\overline{v}-\overline{c}$ に期待利得を得る。q^* は区間 $(q^*, \hat{q})$ での買い手の損失と区間 $(\hat{q}, 1)$ での買い手の利得を等しくする点である。言い換えると，買い手の極限の期待余剰は，q^* においてゼロになる。つまり，$\tilde{R}(q^*)=0$ となる。結果として，極限で買い手の取引を急ぐ誘因は，q^* でゼロになる。

事実，合意の遅れは状態 q^* において起きる必要がある。買い手は $q<q^*$ のタイプと取引することから，$p\leq\underline{v}$ の価格で取引することによって利益を得ることを予想できる。これらのタイプは最終提案の $\overline{c}$ まで待つよりもすぐに p を受諾することを好む。このことは遅れをもたらすことになる。費用が 0 である売り手は，提案 $\underline{v}$ をすぐに受諾することと提案 $\overline{c}$ を受け取るまで τ 期間待つことは無差別である。つまり，$\underline{v}=e^{-r\tau}\overline{c}$ である。$p\leq\underline{v}$ なので，遅れは少なくとも τ 期間続かなければならいことになる。

直感的には，遅れ全体は厳密に τ をこえなければならないことは簡単に分かる。実際，価格列が低評価の買い手の評価額を横切る，つまり，$p_{\hat{n}}\geq\underline{v}>p_{\hat{n}+1}$，となる $\hat{n}(\delta)$ を考える。そのとき，買い手の期待余剰 $R(q_{\hat{n}})$ は非常に小さくなければならない。そのことが $n<\hat{n}$ 期間の遅れを正当化することになる。$n>\hat{n}$ 期間では，$R(q_n)$ は相変わらず小さいままである（このときは長期の遅れがもたらされる）か，または，$R(q_n)$ がコース推測が働くレベルまで大きくなる（この場合は，p_n が $\underline{v}$ より十分低くなることが必要となる）。

また，状態 q^* での合意の遅れを明示的に示すことができる。詳細は省略するが，合意の遅れについての結果をまとめると次のような命題を得られている。

命題 2．コース推測が得られることの必要十分条件は $E(v) \geq \bar{c}$ である。ここで，$q^* = (\bar{c} - E(v))/(\bar{c} - \underline{v})$，および，$\rho = \underline{v}/\bar{c}$ とする。このとき，$E(v) < \bar{c}$ で，δ が 1 に収束するとき，$[0, q^*)$ に入るすべての売り手のタイプは価格 $p^* = \bar{c}\rho^2$ ですぐに取引をし，$(q^*, 1]$ に入るすべての売り手のタイプは，$e^{-rT} = \rho^2$ となるような T 期間の遅れの後，価格 $\bar{c}$ で取引を行う。

1.3　存在と一意性

ここでは，提示した交渉ゲームモデルの定常均衡の存在と一意性を示す。まず，一意の定常トリプレット $(R(\cdot), t(\cdot), P(\cdot))$ の存在とすべての逐次均衡結果がある定常均衡の結果（outcome）で表されることとを示す。このことを示すために，仮定 1 に加えて，売り手の費用関数について，次の $q=1$ におけるリプシッツ条件を課す。

仮定 2．すべての $q \in [0, 1]$ に対して $c(1) - c(q) \leq L(1-q)$ となるような $L < \infty$ が存在する。

定理 1（Deneckere and Liang（2006））．仮定 *1, 2* が満たされると仮定する。このとき，任意の $\delta < 1$ に対して，$[0, 1]$ 上で一意の定常トリプレット $(R(\cdot), t(\cdot), P(\cdot))$ が存在し，かつ，すべての逐次均衡結果は，ある定常均衡の結果によって表される。さらに，$N(\delta)$ 期で確率 1 で交渉が終了することになるような $N(\delta) < \infty$ が存在する。

証明しようとする定理 1 は，Gul, Sonnenschein and Wilson（1986）の結果の相互価値ケースへの一般化である。定常トリプレットの一意性を確立する際の重要なステップは，任意の逐次均衡において，状態が q_1 を超えているときにはいつも，買い手がすべての残りの売り手タイプが受諾するような

提案を行わなければならないようになる状態$q_1(<1)$という臨界点が存在することを示すことである。このことが示されれば，区間$(q_1, 1]$上の定常トリプレット(R, t, P)が一意に定まることになる。その後は，状態についてのバックワードインダクションを，関数方程式(2)(3)を用いて逐次的に行っていくことでトリプレット(R, t, P)が全体の領域$[0, 1]$に一意に拡張されることになる。ただし，この証明において克服しなければならない困難は，任意の状態qからの区間の拡張のサイズが買い手の期待余剰$R(q)$に比例していることである。私的価値の場合は，$R(q)$はqの減少関数であるので，拡張のサイズは終端状態（terminal state）からバックワードにすすめていくにつれて増加する。そうすると区間拡張の過程が有限回のステップで終わることになる。しかしながら，評価が正に相関していると，$R(q)$はある区間でqに関して増加しているかもしれず，その場合，区間の拡張の手続きが終了しない可能性が存在することになる。

この困難を解決するために，論文では次のようなことが行われている。まず，均衡余剰と$R(q)$が一致している定常トリプレットを構成する。この$R(q)$は区間$[0, q_1]$においてゼロを下界にもつ。この構成されたトリプレットでは拡張手続きが状態がゼロになる前で止まってしまうことがないので，各拡張のステップを，その長さが交渉の期間と一致するようなかたちで，最大にとることができる。もう少し正確に言うと，任意の$n>1$に対して，買い手が$(q_n, 1]$区間に入る売り手タイプが受諾する提案を選択するようなq_{n+1}以下の状態が存在しないようなカットオフ水準$\{q_n\}$の減少列が存在する。この拡張が最大であるという性質を使うことで，$q\to 1$の極限をとったときの均衡の特徴づけがうまくできることになる。

それでは，具体的に，定理1の証明に入っていくことにする。ただし，Deneckere and Liang (2006) に掲載されている証明は非常に長いので，ここでは証明をすべて紹介することは行わない。証明はいくつかの補題から成

り立っているが，いくつかの補題については証明を省略して，補題の内容のみを紹介する。一方，定常トリプレット $P(\cdot), R(\cdot), t(\cdot)$ の具体的な構成方法は非常に有用なので，それを示す補題は詳しく紹介する。また，私的価値ケースと共有価値ケースで証明が異なる部分についても詳しく紹介することにする。

定理 1 の証明：$[0, 1]$ 上の定常トリプレット $\{P(\cdot), R(\cdot), t(\cdot)\}$ の存在を示す。

まず，補助的な結果を導出しておく。任意の状態 $q<1$ からスタートする１期間の交渉問題を考える。１期間のため買い手の提案は最後の提案となるので，売り手の留保価格は保有している財の費用となる。つまり，買い手は

$$\pi(y\,;q)=\int_q^y(v(z)-c(y))dz$$

を最大化する $y\in[q, 1]$ を選ぶことになる。次の補題 2 は，q が十分 1 に近ければ，１期間の交渉問題において，買い手はすべての残っている売り手タイプが受諾するような提案を行うことを意味している。

補題 2. 仮定 *1, 2* が満たされるとする。このとき q_1 より大きいすべての q に対して $y=1$ を $\pi(y\,;q)$ の一意の最大化解とし，q_1 より小さいすべての q に対して $y=1$ を $\pi(y\,;q)$ の最大化解としないような q_1 が存在する。

補題 2 の証明は，省略するが，証明の中で行っていることを簡単に述べておくと次のようになる。買い手が $y<1$ から限界的に状態（state）を上げたときに，受諾確率が上がることによって得られる期待利得の増加と状態（state）を上げることでこれまで受諾していたすべての買い手タイプがより高い提案をうけることになる費用を比較し，q が 1 に非常に近くなれば，売り手タイプの数が小さくなり，状態（state）を上げることで買い手は利益が出やすくなる，つまりは，$y=1$ まで上げた方が買い手にとって良い，ということになる。その結果，補題 2 が成立することになる。

次の補題3で用いる区間 $[q_1, 1]$ 上の定常トリプレットは次のようにする。

$$R(q)=\max_{y\geq q}\int_q^y(v(z)-c(y))dz, \tag{13}$$

$$t(q)=\min\arg\max_{y\geq q}\int_q^y(v(z)-c(y))dz,$$

$$P(q)=(1-\delta)c(q)+(1-\delta)\delta c(t(q))+\delta^2 c(1).$$

補題2によって，$q\geq q_1$ のとき，$R(q)=\pi(1;q)$ と $t(q)=1$ となる。さらに，もし均衡から外れて，売り手が価格 $p<c(1)$ を提案されたならば，売り手は買い手に次の期に価格 $c(1)$ の提案が返されることを予想し，そこから，(13)で示されているように $p\geq(1-\delta)c(q)+\delta c(1)$ であるならば，p を受諾することになる。もし，$t(q_1)=1$ であるならば，$q=q_1$ で同じ議論を適用することができる。一方，$t(q_1)<1$ であるならば，(3)を適用し，$t(q_1)>q_1$ であることを用いれば，$P(q_1)$ について(13)で書かれている式が得られることになる。この(13)の定常トリプレットに関して，さらに次の補題が得れられる。

補題 3. (*13*)で定義されるトリプレットを考える。このとき，すべての $q\in[q_1, 1)$ に対して

$$R(q)=\max_{y\geq q}\left\{\int_q^y(v(z)-P(y))dz+\delta R(y)\right\}>0$$

となり，

$$t(q)=\min\arg\max_{y\geq q}\left\{\int_q^y(v(z)-P(y))dz+\delta R(y)\right\}$$

となる。

この補題の内容は，仮定1と(13)での定義，および，補題2を考慮すれば自然に導かれる。ここで注目しておくべきことはすべての $q\in[q_1, 0)$ において $R(q)>0$ であることと，$R(q)$ が再帰方程式のようなかたちで表現されるていることである。

$R(q)>0$ は，補題4で重要な役割を果たすので，その証明だけ挙げてお

く。まず，$q \in [q_1, 1)$, $w = \liminf_{\varepsilon \to 0} v(q+\varepsilon)$, $c = \lim_{\varepsilon \to 0} c(q+\varepsilon)$ とする。ただし，極限をとる際に，εは 0 への減少列をとっているとする。仮定 1 によって，$w \geq c + \Delta$ となる。結果として，すべての $q' \in (q, q+\varepsilon)$ に対して，$v(q') > c(q+\varepsilon)$ となる $\varepsilon > 0$ が存在する。$R(\cdot)$ の定義を考慮すれば，$R(q) > 0$ を導くことができる。

そして，次の補題で補題 2，補題 3 で定義されたトリプレット$\{P(\cdot), R(\cdot), t(\cdot)\}$ を区間 $[0, 1]$ に拡張できることが示される。

補題 4. すべての $q \in [0, 1)$ に対して $R(q) > 0$ を満たすような区間 $[0, 1]$ 上の定常トリプレット $\{P(\cdot), R(\cdot), t(\cdot)\}$ が存在する。

この補題の証明は後ろ向き帰納法にそったかたちで定常トリプレットを構築していくことが可能であることを示すとともに，その手続きを有限回行うことで状態 $0(q=0)$ に到達することを示している。実際に均衡を構築していく上でもこの補題の証明は重要な手続きを提示している。さらに，共有価値ケース特有の考察部分もあるので，少し煩雑であるが，証明の詳細を紹介しておくことにする。

補題 4 の証明：数学的帰納法を用いる。すべての $q \in [q_n, 1)$ に対して $R(q) > 0$ を満たす区間 $[q_n, 1]$ 上の定常トリプレットがあたえられているとして，状態 $q_{n+1} < q_n$ で，かつ，より大きな区間 $[q_{n+1}, 1]$ に，$[q_{n+1}, 1)$ 上で $R(q) > 0$ という性質を保存しつつ，トリプレットを拡張する。

$q \in [0, 1]$ に対して，$R_1(q)$ は，区間 $[q_n, 1]$ に入る状態を選択するという制約がある下での買い手の最大利潤とし，$\mathcal{Y}_1$ はそれに対応する最大化をもたらす解の対応を表すことにする。つまり，

$$R_1(q) = \max_{y \in [q_n, 1]} \int_q^y (v(z) - P(y))dz + \delta R(y),$$

$$\mathcal{Y}_1(q) = \arg\max_{y \in [q_n, 1]} \int_q^y (v(z) - P(y))dz + \delta R(y)$$

とする。$R_1(\cdot)$ は，$P(\cdot)$ が $[q_n, 1]$ 上で左連続関数であるので，ちゃんと定義（well defined）されており，また，目的関数はすべての最大化している y において，q に関して厳密に差分が増加的（increasing differences）であるので，対応 $\mathcal{Y}_1(q)$ は非減少関数となる。さらに，$q\in[0, 1]$ において，受諾の境界価格を与える関数が，$P_1(q)=(1-\delta)c(q)+\delta P(t_1(q))$，ただし，$t_1(q)=\min \mathcal{Y}_1(q)$，で与えられる。

次に $q\in[0, q_n]$ において，$R_2(q)$ を，$[q, q_n]$ に入っている状態を選択するという制約の下での買い手の最大利潤を表すとする。つまり，

$$R_2(q)=\max_{y\in[q,\, q_n]}\int_q^y (v(z)-P_1(y))dz+\delta R_1(y),$$

$$\mathcal{Y}_2(q)=\arg\max_{y\in[q,\, q_n]}\int_q^y (v(z)-P_1(y))dz+\delta R_1(y),$$

さらに，$t_2(q)=\min \mathcal{Y}_2(q)$，とする。加えて，$R_1(q)\leq R_2(q)$ を満たす q が存在すれば，$q_{n+1}=\max\{q\in[0, q_n]: R_1(q)\leq R_2(q)\}$ と定義し，存在しなければ，$q_{n+1}=0$ とする。定義より，$q_{n+1}<q_n$ となる。実際，$R(q_n)=R_1(q_n)>0$ であるので，$R_2(q_n)=\delta R_1(q_n)<R_1(q_n)$ となる。最大値定理より，R_1 と R_2 は，連続関数となる。q_{n+1} の定義より，すべての $q>q_{n+1}$ に対して，$R_1(q)>R_2(q)$ となる。

さらに，すべての $q\leq q_{n+1}$ に対して，$R_2(q)\geq R_1(q)$ を示そう。実際，$t_1(q)\geq q_n\geq t_2(q)$ であり，関数 $P_1(\cdot)$ は非減少関数であるので，ほとんどすべての $q\leq q_{n+1}$ に対して，

$$R_1'(q)=-v(q)+P_1(t_1(q))\geq -v(q)+P_1(t_2(q))=R_2'(q)$$

を得る。ここで，$R_1(q_{n+1})=R_2(q_{n+1})$ であるので，すべての $q\leq q_{n+1}$ において $R_1(q)\leq R_2(q)$ が示せたことになる。

すべての $q\in[q_{n+1}, 1]$ に対して，もし $q>q_{n+1}$ ならば，$P(q)=P_1(q)$, $R(q)=R_1(q)$, $t(q)=t_1(q)$ と定義し，$t(q_{n+1})=t_2(q_{n+1})$ と定義する。この (P, t, R)

が $[q_{n+1}, 1]$ 上の定常トリプレットであることを示そう。このことを示すためには，任意の $q \in [q_{n+1}, q_n)$ に対して，$R_1(q) = \max_{y\in[q,1]} \int_q^y (v(z) - P(y))dz + \delta R_1(y)$ であることを示す必要がある。しかし，この等式が成り立たないとすると，$R_2(q) > R_1(q)$ となり，$q \geq q_{n+1}$ であることに矛盾することになる。

また，$q > q_{n+1}$ であるなら，$R_1(q) > R_2(q)$ であるので，$t(q) > q_n$ となり，$q \leq q_{n+1}$ であるならば，$t(q) \leq t(q_{n+1}) = t_2(q_{n+1}) \leq q_n$ より，$t(q) \leq q_n$ が得られる。

次に，すべての $q \in [q_{n+1}, q_n]$ に対して $R(q) > 0$ であることを示そう。まず，$\bar{t}(q) = \max \mathcal{Y}(q)$ とし，ε を $q+\varepsilon \in (q, \bar{t}(q))$ を満たすものとする。$\bar{t}(q)$ は，状態 $q+\varepsilon$ から実現可能なので，$R(q+\varepsilon) \geq \int_{q+\varepsilon}^{\bar{t}(q)} (v(z) - P(\bar{t}(q)))dz + \delta R(\bar{t}(q))$ となり，$R(q) = \int_q^{\bar{t}(q)} (v(z) - P(\bar{t}(q))dz + \delta R(\bar{t}(q))$ であるので，

$$R(q+\varepsilon) \geq R(q) - \int_q^{q+\varepsilon} (v(z) - P(\bar{t}(q)))dz \tag{14}$$

となる。$q+\varepsilon$ は状態 q から実現可能であるので，

$$R(q) \geq \int_q^{q+\varepsilon} (v(z) - P(q+\varepsilon))dz + \delta R(q+\varepsilon) \tag{15}$$

となる。(15)を(14)に代入すると，

$$\begin{aligned}(1-\delta)R(q) &\geq \int_q^{q+\varepsilon} ((1-\delta)v(z) - P(q+\varepsilon) + \delta P(\bar{t}(q)))dz \\ &\geq \int_q^{q+\varepsilon} ((1-\delta)(v(z) - c(q+\varepsilon)) \\ &\qquad - \delta(P(t(q+\varepsilon)) - P(\bar{t}(q)))))dz \end{aligned} \tag{16}$$

となる。補題 3 で見たように，積分の第 1 項は，十分小さな ε に対して 0 を下界にもつことになる。したがって，ε を減少列でとったときの極限 $\lim_{\varepsilon\to 0} (P(t(q+\varepsilon)) - P(\bar{t}(q))) = 0$ であれば，$R(q) > 0$ を示すことができる。$\mathcal{Y}(q)$ が非減少の連続対応であるので，$\lim_{\varepsilon\to 0} t(q+\varepsilon) = \bar{t}(q)$ となる。したがって，上記の等式が成り立たなくなるのは，$P(\cdot)$ が $\bar{t}(q)$ で不連続のときだけで

ある。しかしながら，もしそうであるならば，十分小さな ε のとき $t(q+\varepsilon)=\bar{t}(q)$ である必要があるし，そうでない場合は，買い手は状態 $q+\varepsilon$ のとき $\bar{t}(q)$ を選択することになる。それによって，価格は不連続に低下し，利潤が増加することになる。

最後に，q_{n+1} が 0 に到達する前に有限回の拡張だけで十分なことを示そう。背理法の仮定として，$\lim_{n\to\infty}q_n=q_\infty>0$ であるとする。$P(q_n)=(1-\delta)\sum_{j=0}^{n}(\delta^{n-j}c(t^{n-j}(q_n))+\delta^{n+1}c(1)$ であるので，この場合 $\lim_{n\to\infty}P(q_n)=c_+(q_\infty)$，ただし，$c_+(q)$ は $c(q)$ の右側極限，でなければならない。仮定 1 より，ある $N>0$ が存在して，すべての $n>N$ とすべての $q\in(q_\infty, q_N]$ に対して，$0<v(q)-P(q_n)<\bar{v}$ となる。ただし，$\bar{v}=\sup\{v(q):q\in[0, 1]\}$ である。今，$\varepsilon=(1-\delta)R(q_N)/\bar{v}$ とする。ここで，すべての $n>N$ に対して，$q_n-q_{n+1}\geq\varepsilon$ となることを示すことによって，$\{q_n\}$ が q_∞ に収束することに矛盾することを示す。まず，

$$
\begin{aligned}
R(q_{n+1})=&\int_{q_{n+1}}^{t(q_{n+1})}(v(z)-P(t(q_{n+1}))dz+\delta R(t(q_{n+1}))\\
&\leq\bar{v}(q_n-q_{n+1})+\delta R(t(q_{n+1}))\\
&\leq\bar{v}(q_n-q_{n+1})+\delta R(q_{n+1})
\end{aligned}
$$

となる。最後の不等式は，すべての $q\in[q_\infty, q_N]$ に対して $v(q)-P(q_N)>0$ であり，関数 $R(q)$ が $q\in[q_\infty, q_N]$ において q の減少関数であることから得られる。実際，もし $q'>q$ であるならば，$R(q)\geq\int_q^{t(q')}(v(z)-P(t(q')))dz+\delta R(t(q'))=R(q')+\int_q^{q'}(v(z)-P(t(q')))dz>R(q')$ となる。したがって，

$$
q_n-q_{n+1}\geq\frac{(1-\delta)R(q_{n+1})}{\bar{v}}\geq\frac{(1-\delta)R(q_N)}{\bar{v}}=\varepsilon
$$

となる。ただし，最後の不等式は，$R(\cdot)$ の $[q_\infty, q_N]$ 上での単調性を使っている。これで，背理法の仮定が矛盾を導くことが分かり，目標が達成されたことになる。 □

次に，上で与えられた定常トリプレットが一意であることを証明できる。補題５は，状態が q_1 を超えていて，さらに，１期以上交渉期間が残っているときには，任意の逐次均衡において，買い手は最終提案 $p=c(1)$ を提案して，市場をクリアすることを示している。

補題 5． 仮定 *1, 2* が満たされるとする。このとき，すべての逐次均衡において，買い手が手番となり，状態が $q>q_1$ となっている任意の履歴の後では，買い手は $c(1)$ を提案し，すべての売り手タイプは受諾する。

この補題５の証明は省略する。

$\overline{q}\in(q_1, 1)$ とする。補題５は，任意の逐次均衡において，状態 q が $(\overline{q}, 1]$ に属するとき，買い手の期待余剰は $R(q)=\max_{y\geq q}\int_q^y(v(z)-c(y))dz$ を満たし，その政策関数は $t(q)=1$ で与えられることを意味している。

均衡の記述を完成するために，彼らはいくつかの概念を定義している。

定義 1． 非減少関数 $P:[q, 1]\to\mathbb{R}_+$ **が留保価格関数**であるとは，任意の逐次均衡において，売り手の手番で，買い手が価格 p を提案した任意の履歴のすぐ後は，すべての売り手タイプ $r'<r$ は，$p>P(r)$ のとき受諾するものになっていることを意味する。さらに，すべての売り手タイプ $r'\geq r-\varepsilon$ が $p<P(r)$ のときには提案を拒否するような $\varepsilon>0$ が存在する。

そうすると，留保価格関数について次の補題が得られる。

補題 6． 関数 $P(q)=(1-\delta)c(q)+\delta c(1)$ は，区間 $[\overline{q}, 1]$ 上の留保価格関数である。

この補題６の証明も省略する。

定義 2． 区間 $[q, 1]$ 上の定常トリプレット $\{P(\cdot), R(\cdot), t(\cdot)\}$ が，次のような条件を満たすならば，**特性**（*UE*）**をもつ**という。その条件とは，任意の逐次均衡において，買い手が提案を行う手番となる任意の履歴の後は，区間 $[q, 1]$ に入る売り手タイプは，留保価格関数にそって受諾をすることを意味している。一方，状態が $q'\in[q, 1)$ であるとき，買い手の期待余剰は $R(q')>$

0を満たし，買い手は集合 $\mathcal{Y}(q')=\arg\max_{y\in[q',1]}\int_{q'}^{y}(v(z)-P(y))dz+\delta R(y)$ から初期状態 r_1 を（ランダムに）選択し，次に続く状態は $r_k=t(r_{k-1})$ で与えられ，すべての期の価格は，$p_k=P(r_{k+1})$ で与えられる。

補題5と補題6によって，$[\overline{q},1]$ 上の定常トリプレット $\{P(\cdot),R(\cdot),t(\cdot)\}$ は，特性（UE）を満たすことが分かる。次の補題は，特性（UE）を満たす任意のトリプレットが，より広い区間で特性（UE）を満たすような定常トリプレットに拡張できることを示している。さらに，拡張された区間の長さは，定数 $\eta=((1-\delta)d)/(2c(1))$，ただし，$d=\min_{q\in[0,\overline{q}]}R(q)$，で下に有界となる。この結果，拡張を有限回行えば，$[0,1]$ 上の定常トリプレット $\{P(\cdot),R(\cdot),t(\cdot)\}$ が特性（UE）を満たすことになり，証明が完了することになる。

最後の補題を証明なしで挙げておく。

補題7. $\{P(\cdot),R(\cdot),t(\cdot)\}$ を特性（*UE*）を満たす区間 $[q,1]$ 上の定常トリプレットとする。さらに，$q'=\max\{0,q-\eta\}$ とする。このとき，定常トリプレット $\{P(\cdot),R(\cdot),t(\cdot)\}$ は区間 $[q',1]$ 上で特性（*UE*）を満たす。

これで定理1の証明は終了となる。

定理1は交渉が有限期間で終わることを保証しているが，私的価値モデルの場合と大きな違いが存在している。私的価値の場合は，割引因子が1に近づくにつれて交渉ラウンドの数が上に有界であり続けるが，相互価値の場合には，この性質は一般的には保証されない。割引因子が1に近づくと交渉の合意の遅れがほとんどなくなるというコース推測は，補題1が示すように $E(v(q))<c(1)$ のときには成り立たないことになる。

もうひとつの結果である定常均衡の存在については，もっと弱い条件のもとで示すことができる。具体的には仮定2は不要で，仮定1も次のもっと弱い条件に置き換えることができる。

仮定3. すべての $q\in[0,1]$ に対して，$v(q)\geq c(q)$ が成り立つ。

定理 2（Deneckere and Liang (2006)). 仮定 *3* が満たされるとする。このとき，定常均衡が存在する。

定理 2 の証明はかなり煩雑であるが，均衡の存在は議論を行う上で最も基本となるものであるので，正確に紹介することにする。

定理 2 の証明：まず，$\Delta_k>0$ であり，0 に収束していく減少列 $\{\Delta_k\}_{k\in N}$ と $q_k<1$ であり，1 に収束する増加列 $\{q_k\}_{k\in N}$ を考える。任意の k に対して，$v_k(q)=v(q)+\Delta_k$ と定義し，$q\leq q_k$ では $c_k(q)=c(q)$，一方，$q>q_k$ では $c_k(q)=c(q_k)+(c(1)-c(q_k))/(1-q_k)$ と定義する。この評価関数 $\{v_k(\cdot), c_k(\cdot)\}$ をもつゲームが定理 1 の仮定を満たし，定常トリプレット $\{R_k, P_k, t_k\}$ を持つことは容易に確認できる。

［0, 1］はコンパクトであるので，（後で詳しく説明する）**プロホロフ**（*Prohorov*）の定理から列 P_k は弱収束部分列をもつ。この部分列をとり，インデックスの番号をふりなおすと，元の列 $\{P_k\}$ が弱収束すると仮定しても一般性を失わない。つまり，P_k は左連続な非減少関数 $P(q)$ に分布の意味で収束する。つまり，すべての点 q において $P_k(q)\to P(q)$ となり，$P(\cdot)$ が連続，となる。

次に，各 R_k が，リプシッツ定数を $\bar{v}+c(1)+\Delta_k$ とした上で，リプシッツ連続であることを示す。各 $R_k(\cdot)$ は連続で，左微分 $R_k^-(q)=\lim_{\varepsilon\to 0}(R_k(q)-R_k(q-\varepsilon))/\varepsilon=-(v_k(q)-P_k(t_k(q)))$ が存在し，上界 $\bar{v}+c(1)+\Delta_k$ を持つ。平均値の定理を考慮すれば，任意の 2 つの値 $x_1, x_2\in[0, 1]$ に対して，

$$|R_k(x_1)-R_k(x_2)|\leq(\bar{v}+\Delta_k+c(1))|x_1-x_2|$$

となる。これは，R_k がリプシッツ定数 $\bar{v}+c(1)+\Delta_k$ でリプシッツ連続であることを意味する。

このことは $\{R_k\}$ が関数族として同程度連続（equicontiuous）であることを意味する。したがって，$\{R_k\}$ は連続な極限 R に一様収束する部分列をもつ。必要ならばさらなる部分列をとることによって，元の列が R に収束す

るとみなすことができる。

ここで

$$J_k(q)=\max_{q'\geq q}\left\{\int_q^{q'}(v_k(z)-P_k(q'))dz+\delta R_k(q')\right\},$$

$$J(q)=\max_{q'\geq q}\left\{\int_q^{q'}(v(z)-P(q'))dz+\delta R(q')\right\}$$

とする。P_k は P に分布収束し，さらには，R_k は R に一様収束するので，Ausubel and Deneckere（1993）の**一般化された最大値定理**の前提を満たす。各 k に対して，$J_k=R_k$ となるので，$J(q)=\lim_{k\to\infty}R_k(q)=R(q)$ が従う。つまり，(2)が満たされる。

まだ，(3)が満たされることを示すことが残っている。まず，$t(\cdot)$, $P(\cdot)$, $P(t(\cdot))$ が連続となる任意の $q\in[0, 1)$ を考える。これらの関数がそれぞれ非減少関数であるので，多くともせいぜい加算個の q だけが除かれる。そのような q に対して，(3)が満たされなければならないことを示す。まず，最初に，q が $P(\cdot)$ の連続な点であるので，$\lim_{k\to\infty}P_k(q)=P(q)$ が得られる。次に，$c_k(\cdot)$ が $c(\cdot)$ に一様収束するので，$\lim_{k\to\infty}c_k(q)=c(q)$ となる。さらに，**一般化された最大値定理**は，$\{t_k(q)\}$ の任意の密集点が $\mathcal{Y}(q)$ に属することを意味する。$t(\cdot)$ が q で連続であることを所与とすると，$\mathcal{Y}(\cdot)$ は q で一値（single-valued）となり，さらに，$\lim_{k\to\infty}t_k(q)=t(q)$ となる。最終的に，p を列 $\{P_k(t_k(q))\}$ の任意の集積点とすると，$p=P(t(q))$ を示すことができる。まず，はじめに $p\geq P(t(q))$ を示す。r_ℓ を $t(q)$ に収束する減少列で，$P(\cdot)$ の連続な点での列，s_ℓ を $t(q)$ に収束する増加列で，$P(\cdot)$ の連続な点での列とする。すると，任意の ℓ に対して，すべての $k\geq N(\ell)$ で $t_k(q)\in(r_\ell, s_\ell)$ となるような $N(\ell)$ が存在する。結果として，すべての $k\geq N(\ell)$ について，$P_k(r_\ell)\leq P_k(t_k(q))\leq P_k(s_\ell)$ となる。r_ℓ と s_ℓ は，$P(\cdot)$ の連続な点たちであるので，$k\to\infty$ として極限をとれば，$P(r_\ell)\leq p\leq P(s_\ell)$ となる。$P(\cdot)$ の左連続性を利用して，ふたたび $k\to\infty$ として極限をとれば，$P(t(q))\leq p\leq$

$\lim_{s\to t(q)}P(s)$ を得ることができる。逆の $p\leq P(t(q))$ は背理法を用いて示すことにする。つまり，背理法の仮定として $p>P(t(q))$ を仮定する。この仮定が，十分大きな k に対して，$t_k(q)$ が買い手の利潤最大化を実現する選択であることに矛盾することを示す。実際，$\int_q^{r_\ell}(v(z)-P_k(r_\ell))dz+\delta R_k(r_\ell)-R_k(q)=\int_{t_k(q)}^{r_\ell}[v(z)-P_k(t_k(q))]dz+[P_k(t_k(q))-P_k(r_\ell)][r_\ell-q]+\delta[R_k(r_\ell)-R_k(t_k(q))]$ となる。ここで，$k=N(\ell)$ として，$\ell\to\infty$ をとると，上の式は $[p-P(t(q))][t(q)-q]$ に収束する。次に，$t(q)>q$ を示す。これが示されると，十分大きな ℓ に対して，選択 r_ℓ が選択 $t_{N(\ell)}(q)$ を支配することになり，望む矛盾が導かれることになる。背理法の仮定として，$t(q)=q$ を仮定する。もし，任意の $\varepsilon>0$ に対して，$t(q+\varepsilon)>t(q)$ とするなら，$P(t(q+\varepsilon))\geq t(q+\varepsilon)=t(q)$ となり，関数 $P(t(\cdot))$ の q での連続性に矛盾するので，$t(q+\varepsilon)=t(q)$ となるような $\varepsilon>0$ が存在する。今，$q'\in(q, q+\varepsilon)$ で，$t(\cdot)$ の連続点とする。そうすると，すべての k について $t_k(q')\geq q'$ であるので，$q=t(q')=\lim_{k\to\infty}t_k(q')\geq q'$ となり，矛盾が導かれる。したがって，$t(q)>q$ でなければならない。以上より，$\lim_{k\to\infty}P_k(t_k(q))=P(t(q))$ となる。

今，$\{P_k, R_k, t_k\}$ は定常トリプレットなので，各 k に対して，

$$P_k(q)-c_k(q)=\delta(P_k(t_k(q))-c_k(q))$$

となることが分かる。$k\to\infty$ として極限をとると，多くとも加算個の数の q を除いたすべての q に対して（3）が成立しなければならない。最後に，除かれた任意の $q\in[0, 1]$ をとり，q に収束する増加列 q_k で除かれなかった q_k の列を選択するとする。すべての k について（3）が成立し，関数 $P_k(\cdot)$, $c_k(\cdot)$, $P_k(t_k(\cdot))$ はすべて左連続であるので，$k\to\infty$ として極限をとると，（3）が q においても成り立つことが分かる。その結果，$\{P(\cdot), R(\cdot), t(\cdot)\}$ は，評価関数 $v(\cdot)$ と $c(\cdot)$ をもつゲームの定常トリプレットになることが示されたことになる。 □

2　一般化された最大値定理について

2.1　ベルジュの最大値定理

経済学では，消費者行動や生産者の行動を制約付き最大化問題として定式化するため，パラメータに関するその解の連続性や解を代入した目的関数の連続性は非常に重要な役割を果たす。その基礎となる数学の定理がベルジュ（Berge）の最大値定理（Theorem of the Maximum）である。競争均衡やナッシュ均衡点の存在を保証する不動点定理には写像の連続性は不可欠である。そのため，ベルジュの最大値定理は不動点定理と並んで経済学において最も有名な定理のひとつとなっている。よく知られているベルジュの最大値定理は，具体的には，次のような定理である。

定理 3 (Berge (1963)). X と Θ を位相空間とする。また，X は正規 (*regular*) 空間である。ここで，$f: X\times\Theta\to\mathbb{R}$ は連続関数，$\Gamma:\Theta\to X$ は，非空，凸値の連続対応とすると，

（i）　$M(\theta)=\max\{f(x,\theta): x\in\Gamma(\theta)\}$ で定義される関数 $M:\Theta\to\mathbb{R}$ は連続であり，

（ii）　$m(\theta)=\{x\in\Gamma(\theta): f(x,\theta)=M(\theta)\}$ で定義される対応 $m:\Theta\to X$ は，非空で，コンパクト値で，上半連続（*upper hemi-continuous*）である。

前節で見た不完備情報の交渉ゲームのモデルでは，各期のプレイヤーの利得は将来の相手のプレイヤーの行動に依存し，さらに，これらの行動は状態（カットオフタイプ）に上半連続的にしか依存しない。このような場合には，各期の利得は非連続関数になってしまう。さらには，売り手と買い手の行動を状態変数に連続的に依存するものだけに限定してしまうと，均衡が存在しなくなる可能性があるが，行動が状態変数に不連続であることを許せば，すべての分布関数に対して均衡が存在することになる。言い換えると，ベル

ジュの定理では制約を表す対応が連続である必要があるが，交渉ゲームモデルで考察している状況ではその要件を満たさない。そのため，上記のベルジュの最大値定理を適用することができない。しかし，均衡の存在のためには，最大値定理と同等の連続性を保証する定理が必要であるので，最大値定理を一般化することが要請されることになった。この要請に答えたのが，次に紹介する Ausubel and Deneckere（1993）の一般化された最大値定理である。

2.2　Ausubel and Deneckere（1993）による一般化

$(Y, \mathcal{Y})$ を位相空間とし，$\mathcal{P}_0(Y)$ を Y の非空のべき集合族とする。$\mathcal{P}_0(Y)$ 上の位相を定義していく。まず，任意の非空の Y の開集合 G に対して，

$$\{U \in \mathcal{P}_0(Y) : U \subset G\} = [\cdot, G]$$

で表される集合族を $\mathcal{U}$ とし，この $\mathcal{U}$ は位相の基底（base）となる。この基底 $\mathcal{U}$ で生成される位相を**上位相**（**upper topology**）と言い，$\mathcal{Y}_{\mathcal{U}}$ と表す。また，先ほど定義された $[\cdot, G]$ の補集合の族は

$$\mathcal{P}_0(Y) \setminus [\cdot, G] = \{V \in \mathcal{P}_0(Y) : V \cap (Y \setminus G) \neq \emptyset\}$$

で与えられる。その結果，基底となる閉集合（閉基）は，F を Y の閉集合として，$\{V \in \mathcal{P}_0(Y) : V \cap F \neq \emptyset\}$ のかたちで与えられる。そして，閉集合族

$$\{V \in \mathcal{P}_0(Y) : V \subset F\} = [\cdot, F]$$

によって生成される位相のことを**下位相**（**lower topology**）という。ここでは，$\mathcal{Y}_{\mathcal{L}}$ と表す。ここで，開集合族は，G を Y の任意の閉集合として，

$$\{U \in \mathcal{P}_0(Y) : U \cap G \neq \emptyset\}$$

で与えられる。このとき，$I_G = \{U \in \mathcal{P}_0(Y) : U \cap G \neq \emptyset\}$ として，$\mathcal{L} = \{I_G : G \in \mathcal{Y}\}$ とし，準基底（subbase）$\mathcal{L}$ によって生成される位相が下位相であると言い換えることができることに注意しておく。さらに，$\mathcal{P}_0(Y)$ 上の**ビートリス位相**（**Vietoris topology**）とは，$\mathcal{U}$ と $\mathcal{L}$ の両方で生成される位相のこ

とを言い，ここでは，$\mathcal{Y}_V$ と表す。

位相空間 X から Y への対応 g は，X からべき集合族 $\mathcal{P}_0(Y)$ への関数とみて，$\mathcal{Y}_u$ に関して連続な関数であるとき，g は**上半連続**（**upper semicontinuous**）といい，$\mathcal{Y}_\mathcal{L}$ に関して連続な関数であるとき，g は**下半連続**（**lower semicontinuous**）という。さらに，g が $\mathcal{Y}_V$ で連続な関数であるときは，g は**連続**（**continuous**）であるという。

$\mathbb{R}^{**}$ を拡張された実数空間 $\mathbb{R}\cup\{-\infty\}\cup\{+\infty\}$ として，区間 $[\infty, a), (a, b), (b, \infty]$ によって生成される位相を与えることにする。さらに，サブグラフ（subgraph）$E(\theta)=\{(x, y)\in X\times\mathbb{R} : x\in\Gamma(\theta) \text{ and } y\leq f(x, \theta)\}$ とし，$\Pi(\theta)=\{y\in\mathbb{R} : (x, y)\in E(\theta) \text{ for some } x\in X\}$ とする。$\Pi(\theta)$ はサブグラフ $E(\theta)$ の第2要素への射影（projection）である。さらに，$\bar{\Pi}(\theta)=\mathrm{cl}\,\Pi(\theta)$，つまり，$\Pi(\theta)$ の閉包，とする。このとき，証明は省略するが，自然なかたちで次の定理が証明できる。

定理 4（Ausubel and Deneckere (1993)）．X, Θ を位相空間とし，$f : X\times\Theta\to\mathbb{R}$ を関数，$\Gamma : \Theta\to X$ を対応とする。ここで，$M(\theta)=\sup\{f(x, \theta) : x\in\Gamma(\theta)\}$ と関数 $M : \Theta\to\mathbb{R}^{**}$ を定義する。このとき，

(a) 「$M(\cdot)$ が上半連続であること」と「$\bar{\Pi} : \Theta\to\mathcal{P}_0(\mathbb{R})$ が上（ビートリス）位相で連続であること」が同値である，

(b) 「$M(\cdot)$ が下半連続であること」と「$\bar{\Pi} : \Theta\to\mathcal{P}_0(\mathbb{R})$ が下（ビートリス）位相で連続であること」が同値である，

(c) 「$M(\cdot)$ が連続であること」と「$\bar{\Pi} : \Theta\to\mathcal{P}_0(\mathbb{R})$ がビートリス位相で連続であること」が同値である，

となる。

ベルジュの定理のように $f(\cdot, \cdot)$ が連続で，$\Gamma(\cdot)$ が連続であれば，$\bar{\Pi}(\cdot)$ は連続となり，$M(\cdot)$ は連続となる。ただし，上記の定理が意味するところは，$f(\cdot, \cdot)$ が上半連続関数で，$\Gamma(\cdot)$ が上半連続対応であれば，対応 $M(\cdot)$

は上半連続になり，また，$f(\cdot,\ \cdot)$ が下半連続関数で，$\Gamma(\cdot)$ が下半連続対応であれば，対応 $M(\cdot)$ が下半連続になるということである。

以上から，次の一般化された最大値定理が示されている。

定理 5（Ausubel and Deneckere（1993））．X を正規位相空間，Θ を位相空間，$\Gamma:\Theta\to X$ を非空で，かつ，コンパクト値な上半連続対応とする。ここで，$f:X\times\Theta\to\mathbb{R}$ を上半連続関数，$\Pi:\Theta\to\mathcal{P}_0(\mathbb{R})$ を下（ビートリス）位相で連続とする。このとき，

（a）　$M(\cdot)$ は連続関数であり，

（b）　$m(\cdot)$ は非空で，かつ，コンパクト値な上半連続対応

となる。

証明：簡単に証明を与えておく。関数 $f(\cdot,\ \cdot)$ の上半連続性と対応 $\Gamma(\cdot)$ の上半連続性は，$\Pi(\cdot)$ が上位相に関して連続であることを意味するので，$\Pi(\cdot)$ は下半連続であることが仮定されていることも合わせると，定理 4 から，$M(\cdot)$ が連続となる。

次に $m(\cdot)$ の上半連続性を示そう。$(x_n,\ \theta_n)_{n\in D}$ を，$x_n\in\Gamma(\theta_n)$, $f(x_n,\ \theta_n)=M(\theta_n)$ を満たす (x,θ) に収束するネット（net）とする。X は正規空間であり，$\Gamma(\cdot)$ は上半連続で閉値であるので，対応 $\Gamma(\cdot)$ は閉，つまり，$x\in\Gamma(\theta)$，となる。なぜなら，もし，閉でないならば，$x\in X\setminus\Gamma(\theta)$ となり，X が正規で，$\Gamma(\theta)$ が閉集合であることから，$x\in G_1$，かつ，$\Gamma(\theta)\subset G_2$ となる共通部分をもたない開集合 G_1, G_2 が存在する。θ_n は θ に収束し，Γ の上半連続性より，十分大きな任意の n に対して，$\Gamma(\theta_n)\subset G_2$ となる。しかし，$x_n\in\Gamma(\theta_n)$ で，かつ，十分大きな任意の n に対して，$x_n\in G_2$ となってしまい，x_n が x に収束する，つまり，十分大きな任意の n に対して，$x_n\in G_1$，であることに矛盾する。つまり，対応 $\Gamma(\cdot)$ は閉となる。

さらに，$f(\cdot,\ \cdot)$ が上半連続であり，$M(\cdot)$ が連続であるので，$f(x,\theta)\geq\overline{\lim}_{n\to\infty}f(x_n,\ \theta_n)=M(\theta)$ となる。これは，$x\in m(\theta)$ を意味し，つまりは，

$m(\cdot)$ が閉であることを意味する。ここで，$m(\theta)=m(\theta)\cap\Gamma(\theta)$ であり，かつ，$\Gamma(\cdot)$ は上半連続でコンパクト値であるので，$m(\cdot)$ は上半連続となる。

この最後のステートメントの $m(\cdot)$ の上半連続性についての証明を与えておく。まず，$\theta\in\Theta$，かつ，G を $m(\theta)\cap\Gamma(\theta)\subset G$ を満たす開集合とする。そうすると，$\Gamma(\theta)\setminus G$ はコンパクトで，$m(\theta)$ と共通部分を持たないことになる。m のグラフは閉集合なので，任意の $x\in\Gamma(\theta)\setminus G$ に対して，$\theta\in V_x$，かつ，$x\in U_x$ となるような Θ の開集合 V_x と X の開集合 U_x が存在する。さらに，$\theta'\in V_x$ ならば，$m(\theta')\cap U_x=\emptyset$ となる。$\Gamma(\theta)\setminus G$ はコンパクトであるので，有限個の開集合 U_x で，$\Gamma(\theta)\setminus G$ を覆うことができる。G' をこれらの有限個の U_x の和集合（union）とし，さらに，V_1を対応する有限個の V_x の共通部分（intersection）とする。そうすると，V_1 は θ の開近傍であり，$\theta'\in V_1$ であれば，$m(\theta')\subset X\setminus G'$ となる。$G_2=G\cup G'$ とし，V_2 を $\theta'\in V_2$ ならば，$\Gamma(\theta')\subset G_2$ となるような θ の開近傍とすると，$\theta'\in V_1\cap V_2$ ならば，$m(\theta')\cap\Gamma(\theta')\subset(X\setminus G')\cap G_2=(X\setminus G')\cap(G\cup G')\subset G$ となる。これは，$m(\cdot)=m(\cdot)\cap\Gamma(\cdot)$ が上半連続であることを意味している。 $\square$

この一般化された最大値定理（定理５）は，$\Gamma(\cdot)$ に上半連続性のみを要求して得られているところがベルジュの最大値定理より一般化されているところである。

****

記述が長くなってしまったので，今回はここまでにしておく。Deneckere and Liang (2002) の証明中（本稿の定理 2 の証明の中）にでてきた Prohorov の定理の解説，及び，本研究資料の本来の目標である Gerardi, Maestri and Monzón (2022) の紹介については，次回の「Gerardi, Maestri and Monzón (2022), “Bargaining over a Divisible Good in the Market for Lemons,” を読む（2)」にて行うことにする。

参考文献

［1］ Ausubel, L. and R. J. Deneckere (1993), “A generalized theorem of the maximum,” *Economic Theory* **3**, pp. 99–107.

［2］ Berge, C. (1963), *Topological Spaces: Including Treatment of Multi-Valued Function, Vector Spaces, and Convexity*, translated by E.M. Patterson, Dover Publications.

［3］ Deneckere, R.J. and M.-Y. Liang (2006), “Bargaining with interdependent values,” *Econometrica* **74**, pp. 1309–1364.

［4］ Fudenberg, D., D.K. Levine and J. Tirole (1985), “Infinite horizon models of bargaining with one-sided incomplete information,” in A.E. Roth, ed., *Game Theoretic Models of Bargaining*, Cambridge, Cambridge U.P., pp. 73–98.

［5］ Gerardi, D., L. Maestri and I. Monzón, “Bargaining over a divisible good in the market for lemons,” *American Economic Review* **112**, pp. 1591–1620.

［6］ Gul. F., H. Sonnenschein and R. Wilson (1986), “Foundations of dynamic monopoly and the Coase conjecture,” *Journal of Economic Theory* **39**, pp. 155–190.

［7］ Klein, T. and A. C. Thompson (1984), *Theory of correspondences : Including applications to mathematical economics*, New York: Wiley.