

# I(1) とI(2) が混在する共和分時系列の多変量 Beveridge Nelson 分解

著者	村澤 康友
雑誌名	甲南経済学論集
巻	60
号	3・4
ページ	1-14
発行年	2020-03-20
URL	<a href="http://doi.org/10.14990/00003482">http://doi.org/10.14990/00003482</a>

# I(1) と I(2) が混在する 共和分時系列の多変量<sup>(\*)</sup> Beveridge-Nelson 分解

村 澤 康 友

## 要旨

多変量 Beveridge-Nelson (B-N) 分解は、複数の I(1) 時系列を同時に確率的トレンドとギャップに分解する手法である。しかし実質 GDP を含むマクロ経済時系列に多変量 B-N 分解を単純に適用すると、米国以外のデータでは、しばしば発散する不自然な GDP ギャップが得られる。他方で近年のマクロ経済学の標準的な理論における動学的 IS 曲線では、実質 GDP 成長率と実質利子率の和分次数は等しいとされる。したがって実質利子率が I(1) なら実質 GDP 成長率も I(1) なので、実質 GDP の対数値は I(2) となり、さらに実質 GDP 成長率と実質利子率は共和分時系列となる。本論文は I(1) と I(2) が混在する共和分時系列に多変量 B-N 分解を拡張する。応用例として日本のインフレ率・実質利子率・失業率・実質 GDP の確率的トレンドとギャップを同時に推定する。確率的トレンドは自然率とも解釈できる。

キーワード：トレンド、ギャップ、自然率、単位根

## 目次

はじめに

I 予測モデル

II 多変量 B-N 分解

III 日本のデータへの応用

おわりに

---

(\*) 本研究は JSPS 科研費 JP16K03605 の助成を受けたものです。

## はじめに

景気の成長循環の計測のための GDP ギャップの推定を目的として、Beveridge and Nelson [1981] は  $I(1)$  時系列をランダムウォークと  $I(0)$  時系列、すなわち確率的トレンドとギャップに分解する手法を開発した。Beveridge-Nelson (B-N) 分解は、無限期先の定常状態の予測値を確率的トレンド、定常状態に至るまでの予測可能な変化 (forecastable movement) をギャップと定義し、それらを線形モデルで予測する手法である。<sup>(1)</sup> 確率的トレンドは自然率とも解釈できる。Beveridge and Nelson [1981] は ARIMA モデルに基づく 1 変量 B-N 分解を提案した。Evans and Reichlin [1994] は VAR モデルに基づく多変量 B-N 分解に拡張した。さらに King et al. [1991] と Cochrane [1994] は共和分時系列を想定し、VECM (ベクトル誤差修正モデル) に基づく多変量 B-N 分解に拡張した。

GDP ギャップの推定手法の 1 つとして B-N 分解は広く知られているが、米国以外のデータへの応用例は意外に少ない。米国以外では実質 GDP 成長率が  $I(1)$ 、すなわち実質 GDP の対数値が  $I(2)$  となり、B-N 分解の前提条件を満たさない場合が多い。そのため米国以外のデータに多変量 B-N 分解を単純に適用すると、不自然な GDP ギャップが得られる。例えば Murasawa [2015] は、日本のデータに多変量 B-N 分解を単純に適用すると、GDP ギャップが発散することを示している。

また近年のマクロ経済学の標準的な理論における動学的 IS 曲線では、実質 GDP 成長率と実質利子率の和分次数は等しいとされる。すなわち  $y_t$  を実質 GDP の対数値、 $r_t$  を実質利子率とすると、動学的 IS 曲線は、任意の  $t$  に

---

(1) ただし Beveridge and Nelson [1981] はギャップの符号を逆にして forecastable momentum と定義している。論文の出版に際し、そうせざるを得なかった経緯は Nelson [2008] を参照。

I(1) と I(2) が混在する共和分時系列の多変量 Beveridge-Nelson 分解  
ついて

$$E_t(\Delta y_{t+1}) = \frac{1}{\sigma}(r_t - \rho) \quad (1)$$

ただし  $\rho$  は割引率、 $\sigma$  は効用関数の曲率である。Galí [2015, pp. 21-23] 等を参照。(1)式より実質利子率が I(1) なら実質 GDP 成長率も I(1) なので、実質 GDP の対数値は I(2) となり、さらに実質 GDP 成長率と実質利子率は共和分時系列となる。したがって I(1) 時系列を想定する従来の多変量 B-N 分解による GDP ギャップの推定は、近年のマクロ経済学の標準的な理論と整合的でない。

実は I(2) 時系列の B-N 分解も可能である。Newbold and Vougas [1996] は I(2) 時系列の 1 変量 B-N 分解を提案した。Murasawa [2015] は I(1) と I(2) が混在する時系列に多変量 B-N 分解を拡張し、日本のデータに適用した。本稿は I(1) と I(2) が混在する共和分時系列に多変量 B-N 分解を拡張し、Murasawa [2015] の結果と比較する。主な結果は以下の 3 点である。

1. ヨハンセンの共和分検定によると、日本のインフレ率・実質利子率・失業率・実質 GDP 成長率は階数 2 の共和分時系列である。
2. ただし上記 4 変数の VECM の係数の最尤推定値は、厳密には多変量 B-N 分解の存在条件を満たさない。
3. それでも比較のため I(1) と I(2) が混在する共和分時系列に拡張した多変量 B-N 分解を適用すると、Murasawa [2015] の推定値と比較して、インフレ率と実質利子率のギャップはあまり変わらないが、失業率と実質 GDP のギャップは大きくなる。またギャップ間のフィリップス曲線やオーケンの法則の関係も強まる。

多変量 B-N 分解の存在条件を課して VECM を推定すれば第 2 点の問題は回避できる。そのような推定にはベイズ法が便利である。Murasawa [2019] は本稿の手法をベイズ法に拡張している。

第2点の問題の留保付きではあるが、第3点は次のように解釈できる。Granger の表現定理より、共和分時系列は VECM で表現できる。したがって誤差修正項が予測に役立つ限り、VECM は VAR モデルより予測能力が高い。ギャップは「定常状態に至るまでの予測可能な変化」と定義されるので、モデルの予測能力が高いほど、ギャップの推定値は大きく<sup>(2)</sup>なる。本稿の手法をベイズ法に拡張した Murasawa [2019] は、アメリカのデータについて同様の結果を得ている。

本稿の構成は以下の通りである。まず第 I 節で I(1) と I(2) が混在する共和分時系列の予測モデルを定式化する。次に第 II 節で多変量 B-N 分解の公式を導く。そして第 III 節で日本のデータへの応用例を紹介する。最後に結論と今後の展望を述べる。

## I 予測モデル

### 1 VAR モデル

$d=1, 2$  について、 $\{\mathbf{x}_{t,d}\}$  を  $N_d$  変量 I( $d$ ) 時系列とする。変数の数は  $N := N_1 + N_2$  である。任意の  $t$  について、 $\mathbf{x}_t := (\mathbf{x}_{t,1}', \mathbf{x}_{t,2}')'$  とする。 $\{\mathbf{x}_t\}$  の多変量 B-N 分解を考える。

任意の  $t$  について、 $\mathbf{y}_{t,1} := \mathbf{x}_{t,1}$ ,  $\mathbf{y}_{t,2} := \Delta \mathbf{x}_{t,2}$  と定義し、 $\mathbf{y}_t := (\mathbf{y}_{t,1}', \mathbf{y}_{t,2}')'$  とする。したがって  $\{\mathbf{y}_t\}$  は I(1) となる。さらに  $\{\mathbf{y}_t\}$  を階数  $r$  の共和分時系列と仮定する。また  $d=1, 2$  について、 $\boldsymbol{\mu}_d := E(\Delta \mathbf{y}_{t,d})$  と定義し、 $\boldsymbol{\mu} := (\boldsymbol{\mu}_1', \boldsymbol{\mu}_2')'$  とする。 $\{\mathbf{y}_t\}$  から線形トレンドを除去した系列を  $\{\mathbf{y}_t^*\}$  とする。すなわち任意の  $t$  について

$$\mathbf{y}_t = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\mu}t + \mathbf{y}_t^* \quad (2)$$

$\{\mathbf{y}_t^*\}$  に VAR( $p+1$ ) モデルを仮定する。すなわち任意の  $t$  について

---

(2) 同じ理屈で多変量 B-N 分解のギャップの推定値は 1 変量 B-N 分解より大きくなる (小さくならない)。Evans and Reichlin [1994] を参照。

I(1) と I(2) が混在する共和分時系列の多変量 Beveridge-Nelson 分解

$$\mathbf{\Pi}(L)\mathbf{y}_t^* = \mathbf{u}_t \quad (3)$$

$$\{\mathbf{u}_t\} \sim \text{WN}(\boldsymbol{\Sigma}) \quad (4)$$

## 2 VECM

$\mathbf{\Pi}(L)$  を次のように書き換える。

$$\mathbf{\Pi}(L) = \mathbf{\Pi}(1)L + \boldsymbol{\Phi}(L)(1-L) \quad (5)$$

ただし  $\boldsymbol{\Phi}(L) := (\mathbf{\Pi}(L) - \mathbf{\Pi}(1)L)/(1-L)$  と定義する。 $\{\mathbf{y}_t^*\}$  が階数  $r$  の共和分時系列なら  $\mathbf{\Pi}(1)$  の階数は  $r$  なので、(5)式を(3)式に代入して変形すると、 $\{\Delta\mathbf{y}_t^*\}$  に関する  $p$  次の VECM が得られる。すなわち任意の  $t$  について

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Phi}(L)\Delta\mathbf{y}_t^* &= -\mathbf{\Pi}(1)\mathbf{y}_{t-1}^* + \mathbf{u}_t \\ &= -\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Gamma}'\mathbf{y}_{t-1}^* + \mathbf{u}_t \end{aligned} \quad (6)$$

ただし  $\boldsymbol{\Lambda}$  は  $N \times r$  の負荷行列、 $\boldsymbol{\Gamma}$  は  $N \times r$  の共和分行列である。なお  $\{\mathbf{y}_t^*\}$  は共和分時系列なので、特性方程式  $\det(\boldsymbol{\Pi}(z)) = 0$  のすべての根は絶対値で 1 以上となる。これは VECM の係数 ( $\boldsymbol{\Phi}(\cdot)$ ,  $\boldsymbol{\Lambda}$ ,  $\boldsymbol{\Gamma}$ ) に制約条件を課す。

$\{\Delta\mathbf{y}_t\}$  に関する VECM は、任意の  $t$  について

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Phi}(L)(\Delta\mathbf{y}_t - \boldsymbol{\mu}) &= -\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Gamma}'[\mathbf{y}_{t-1} - \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\mu}(t-1)] + \mathbf{u}_t \\ &= -\boldsymbol{\Lambda}[\boldsymbol{\Gamma}'\mathbf{y}_{t-1} - \boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\delta}(t-1)] + \mathbf{u}_t \end{aligned} \quad (7)$$

ただし  $\boldsymbol{\beta} := \boldsymbol{\Gamma}'\boldsymbol{\alpha}$  と  $\boldsymbol{\delta} := \boldsymbol{\Gamma}'\boldsymbol{\mu}$  は共和分回帰の定数項とトレンド項の係数である。VECM では  $\boldsymbol{\alpha}$  は識別されないが、 $\boldsymbol{\mu}$  は識別される。そのため  $\boldsymbol{\beta}$  には制約がないが、 $\boldsymbol{\delta}$  には制約がある。ヨハンセンの共和分検定では、このことに注意が必要である。

## 3 状態空間表現

$p \geq 1$  とする。(6)式より、任意の  $t$  について

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Gamma}'\mathbf{y}_t^* &= \boldsymbol{\Gamma}'(\mathbf{y}_{t-1}^* + \boldsymbol{\Phi}_1\Delta\mathbf{y}_{t-1}^* + \cdots + \boldsymbol{\Phi}_p\Delta\mathbf{y}_{t-p}^* - \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Gamma}'\mathbf{y}_{t-1}^* + \mathbf{u}_t) \\ &= \boldsymbol{\Gamma}'\boldsymbol{\Phi}_1\Delta\mathbf{y}_{t-1}^* + \cdots + \boldsymbol{\Gamma}'\boldsymbol{\Phi}_p\Delta\mathbf{y}_{t-p}^* + (\mathbf{I} - \boldsymbol{\Gamma}'\boldsymbol{\Lambda})\boldsymbol{\Gamma}'\mathbf{y}_{t-1}^* + \boldsymbol{\Gamma}'\mathbf{u}_t \end{aligned}$$

すなわち

$$\begin{aligned} \Gamma' \mathbf{y}_t - \boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\delta} t = & \Gamma' \boldsymbol{\Phi}_1 (\Delta \mathbf{y}_{t-1} - \boldsymbol{\mu}) + \cdots + \Gamma' \boldsymbol{\Phi}_p (\Delta \mathbf{y}_{t-p} - \boldsymbol{\mu}) \\ & + (\mathbf{I}_r - \Gamma' \boldsymbol{\Lambda}) [\Gamma' \mathbf{y}_{t-1} - \boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\delta} (t-1)] + \Gamma' \mathbf{u}_t \end{aligned} \quad (8)$$

したがって状態ベクトルは、任意の  $t$  について

$$\mathbf{s}_t := \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{y}_t - \boldsymbol{\mu} \\ \vdots \\ \Delta \mathbf{y}_{t-p+1} - \boldsymbol{\mu} \\ \Gamma' \mathbf{y}_t - \boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\delta} t \end{pmatrix}$$

$\{\mathbf{s}_t\}$  は  $I(0)$  であり、モデルの母数が既知なら観測可能である。

VECM の状態空間表現は、任意の  $t$  について

$$\mathbf{s}_t = \mathbf{A} \mathbf{s}_{t-1} + \mathbf{B} \mathbf{z}_t \quad (9)$$

$$\Delta \mathbf{y}_t = \boldsymbol{\mu} + \mathbf{C} \mathbf{s}_t \quad (10)$$

$$\{\mathbf{z}_t\} \sim \text{WN}(\mathbf{I}_N) \quad (11)$$

ただし

$$\mathbf{A} := \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_1 & \cdots & \boldsymbol{\Phi}_p & -\boldsymbol{\Lambda} \\ & \mathbf{I}_{(p-1)N} & \mathbf{O}_{(p-1)N \times N} & \mathbf{O}_{(p-1)N \times r} \\ \Gamma' \boldsymbol{\Phi}_1 & \cdots & \Gamma' \boldsymbol{\Phi}_p & \mathbf{I}_r - \Gamma' \boldsymbol{\Lambda} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} := \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}^{1/2} \\ \mathbf{O}_{(p-1)N \times N} \\ \Gamma' \boldsymbol{\Sigma}^{1/2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} := [\mathbf{I}_N \quad \mathbf{O}_{N \times (p-1)N} \quad \mathbf{O}_{N \times r}]$$

この表現では  $\mathbf{A}$  のすべての固有値が絶対値で 1 未満であることが、 $\{\mathbf{s}_t\}$  が  $I(0)$  であるための必要十分条件となる。これは VECM の係数 ( $\boldsymbol{\Phi}(\cdot)$ ,  $\boldsymbol{\Lambda}$ ,  $\boldsymbol{\Gamma}$ ) に制約条件を課す。

状態空間表現より、任意の  $t$  について、 $\Delta \mathbf{y}_t$  の  $h$  期先予測値は

$$\mathbf{E}_t(\Delta \mathbf{y}_{t+h}) = \boldsymbol{\mu} + \mathbf{C} \mathbf{A}^h \mathbf{s}_t$$

I(1) と I(2) が混在する共和分時系列の多変量 Beveridge-Nelson 分解

したがって任意の  $t$  と  $h \geq 0$  について

$$E_t(\Delta \mathbf{x}_{t+h,1}) = \boldsymbol{\mu}_1 + \mathbf{C}_1 \mathbf{A}^h \mathbf{s}_t \quad (12)$$

$$E_t(\Delta^2 \mathbf{x}_{t+h,2}) = \boldsymbol{\mu}_2 + \mathbf{C}_2 \mathbf{A}^h \mathbf{s}_t \quad (13)$$

ただし

$$\mathbf{C}_1 := [\mathbf{I}_{N_1} \quad \mathbf{O}_{N_1 \times N_2} \quad \mathbf{O}_{N_1 \times (p-1)N} \quad \mathbf{O}_{N_1 \times r}]$$

$$\mathbf{C}_2 := [\mathbf{O}_{N_2 \times N_1} \quad \mathbf{I}_{N_2} \quad \mathbf{O}_{N_2 \times (p-1)N} \quad \mathbf{O}_{N_2 \times r}]$$

## II 多変量 B-N 分解

I(1) と I(2) が混在する共和分時系列の多変量 B-N 分解の公式は、状態ベクトルに誤差修正項を追加する他は、Murasawa [2015, Theorem 1] が与えた I(1) と I(2) が混在する時系列の多変量 B-N 分解の公式と同じである。 $\mathbf{x}_t$  の確率的トレンド（永続的成分）を  $\mathbf{x}_t^*$ 、ギャップ（一時的成分）を  $\mathbf{c}_t$  とする。

定理 1  $\mathbf{A}$  のすべての固有値が絶対値で 1 未満なら、任意の  $t$  について

$$\mathbf{x}_{t,1}^* = \lim_{T \rightarrow \infty} (E_t(\mathbf{x}_{t+T,1}) - T\boldsymbol{\mu}_1) \quad (14)$$

$$\mathbf{x}_{t,2}^* = \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ E_t(\mathbf{x}_{t+T,2}) - T^2 \frac{\boldsymbol{\mu}_2}{2} - T \left[ \frac{\boldsymbol{\mu}_2}{2} + \Delta \mathbf{x}_{t,2} + \mathbf{C}_2 (\mathbf{I}_{pN+r} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A} \mathbf{s}_t \right] \right\} \quad (15)$$

$$\mathbf{c}_{t,1} = -\mathbf{C}_1 (\mathbf{I}_{pN+r} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A} \mathbf{s}_t \quad (16)$$

$$\mathbf{c}_{t,2} = \mathbf{C}_2 (\mathbf{I}_{pN+r} - \mathbf{A})^{-2} \mathbf{A}^2 \mathbf{s}_t \quad (17)$$

証明 Murasawa [2015, pp. 158-159] を参照。□

次の行列を定義する。

$$\mathbf{W} := \begin{bmatrix} -\mathbf{C}_1 (\mathbf{I}_{pN+r} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A} \\ \mathbf{C}_2 (\mathbf{I}_{pN+r} - \mathbf{A})^{-2} \mathbf{A}^2 \end{bmatrix}$$



すると任意の  $t$  について

$$\mathbf{c}_t = \mathbf{W}\mathbf{s}_t \quad (18)$$

$\mathbf{W}$  は VECM の係数のみに依存し、 $\{\mathbf{s}_t\}$  はモデルの母数が既知なら観測可能である。したがって VECM の推定結果を用いて  $\{\mathbf{c}_t\}$  は容易に計算できる。

### III 日本のデータへの応用

#### 1 使用データ

以下の4つのマクロ経済変数の確率的トレンドとギャップを同時に推定する。

**インフレ率**  $P_t$  を物価水準,  $\pi_t := \ln P_t$  をインフレ率とする。 $\{\pi_t\}$  を I(1) と仮定する。

**実質利子率**  $I_t$  を名目利子率 (年率, %) とし,  $i_t := \ln(1 + I_t/400)$  とする。 $r_t := i_t - E_t(\pi_{t+1})$  を (事前の) 実質利子率,  $\hat{r}_t := i_t - \pi_{t+1}$  を事後の実質利子率とする。 $\{r_t\}$  を I(1) と仮定する。<sup>(3)</sup>

**失業率**  $L_t$  を労働力人口,  $E_t$  を就業者数,  $U_t := -\ln(E_t/L_t)$  を失業率とする。 $\{U_t\}$  を I(1) と仮定する。

**実質 GDP**  $Y_t$  を実質 GDP とする。 $\{\Delta \ln Y_t\}$  をドリフトなしの I(1) と仮定する。すなわち  $\{\ln Y_t\}$  は I(2) で  $E(\Delta^2 \ln Y_t) = 0$  とする。

比較のため Murasawa [2015] と同じデータを用いる (表 1)。標本期間は 1980 年第 1 四半期～2013 年第 3 四半期である。名目利子率・労働力人口・就業者数の四半期系列は、月次系列の 3 か月平均値から作成する。

---

(3)  $\{r_t\}$  でなく  $\{\hat{r}_t\}$  を観測する場合でも実質利子率のギャップは推定できる。Murasawa [2014, pp. 499-500] を参照。

I(1) と I(2) が混在する共和分時系列の多変量 Beveridge-Nelson 分解

表1 使用データ

記号	系列名	出所
$Y_t$	実質 GDP (2005暦年連鎖価格, 10億円, 季調, 年率)	内閣府
$P_t$	GDP デフレーター (2005暦年=100, 季調)	内閣府
$I_t$	譲渡性預金平均金利 (新規発行分, 90日以上180日未満, 年率)	全国銀行協会 (1995年以前) 日本銀行 (1996年以降)
$L_t$	労働力人口 (万人, 季調)	総務省
$E_t$	就業者数 (万人, 季調)	総務省

観測ベクトルは、任意の  $t$  について

$$\mathbf{x}_t := \begin{pmatrix} \pi_t \\ \hat{r}_t \\ U_t \\ \ln Y_t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}_t := \begin{pmatrix} \pi_t \\ \hat{r}_t \\ U_t \\ \Delta \ln Y_t \end{pmatrix} \quad (19)$$

$\{\mathbf{y}_t\}$  の観測期間は1980年第2四半期～2013年第2四半期 (133四半期) である。仮定より  $\{\mathbf{y}_t\}$  は I(1) である。単位根/定常性検定の結果は Murasawa [2015, pp. 159-160] を参照。

表2はヨハンセンの共和分検定 (制約つきのトレンド, 制約のない定数項) を gretl 2019c で実行した結果である。階数  $r$  の帰無仮説に対する対立仮説は、トレース検定は階数  $N(=4)$ , 最大固有値検定は階数  $r+1$  であるが, どちらの検定でも有意水準5%で  $r=0, 1$  は棄却され,  $r=2, 3$  は棄却されな

表2 ヨハンセンの共和分検定 (制約つきのトレンド, 制約のない定数項)

階数	トレース	p値	最大固有値	p値
0	128.23	0.00	79.30	0.00
1	48.93	0.01	33.06	0.00
2	15.87	0.51	11.07	0.52
3	4.81	0.63	4.81	0.63

注: VECMのラグ次数は4 (gretl 2019c が与えたデフォルト値)。

い。以下では  $\{y_t\}$  を階数 2 の共和分時系列と仮定する。

## 2 モデルの定式化

簡単化のため事前に各変数から線形トレンドを除去し、 $\{\Delta y_t^*\}$  に関する (6) 式の VECM を推定する。比較のため Murasawa [2015] と同じくラグ次数は  $p=8$  とする。確認のため (3) 式の VAR モデルを gretl 2019c で推定したところ、特性方程式  $\det(\Pi(z))=0$  のすべての根は絶対値で 1 以上であった。

多変量 B-N 分解の計算は R Core Team [2019] が開発した R 3.6.1 で行う。VECM の最尤推定は Rgretl パッケージを利用して gretl 2019c の vecm コマンドを R 上で実行する。VECM の係数の最尤推定値と  $\{y_t^*\}$  を用いて (18) 式からギャップを計算する。

多変量 B-N 分解の存在条件を確認したところ、今回の使用データ・モデルの定式化・推定手法では、(9) 式の行列  $A$  について、絶対値で 1 以上の固有値が 1 つだけ存在した。したがってこのまま多変量 B-N 分解を適用するのは適切ではない。多変量 B-N 分解の存在条件を課して VECM を推定すれば問題は回避できるが、そのような制約付き最尤推定は自明でない。本稿は Murasawa [2015] との比較が目的なので、問題点に留意した上で、このまま多変量 B-N 分解を適用する。ベイズ法による解決策は Murasawa [2019] を参照。

## 3 結果

図 1 は共和分の有無によるギャップの推定値の比較である。「共和分あり」の推定値の信頼性に疑問は残るが、少なくとも GDP ギャップは発散していない。「共和分なし」の推定値と比較すると、インフレ率と実質利子率のギャップはあまり変わらないが、失業率と実質 GDP のギャップは大きくなる。こ

I(1) と I(2) が混在する共和分時系列の多変量 Beveridge-Nelson 分解

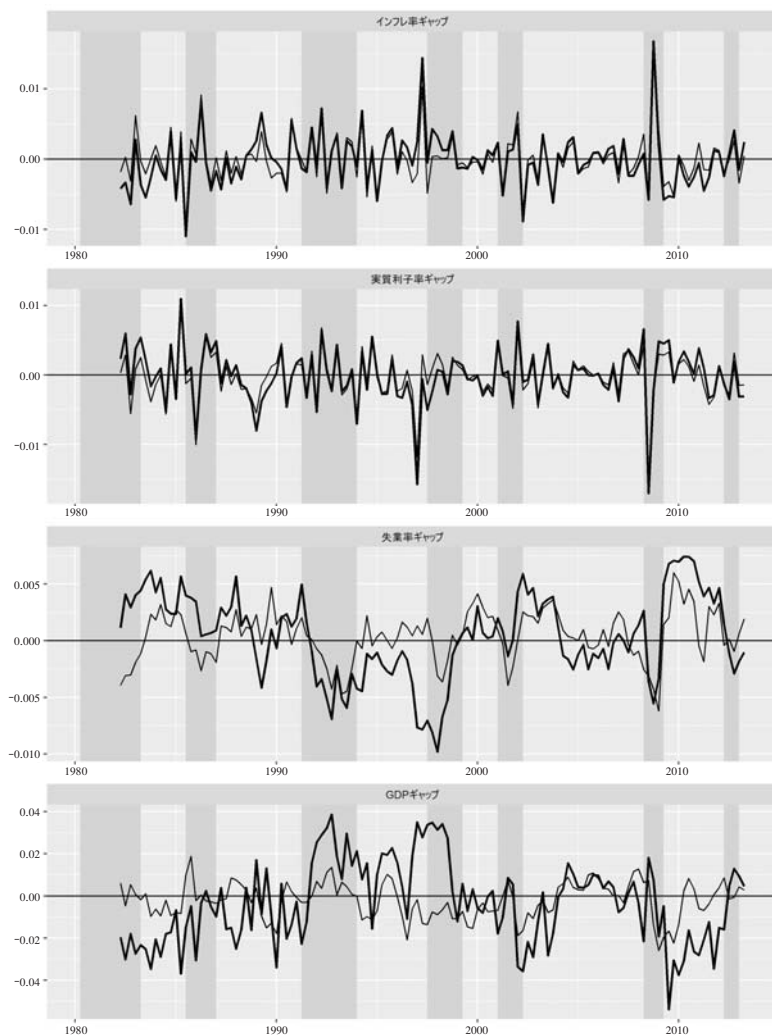


図1 実質 GDP の対数値を I(2) とした多変量 B-N 分解による日本のインフレ率・実質利子率・失業率・実質 GDP のギャップの推定値。太線は共和分あり、細線は共和分なし。シャドーは景気後退期。

これは誤差修正項が予測の改善に役立つ程度の差と解釈できる。推定値の信頼性に疑問は残るが、少なくとも共和分を考慮する意義は示唆している。

図2は共和分の有無によるギャップ間のフィリップス曲線とオークンの法則の比較である。「共和分あり」の散布図の方がフィリップス曲線もオークンの法則も明確に現れている。表3はギャップ間の相関係数である。失業率のフィリップス曲線は $-0.31$ から $-0.47$ 、GDPのフィリップス曲線は $-0.07$ から $0.35$ 、オークンの法則は $-0.28$ から $-0.86$ と、いずれも「共和分あり」の方が相関が強まっており、符号も理論と整合的である。これらの結果も共和分を考慮する意義を示唆している。

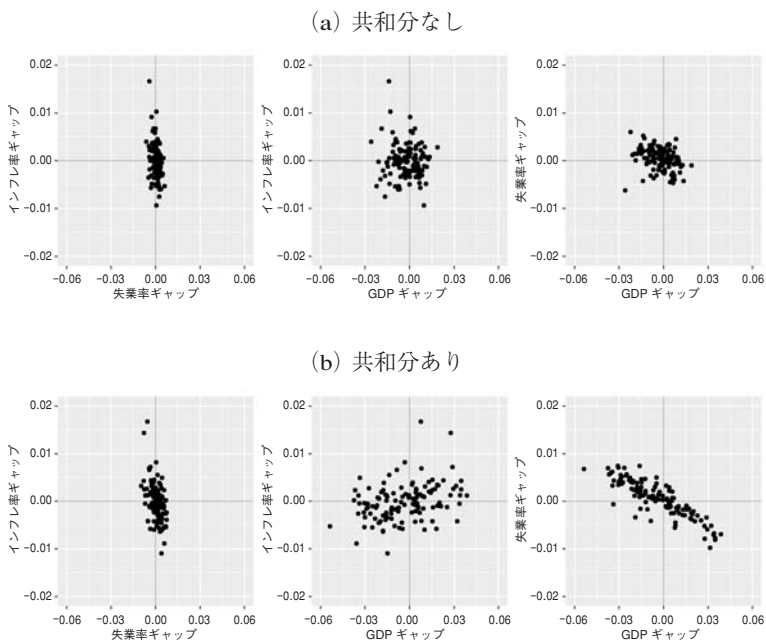


図2 フィリップス曲線とオークンの法則。

I(1) と I(2) が混在する共和分時系列の多変量 Beveridge-Nelson 分解

表3 ギャップ間の相関係数

	共和分なし				共和分あり			
	$\pi_t$	$\hat{r}_t$	$U_t$	$\ln Y_t$	$\pi_t$	$\hat{r}_t$	$U_t$	$\ln Y_t$
$\pi_t$	1.00	0.35	-0.31	-0.07	1.00	0.09	-0.47	0.35
$\hat{r}_t$		1.00	0.00	-0.22		1.00	0.34	-0.36
$U_t$			1.00	-0.28			1.00	-0.86
$\ln Y_t$				1.00				1.00

おわりに

Murasawa [2015] が提案した I(1) と I(2) が混在する時系列の多変量 B-N 分解を、本稿は I(1) と I(2) が混在する共和分時系列に拡張した。しかし I(2) 時系列の有無にかかわらず、最尤法による多変量 B-N 分解には以下の課題がある。

1. 多変量 B-N 分解の存在条件を課した VAR モデルや VECM の推定
2. トレンドとギャップの推定誤差の評価
3. 共和分階数などモデルの定式化の不確実性の考慮

これらの課題を Murasawa [2019] はベイズ法で解決している。

これまでマクロ経済時系列のトレンドとギャップへの分解には Hodrick-Prescott (H-P) フィルターが広く用いられてきた。しかし Hamilton [2018] は H-P フィルターを厳しく批判し、簡便な回帰フィルターの使用を推奨している。Hamilton の回帰フィルターは 1 変量 B-N 分解の確率的トレンドの簡便な推定値と理解でき、その残差がギャップとなる。それに対して多変量 B-N 分解はギャップの直接的かつ厳密な同時推定を目指している。したがって両者は同じ対象の別の推定手法と理解できる。両者の比較は興味深い今後の研究課題である。

### 参考文献

- Beveridge, S. and Nelson, C. R. 1981. "A New Approach to Decomposition of Economic Time Series into Permanent and Transitory Components with Particular Attention to Measurement of the 'Business Cycle'." *Journal of Monetary Economics* 7: 151-174.
- Cochrane, J. H. 1994. "Permanent and Transitory Components of GNP and Stock Prices." *Quarterly Journal of Economics* 109: 241-265.
- Evans, G. W. and Reichlin, L. 1994. "Information, Forecasts, and Measurement of the Business Cycle." *Journal of Monetary Economics* 33: 233-254.
- Gali, J. 2015. *Monetary Policy, Inflation, and the Business Cycle*. 2nd Edition. Princeton University Press.
- Hamilton, J. D. 2018. "Why You Should Never Use the Hodrick-Prescott Filter." *Review of Economics and Statistics* 100: 831-843.
- King, R., Plosser, C., Stock, J. and Watson, M. 1991. "Stochastic Trends and Economic Fluctuations." *American Economic Review* 81: 819-840.
- Murasawa, Y. 2014. "Measuring the Natural Rates, Gaps, and Deviation Cycles." *Empirical Economics* 47: 495-522.
- Murasawa, Y. 2015. "The Multivariate Beveridge-Nelson Decomposition with I(1) and I(2) Series." *Economics Letters* 137: 157-162.
- Murasawa, Y. 2019. "Bayesian Multivariate Beveridge-Nelson Decomposition of I(1) and I(2) Series with Cointegration." MPRA Paper 91979.
- Nelson, C. R. 2008. "The Beveridge-Nelson Decomposition in Retrospect and Prospect." *Journal of Econometrics* 146: 202-206.
- Newbold, P. and Vougas, D. 1996. "Beveridge-Nelson-Type Trends for I(2) and Some Seasonal Models." *Journal of Time Series Analysis* 17: 151-169.
- R Core Team 2019. *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria.