

日経平均ボラティリティ・ インデックスのプライシング： GARCH 型モデルの 標本外パフォーマンス

石 田 功

要旨

本稿は、実現 GARCH モデルによる VIX 指数プライシングの Hansen et al. [2022] の方法を日経ボラティリティ・インデックスのプライシングに適用した石田 [2022b] の実証分析を発展させる標本外パフォーマンス評価の結果を報告するものである。主要な発見は次のとおりである：① プライシング誤差低減を直接、目的関数（モデル推定の尤度関数）に含めるアプローチは標本内フィットの向上だけでなく、標本外のパフォーマンス向上効果も大きい、② 日経平均株価リターン・データだけを用いて比較的短期間の移動窓方式で EGARCH モデルを推定する場合、持続性のパラメータの推定値が 1 に近い値となり、結果的に VIX 理論値がオーバーシュートしてしまいパフォーマンスが悪くなることが多い、③ ボラティリティの日次実現測度をモデルに取り込む実現 GARCH モデルもパフォーマンス向上に繋がる可能性が高い、④ 純ボラティリティ・リスクプレミアム項を含むモデルは最近、その重要性が低下しているように見えるが、以前は有効であった可能性がある。

キーワード：ボラティリティ指数，GARCH 型モデル

JEL Classifications: G12, G13, G17

目次

はじめに

I HHTW のボラティリティ指数プライシングの方法

II データ

III VI プライシングの標本外パフォーマンス評価

おわりに

はじめに

近年、株式市場や外国為替市場、国債市場の当面のボラティリティ（価格変動性）に関する市場参加者予想の尺度として、関連する金融オプションの市場価格からボラティリティを逆算するインプライド・ボラティリティの利用が広まり、メディアの金融記事でも頻繁に参照されるようになってきている。株式市場に関しては、米国 CBOE（シカゴ・オプション取引所）が算出・公表する VIX 指数（CBOE [2023]）が最も有名であるが、これは、S&P 500 指数オプション価格に基づく S&P 500 のインプライド・ボラティリティで、株価変動に関する警戒感が高まる時期に値が上昇する傾向があることから「恐怖指数」の異名をとる。最近では、2020年の COVID-19 パンデミックの発生に伴い、VIX 指数値がリーマン・ブラザーズ破綻後の金融危機時以来の高水準まで急上昇し、市場参加者は相場の乱高下に身構えた⁽¹⁾。日本株式市場のボラティリティ指数としては、日本経済新聞社が VIX と同様な方法で日経225オプション（大阪取引所に上場されている日経平均株価を対象とする株価指数オプション）の市場価格からリアルタイムで算出・公表する日経ボラティリティ・インデックスがあり（以下、日経 VI。日本経済新聞社 [2021]）、大阪取引所にはその先物が2012年以来上場されている。

各時点の VIX や日経 VI 値は、それぞれが対象とする S&P 500、日経平均

(1) COVID-19 パンデミックと VIX 指数の関係の実証研究としては、例えば、Apergis et al. (2023) がある。

日経平均ボラティリティ・インデックスのプライシング

株の翌1ヵ月間の累積ボラティリティの期待値を計測するように設計されている。ただし、この期待値は株価指数の現実の確率分布による期待値ではなく、⁽²⁾ リスク中立確率測度に基づく期待値である。

株価指数等のボラティリティは金融機関・資産運用会社や個人の資産運用におけるリスク管理上重要な変数であるが、各資産のボラティリティは時間と共に変動する。この時系列での変動特性を捉え、将来のボラティリティを予測するための多くの統計モデルが提案されてきている。その一つのタイプとして離散時間の GARCH 型ボラティリティ・モデルがある。⁽³⁾ GARCH 型モデルは、統計的推論が比較的簡単で計算負荷も小さいためボラティリティ変動過程のモデリングや将来のボラティリティ予測の目的で幅広く利用されており、派生資産価格評価への応用についても、Duan [1995] の先駆的研究以来、継続的に改良・拡張が重ねられている。

Hansen et al. [2022] (以下, HHTW) は、GARCH 型モデルに日次実現測度(資産価格の日中高頻度市場データから構築した日次ボラティリティの尺度)を組み入れた実現 GARCH モデル(Hansen et al. [2012], Hansen and Huang [2016])を VIX プライシング(価格付け)に適用し、そのプライシング誤差低減効果を報告している。ここでいうプライシングとは、S&P500 が特定の GARCH 型モデルに従うと仮定し統計的に推定したパラメータ値が含意する VIX の理論値を求めることで、プライシング誤差は VIX 理論値と実際に観測された VIX 値との乖離を指す。VIX は翌1ヵ月間の S&P500 のリ

(2) 資産の将来のペイオフのリスク中立測度での期待値を安全資産利率で割り引いた値がその資産の現在の価格になる(リスク中立測度の定義)。資産価格の基本定理によれば、一定の条件の下で、市場に裁定機会がないことと、リスク中立測度が存在することは同値である(資産価格の基本定理の解説を含む資産価格付けの優れた邦書としては例えば木島・田中(2007)がある)。

(3) GARCH 型ボラティリティ・モデルの理論・応用の包括的サーベイとしては Francq and Zakoian (2019) がある。

ターン分散のリスク中立確率測度下での期待値（の平方根を年率化したもの）なので、VIX 理論値の計算には S&P 500 のボラティリティ変動のリスク中立確率測度下でのモデルを推定することが必要になる。ただし、S&P 500 指数オプションのプライシングの場合と異なり、VIX 理論値は GARCH 型モデルの下で解析的な解が簡単に得られる。前者においては複数日先のオプション・ペイオフのリスク中立期待値を求める必要があるが、後者は（多数のオプション価格を複雑に組み合わせるものであるにもかかわらず）理論的には複数日分の日次条件付きリスク中立分散を足し合わせたものだからである。HHTW は現実の確率測度下、及び、リスク中立確率測度下の 2 組の GARCH 型モデルのパラメータの推定には最尤法、もしくは、最尤法とプライシング誤差最小化を組み合わせた方法を用いている。石田 [2022b] は HHTW の方法を日経平均と日経 VI データに適用し、日経 VI プライシングの標本内パフォーマンスにおいて、実現 GARCH モデルがそれに対応する EGARCH モデル（実現測度は組み入れられていない）を上回ること、また、VIX プライシング誤差の最小化をパラメータ推定の目的関数に含めた場合のプライシング・パフォーマンスはそうでない場合よりも大きく改善することを報告した。ただし、後者の場合、標本内の評価ではパフォーマンスが向上するのは当然予想されることであり、オーバーフィットの可能性もある。そこで、本稿では、石田 [2022b] の補完的実証分析として、GARCH 型モデルの日経 VI プライシングの標本外パフォーマンス評価を行った結果を報告する。

I HHTW のボラティリティ指数プライシングの方法

以下、HHTW のボラティリティ指数プライシングの方法の概略を説明するが、ここでは HHTW が分析対象とした S&P 500 株価指数及び VIX をそれぞれ日経平均と日経 VI に置き換えている。本稿は石田 [2022b] の実証分

析の追加分析（標本外パフォーマンス評価）であり、下記の説明はそこでの HHTW の方法の説明を更に簡素化したレビューである。より詳しくは HHTW, もしくは、石田 [2022a, 2022b] を参照されたい。

1 日次リターンとボラティリティ変動のモデル

- 日経平均株価の日次対数%リターンのモデル：

$$R_t \equiv r + \lambda h_t - \frac{1}{2} h_t + \sqrt{h_t} z_t \quad (1)$$

ここで、 R_t は第 t 日の日次リターン（配当調整済み終値ベース）、 h_t は $t-1$ 時点で利用可能な情報で条件付けた R_t の条件付分散、 r はリスクフリー・レート、 λ はエクイティ・リスクプレミアムである。

- リターンの条件付分散 h_t のモデル：

$$\ln h_{t+1} = \omega + \beta \ln h_t + \tau_1 z_t + \tau_2 (z_t^2 - 1) + \gamma \sigma u_t, \quad (2)$$

$$\ln x_t = \kappa + \phi \ln h_t + \delta_1 z_t + \delta_2 (z_t^2 - 1) + \sigma u_t \quad (3)$$

ここで、 x_t は第 t 日の日次実現測度である。(1)-(3) を実現 GARCH モデルと呼ぶ。 $(\omega, \beta, \tau_1, \tau_2, \gamma, \sigma, \kappa, \phi, \delta_1, \delta_2)$ は未知パラメータ ($|\beta| < 1, \sigma > 0$) である。リターン・ショック $\{z_t\}$ に加えて純ボラティリティ・ショック $\{u_t\}$ が条件付分散を駆動する。両者は互いに独立かつそれぞれ $i.i.d. \mathcal{N}(0, 1)$ と仮定する。本モデルには、① リターン・ショックのみに駆動される他の GARCH 型モデルと比較してボラティリティ変動過程のモデリングの柔軟性が高まる、② 実現測度（最もベーシックなものは日中5分間リターン2乗和等）がボラティリティに関して持つ付加的情報を取り込むことができる、③ 確率ボラティリティ・モデルと呼ばれるクラスのモデルより統計分析の計算負荷が低い等の利点がある。

- リスク中立確率測度 \mathbb{Q} 下のモデル

リスク中立確率測度（ \mathbb{Q} と記す）の下で(1)~(3)はそれぞれ(4)~(6)に

変換されると仮定する：

$$R_t = r - \frac{1}{2} h_t + \sqrt{h_t} z_t^* \quad (4)$$

$$\ln h_{t+1} = \tilde{\omega} + \beta \ln h_t + \tilde{\tau}_1 z_t^* + \tau_2 (z_t^{*2} - 1) + \gamma \sigma u_t^* \quad (5)$$

$$\ln x_t = \tilde{\kappa} + \phi \ln h_t + \tilde{\delta}_1 z_t^* + \delta_2 (z_t^{*2} - 1) + \sigma u_t^* \quad (6)$$

ここで、 $z_t^* \equiv z_t + \lambda$, $u_t^* \equiv u_t + \xi$ (\mathbb{Q} の下では $\{z_t^*\} \sim i.i.d. \mathcal{N}(0, 1)$, $\{u_t^*\} \sim i.i.d. \mathcal{N}(0, 1)$, かつ、互いに独立), $\tilde{\omega} \equiv \omega - \tau_1 \lambda + \tau_2 \lambda^2 - \gamma \sigma \xi$, $\tilde{\tau}_1 \equiv \tau_1 - 2\tau_2 \lambda$, $\tilde{\kappa} \equiv \kappa - \delta_1 \lambda + \delta_2 \lambda^2 - \sigma \xi$, $\tilde{\delta}_1 \equiv \delta_1 - 2\delta_2 \lambda$ 。 $\gamma = 0$ の場合は $\xi = 0$ となり、条件付分散がリターン・ショックのみに駆動される EGARCH モデルに単純化される (ただし、通常用いられる EGARCH モデルとは若干異なる)。エクイティ・プレミアム λ は日次超過リターン系列のデータのみからでも統計的に推定できるが、 ξ は日次リターンと実現測度とだけからは識別不能なので、日経平均 VI のデータも併用して推定する (VI プライシング誤差最小化も目的関数に含める)。 \mathbb{Q} の下での上記モデルの導出については HHWT とその引用論文を参照されたい。

2 VIX 理論値

式(1)~(6)の下で、翌30日間の日経平均株価リターンの \mathbb{Q} の下での条件付期待値は、

$$VI_t^{model} = \sqrt{\frac{244}{20} \sum_{k=1}^{20} E_t^{\mathbb{Q}} [h_{t+k}]} = \sqrt{\frac{244}{20} \{h_{t+1} + \sum_{k=2}^{20} (\prod_{i=0}^{k-2} F_i) h_{t+1}^{\beta^{k-1}}\}} \quad (7)$$

となる。ここで、 $F_i \equiv (1 - 2\beta^i \tau_2)^{-1/2} \exp\left(\beta^i (\tilde{\omega} - \tau_2) + \frac{1}{2} \beta^{2i} \left[\frac{\tilde{\tau}_1}{1 - 2\beta^i \tau_2} + \gamma^2 \sigma^2\right]\right)$, $E_t^{\mathbb{Q}}[\cdot]$ は \mathbb{Q} の下での t 時点の情報での条件付期待値を表す。 VI_t^{model} は、まさに、日経 VI が計測しようとするターゲットである。月間ボラティリティの計測、及び、年率化には平均月間取引日数、平均年間取引日数の20, 244を用いている (端数は四捨五入)。よって、この VI_t^{model} が GARCH 型モデルの

含意する日経 VI 理論値となり、各日のプライシング誤差は、

$$e_t = VI_t^{model} - VI_t \quad (8)$$

となる (VI_t は日経 VI の第 t 日終値)。

3 未知パラメータ推定

本稿では、モデル(1)～(6)の未知パラメータの推定には次の尤度関数 LL による最尤法を用いる：

$$LL = LL_R + LL_x + LL_{VI} \quad (9)$$

$$LL_R = -\frac{T}{2} \ln 2\pi - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (\ln h_t + z_t^2) \quad (10)$$

$$LL_x = -\frac{T}{2} (\ln 2\pi + \ln \sigma^2) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \eta_t^2 \quad (11)$$

$$LL_{VI} = -\frac{T}{2} (\ln 2\pi + \ln \sigma_{VI}^2) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \frac{e_t^2}{\sigma_{VI}^2} \quad (12)$$

ここで、 $z_t = \frac{R_t - r}{\sqrt{h_t}} - \lambda + \frac{1}{2} \sqrt{h_t}$ 、 $\eta_t = (\ln x_t - \kappa - \phi \ln h_t - \delta_1 z_t - \delta_2 (z_t^2 - 1)) / \sigma$

である。式(12)の背後には $e_t \sim i.i.d. \mathcal{N}(0, \sigma_{VI}^2)$ の仮定がある。なお、最大化の1次条件から σ_{VI}^2 の推定量はプライシング誤差の標本分散となる。用いるデータやモデルの制約に合わせて、 LL ではなく、 $LL_R + LL_x$ 、 $LL_R + LL_{VI}$ 、 LL_R を最大化する尤度関数として用いる。

4 日経 VI プライシングの標本外パフォーマンス

石田 [2022b] では全標本期間のデータを用いていくつかのモデルをそれぞれ1回のみ推定し、標本内のプライシング誤差を評価したが、本稿の目的は標本外のパフォーマンス評価である。ここではそのために、HHTW に従い、長さ750日固定で1日ずつ移動していく移動窓の方法を採用した。最初の窓、2012年2月27日から2015年3月18日までのデータによりモデルを推定

し、モデルが含意する日経 VI 理論値 VI_t^{model} , $t=2015$ 年 3 月 18 日 (VI_t^{model} は 2015 年 3 月 18 日から約 1 ヶ月のボラティリティ予測値) を 3 月 18 日の日経 VI 終値にあててプライシング誤差を計算する作業を 1 日ずつ推定窓を移動させながら繰り返していき、プライシング誤差の時系列を得た。⁽⁴⁾ 評価はバイアス (プライシング誤差の平均), RMSE (平均平方根誤差), MAE (平均絶対誤差) の比較, 及び, Diebold-Mariano 予測精度検定 (以下 DM 検定。Diebold and Mariano [1995]) により行った。DM 検定は「2 つのモデルの予測の損失の期待値に差はない」という帰無仮説を検定するもので, 本稿では HHTW 同様に損失を誤差 2 乗, 及び, 絶対値としその期待値をプライシング誤差の RMSE と MSE により推定した。モデルのペアによっては一方が他方の入れ子 (nested) になっているが, 移動窓方式なので問題はないと考えられる (Giacomini and White [2006] 参照)。

II データ

実証分析に用いた標本期間は石田 [2022b] と同様に, 2012 年 2 月 27 日から 2022 年 5 月 31 日とし, 日経平均株価と日経 VI の日次終値は Nikkei NEEDS Financial Quest より得た。その他も石田 [2022b] と同様に, 配当利回り年 2 % とし日次換算した値を日経平均日次終値対数差分に加えたものを日経平均リターン, リスクフリー・レートは 0 % とし, 実現測度としては Oxford-Mann Institute of Quantitative Finance の Realized Library 収録の実現カーネルを, モデルの推定には R の最尤推定パッケージ maxLik (Toomet et al. [2022]) の関数 maxLik を用いた。

(4) 標本外予測と呼んでいるが, 各窓の予測ターゲット (750 日目の日経 VI 値) は窓の終点においては既知であり, 更に, モデル/推定方法によっては各移動窓の 750 日目のプライシング誤差もパラメータ推定に使っているため, 厳密には標本外とも予測とも言えない。

Ⅲ VI プライシングの標本外パフォーマンス評価

石田 (2022b) と同様に、下記の 5 つのモデル／推定方法の組合せの日経 VI プライシングのパフォーマンスを比較し、結果を全期間、前期、後期に分けて表にまとめた。

- EG (R) : EGARCH, $\gamma=0, \xi=0$, 尤度関数 LL_R
- EG (R, VI) : EGARCH, $\gamma=0, \xi=0$, 尤度関数 LL_R+LL_{VI}
- RG (R, x) : 実現 GARCH, $\xi=0$, 尤度関数 LL_R+LL_x
- RG (R, x, VI) : 実現 GARCH, $\xi=0$, 尤度関数 $LL_R+LL_x+LL_{VI}$
- RG2 (R, x, VI) : 実現 GARCH, 尤度関数 $LL_R+LL_x+LL_{VI}$

標本内評価の場合と比較してバイアス、MAE, RMSE はどのモデルも増加したが、モデル間での序列や大小関係の大まか傾向には変化はなかった。プライシング誤差最小化を尤度関数に含めた (LL_x を含めた) 場合のプライシング精度向上効果は標本外評価でも全般的に大きく、これが単なる標本内でのオーバーフィットではなく、少なくとも VI プライシング目的においては有効な方法である可能性が高いことが認められた。

EG (R)、つまり、プライシング誤差最小化を尤度関数に含めない (LL_x を含めない) EGARCH モデルの対標本内評価でのパフォーマンス悪化が顕著であったが、原因としては、前期に持続性パラメータ β の推定値が定常性条件の上限に張り付く窓が多く (推定においては上限を 0.99999 とした)、含意する VI 理論値が極端に大きな値になっていたことが考えられる。特に、Brexit のニュースを受けて 2016 年 6 月 24 日の日経平均株価は前日比 8% を超える下落となり、EG (R) による VI 理論値は翌取引日の 6 月 28 日には前日比 100 を超える異常な値となった。同日の VI 終値は 40.71 であり、非常に高い値ではあるが、Brexit の国民投票の結果が出る前から高域で推移しており、6 月 24 日、28 日ともそこまで極端なジャンプをしたわけではなかった。EG

表：VI プライシングの標本外パフォーマンス比較

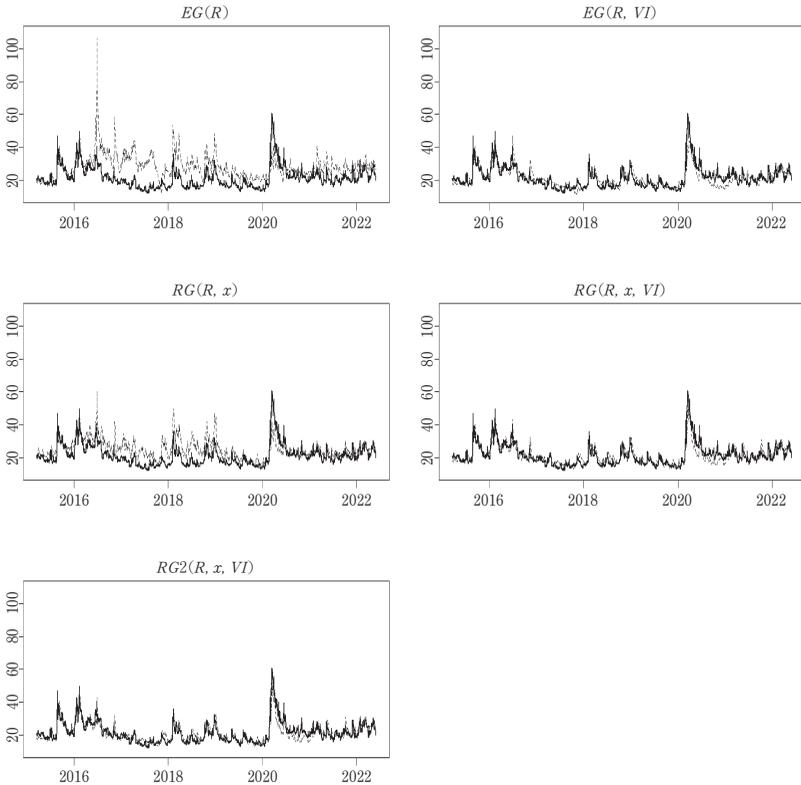
モデル	RG2 (R, x, VI)	RG (R, x, VI)	RG (R, x)	EG (R, VI)	EG (R)
全期間：2015年3月18日～2022年5月31日					
バイアス	0.151	0.166	3.767	0.152	7.029
RMSE	3.064	3.064	6.371	3.487	10.168
DM (RMSE)		-0.276 (0.783)	23.858 (0.000)	6.197 (0.000)	18.998 (0.000)
MAE	2.301	2.297	5.028	2.602	8.118
DM (MAE)		-1.969 (0.049)	30.666 (0.000)	6.900 (0.000)	38.717 (0.000)
前期：2015年3月18日～2018年10月15日					
バイアス	0.753	0.765	6.152	0.860	9.445
RMSE	2.746	2.764	7.544	3.127	12.525
DM (RMSE)		4.106 (0.000)	25.501 (0.000)	5.593 (0.000)	17.172 (0.000)
MAE	2.172	2.179	6.533	2.435	10.039
DM (MAE)		2.587 (0.010)	34.939 (0.000)	5.047 (0.000)	31.642 (0.000)
後期：2018年10月16日～2022年5月31日					
バイアス	-0.452	-0.433	1.383	-0.556	4.614
RMSE	3.353	3.336	4.926	3.813	7.066
DM		-4.603 (0.000)	8.511 (0.000)	4.213 (0.000)	18.640 (0.000)
MAE	2.430	2.415	3.523	2.769	6.198
DM		-5.533 (0.000)	1.094 (0.000)	5.398 (0.000)	29.825 (0.000)

DM は RG2 (R, x, VI) をベンチマークとする Diebold-Mariano 検定統計量。予測精度が等しいという帰無仮説の下では漸近的に標準正規分布に従う。括弧内は p 値。

(R) による VI 理論値の VI 観測値からの大幅な上方乖離はその後も長期間継続し (図の左上パネルの EG (R) による VI 理論値と VI 実現値のプロット参照), バイアス, RMSE も大きな値となった。

EG (R) と RG (R, x) の比較では, 後者のバイアス, RMSE, MAE がそれぞれ大幅に改善しているが, これは前者の $\hat{\beta} \approx 1$ の問題が後者において緩和されたことによる可能性が考えられる。

図：VI 実現値と GARCH 型モデルによる理論値



太線は VI 実現値，破線は各モデルによる理論値。

$EG(R, VI)$ と $RG(R, x, VI)$ の比較では，後者の RMSE, MAE が小さくなっており実現 GARCH モデルの有効性が確かめられた。通期では $EG(R, VI)$ の方がバイアスは若干小さくなっているが， $EG(R, VI)$ では前期の正の方向の大きなバイアスが後期の負の方向の大きなバイアスに打ち消されているため，前期・後期別々に見ると $RG(R, x, VI)$ の方がバイアスは小さい。 $RG(R, x, VI)$ をベンチマークとする DM 検定では，2 種のどちらの損失タイプの検定でも「両者のパフォーマンスは同じ」という帰無仮説は強く

棄却される（表には載せていないが、DM 統計値は誤差 2 乗ベースで 6.33、誤差絶対値ベースで 7.45）、実現 GARCH モデル RG (R, x, VI) の優位性が示された。

フルモデル RG2 (R, x, VI) と RG (R, x, VI) はどちらも実現 GARCH モデルでかつモデル推定においてプライシング誤差縮小も考慮するアプローチであるが、前者は純ボラティリティ・リスクプレミアムのパラメータ ξ が含まれる点が異なる。HHTW は VIX の実証研究においてこの純ボラティリティ・リスクプレミアムのパラメータ ξ の重要性について報告したが、石田 [2022b] は標本内での日経平均ボラティリティ・モデルのフィットや日経 VI プライシングの標本内パフォーマンス改善にはあまり貢献しないことを報告した。本稿の標本外評価でもバイアス、RMSE, MAE については両者に大差はないことが分かった（通期では DM 検定でも両者の精度は同じという仮説を棄却できなかった）。しかし、DM 検定 (RG2 (R, x, VI) がベンチマーク) では前期は RG2 (R, x, VI) が強く優位、後期は RG (R, x, VI) ($\xi = 0$) が強く優位という結果になった（石田 [2022b] の COVID-19 感染拡大前の 2019 年までは日経 VI プライシングにおいて ξ の役割が重要であったとの指摘とも整合的である）。

おわりに

本稿では、実現 GARCH モデルによる VIX 指数プライシングの HHTW の方法を日経平均ボラティリティ・インデックスのプライシングに適用した石田 [2022b] の実証分析を発展させる標本外パフォーマンス評価の結果を報告した。主要な発見は次のとおりであった：① プライシング誤差低減を直接、目的関数（モデル推定の尤度関数）に含めるアプローチは標本内フィットの向上だけでなく、標本外のパフォーマンス向上効果も大きい、② 日経平均株価リターン・データだけを用いて比較的短期間の移動窓方式で

EGARCH モデルを推定する場合、持続性のパラメータの推定値が1に近い値となり、結果的に VIX 理論値がオーバーシュートしてしまうことが多い、③ ボラティリティの日次実現測度をモデルに取り込む実現 GARCH モデルもパフォーマンス向上に繋がる可能性が高い、④ 純ボラティリティ・リスクプレミアム項を含むモデルは最近、その重要性が低下しているように見えるが、以前は有効であった可能性がある。

参考文献

- Apergis, Nicholas, Ghulam Mustafa, and Shafaq Malik (2023). “The Role of the COVID-19 Pandemic in US Market Volatility: Evidence from the VIX index.” *Quarterly Review of Economics and Finance* 89: 27-35.
- CBOE (2023). “Volatility Index Methodology: CBOE Volatility Index.” https://cdn.cboe.com/api/global/us_indices/governance/Volatility_Index_Methodology_Cboe_Volatility_Index.pdf (2023年7月1日アクセス).
- Diebold, Francis X., and Robert S. Mariano (1995). “Comparing Predictive Accuracy.” *Journal of Business & Economic Statistics* 13: 253-263.
- Duan, Jin-Chuan (1995). “The GARCH Option Pricing Model.” *Mathematical Finance* 5: 13-32.
- Franco, Christian, and Jean-Michel Zakoian (2019). *GARCH Models: Structure, Statistical Inference and Financial Applications. Second Edition*. John Wiley & Sons.
- Giacomini, Rafaella, and Halbert White (2006). “Tests of Conditional Predictive Ability.” *Econometrica* 74: 1545-1578.
- Hansen, Peter R., Zhuo Huang (2016). “Exponential GARCH Modeling with Realized Measures of Volatility.” *Journal of Business & Economic Statistics* 34: 269-287.
- Hansen, Peter R., Zhuo Huang, and Howard H. Shek (2012). “Realized GARCH: A Joint Model of Returns and Realized Measures of Volatility.” *Journal of Applied Econometrics* 27: 877-906.
- Hansen, Peter R., Zhuo Huang, Chen Tong, and Tianyi Wang (2022). “Realized GARCH, CBOE VIX, and the Volatility Risk Premium.” *Journal of Financial Econometrics*. Advance online publication. <https://doi.org/10.1093/jjfinec/nbac033>.
- Toomet, Ott, Arne Henningsen, Spencer Graves, Yves Croissant, David Hugh-Jones, and Luca Scrucca (2022). “R Package maxLik, Version 1-5-2.” <https://cran.r-project.org/web/packages/maxLik/maxLik.pdf> (2022年8月1日アクセス).
- 石田 功 (2022a). 「GARCH 型モデルによるボラティリティ指数の価格付け」『大阪取引所 先物・オプションレポート』34(6)：1-6.

- 石田 功 (2022b), 「日経平均ボラティリティ・インデックスのプライシングとボラティリティ・リスクプレミアム」『大阪取引所 先物・オプションレポート』34(7), 1-8.
- 木島正明・田中敬一 (2007), 『資産の価格付けと測度変換』朝倉書店.
- 日本経済新聞社 (2021), 「日経平均ボラティリティ・インデックス」リアルタイム算出要領. https://indexes.nikkei.co.jp/nkave/archives/news/20211124J_2.pdf (2022年8月1日アクセス).