覚書：高校数学で学ぶ格差分析

著者	上島 康弘
雑誌名	甲南経済学論集
巻	57
号	3・4
ページ	95-105
発行年	2017-03-30
URL	http://doi.org/10.14990/00002385

甲南経済学論集第57巻第３・４号　2017年３月
〔研究ノート〕

覚書：高校数学で学ぶ格差分析

上　島　康　弘

要旨

小論では，当学会会員（甲南大学経済学部生）を対象にして，トマ・ピケティ『21世紀の資本』を題材に経済学者が格差問題をどう分析するのかを紹介する。通常の講義では数学を用いずに分析の結果だけを話すが，本来，自ら方法までを理解することが望ましい。高校で対数と微分を学んだ学生に，講義ノートの数学付録として読んでほしい。

キーワード：格差分析，再分配のない貿易自由化，資本/所得比率，
資本分配率

目次

はじめに

昨年の米国大統領選挙において，大方の予想を裏切ってトランプ氏が勝った。数々のスキャンダルや暴言にもかかわらず，白人中間層の多くが民主党のクリントン氏ではなく彼に投票したと言う。正確にはその理由は分らないが，私は背後に，所得格差の拡大と彼らの雇用減少があると思う。貿易自由化と移民の流入は国全体ではパイを大きくするが，所得の再分配と訓練機会

の提供がなければ勝ち組と負け組を作り出す。グローバル化によって当初には未熟練者だけが打撃を受けたが，今日では中国からの輸入の急増が中間層の雇用を浸食しつつある（Autor, Dorn, Hanson and Song〔2014〕)。

技術進歩もまた，所得の不平等化をもたらすもう一つの重要な要因である。米国では1980年代から大卒者と高卒者の間の賃金格差が拡大し，経済学者は原因の究明に奮闘した。主因とされたのは，情報通信技術の普及という技術変化だった。代表的な論文 Autor, Katz and Krueger〔1998〕の産業クロスセクション分析によると，就業者一人あたりのコンピュータ関連機器への投資額の高いところほど大卒者シェアの変化ポイントが有意に高い。もちろん，新興工業国からの輸入の増加が一定程度，国内の低技能者の相対賃金を下げたことを示す研究もある（Borjas, Freeman and Katz〔1992〕, Sachs and Shatz〔1994〕など)。今日では，人工知能を組み込んだ新たな自動化によって，近い将来，大量の技術的失業が生まれると予測する研究者もいる。

経済学者は不平等の問題をどのように分析しているのか。小論では，高校で対数と微分を学んだ当学会会員（甲南大学経済学部生）を対象にして，格差分析の方法を説明する。通常の講義では数学を用いずに，結果だけをかいつまんで話すことになる。しかし，アプローチの妥当性を自ら評価できなければ，もっともらしい言説にだまされてしまう。合わせて，高校数学の有用性を感じて，モデル分析や，そこから導かれる仮説の検証に興味をもってもらえれば幸いである。今回は，ピケティ『21世紀の資本』の主張する「$r>g$」と資本分配率の関係（r と g は次節で定義する）を取り上げる。講義ノートの数学付録のつもりで読んでほしい。

I　問題

資本主義の経済には「$r>g$」を満たすような内在的な性質があるのか，このとき富の不平等は拡大するのか。この問いを簡単な経済モデルを使って検

討しよう。言うまでもないが，モデルとは，現実の多くの側面を捨象した，けれども自己完結した小宇宙のことである。経済学者はここで何が起きるのかを調べることで，経済現象の背後にある因果関係を知ろうとする。モデルを数式で表現する必要はないが，数学は「推論の達人」として役に立つ－中学校で応用問題を連立方程式に直して解いたように，式をたてて操作すれば頭を使わなくても答にたどりつける。もっとも，数学的に美しくても，荒唐無稽なものもある。たとえエレガントでなくても，導かれる命題が事実と整合的なモデルを評価すべきことは言うまでもない。

II　モデルの描写

まず経済変数を記号で表そう。Y_t を t 時点（t 期）における一国の生産量，L_t を労働者数，K_t を物的資本（機械や設備），w_t を労働者 1 人あたりの賃金，r_t を物的資本 1 単位当たりの使用料，S_t を貯蓄（一国の所得（＝一国の生産量）のうちで消費せずに投資（＝物的資本の増加）にあてる分）とし，δ を資本減耗率（物的資本のうち生産に使用して磨り減った分）とする。

上記の変数から次の指標を定義する：

- $\alpha_t=\dfrac{Y_t-w_tL_t}{Y_t}$：資本分配率（資本所有者の取り分の割合），
- $\beta_t=\dfrac{K_t}{Y_t}$：資本/所得比率または資本係数，
- $s_t=\dfrac{S_t}{Y_t}$：貯蓄率（所得に占める貯蓄の割合），
- $g_t=\dfrac{Y_t'}{Y_t}$：経済成長率（一国の所得（＝一国の生産量）の変化率）。

ここで，変数の右肩にあるダッシュは，この変数の時点 t に関する微分を表わす。先進国における「典型的な値」は，$\beta_t=6$, $\alpha_t=0.3$, $r_t=0.05$, $s_t=0.12$, $g_t=0.02$ である（ピケティ〔2014，p. 57，p. 173〕）。

代表的企業の生産関数を

$$Y_t = \mathrm{F}(A_{Kt}\cdot K_t,\ A_{Lt}\cdot L_t)$$

とし，１次同次性を仮定しよう（すなわち，関数 $\mathrm{F}(\cdot,\cdot)$ のすべての変数が２倍になると関数の値も２倍になる）。資本と労働の量にかかる係数 A_{Kt}, A_{Lt} は効率パラメーターとよばれ，技術進歩によって上昇する。もし企業が利潤最大化を図るならば，資本の使用料 r_t は，要素市場での需給均衡により次のように決まることに注意しよう：

$$r_t = \text{資本の限界生産力} = \text{資本収益率},\ \frac{Y_t - w_t L_t}{K_t}.$$

また，貯蓄 S_t と資本減耗率 δ の定義から，資本の増加分について

$$K_t' = S_t - \delta K_t = s_t Y_t - \delta K_t = s_t \mathrm{F}(A_{Kt}\cdot K_t,\ A_{Lt}\cdot L_t) - \delta K_t \qquad (1)$$

が成り立つ。以上が，「$r > g$」と資本/所得比率，資本分配率の関係を探る舞台（モデル）である。

Ⅲ　モデルの展開

上記のモデルにおいて，資本/所得比率 β_t と資本収益率 r_t，資本分配率 α_t の三つがどう決まるのかを見よう。すなわち，「資本/所得比率には均衡水準があるのか，それはどのように決まるのか，資本収益率にとってどんな意味があるのか，それと国民所得における資本と労働の分配との関係は？」（ピケティ〔2014，p. 173〕）を考える。以下では，貯蓄率 s_t は時間の経過に関して一定（s）だと仮定する。

１　資本主義の法則

次の二つの式が役に立つ。まず

$$\alpha_t = \frac{Y_t - w_t L_t}{Y_t} = r_t\cdot\beta_t, \qquad (2)$$

次に，（１）を使って得られる式：

$$\beta_t' = \left(\frac{K}{Y}\right)' = \frac{K_t}{Y_t} \cdot \left(\frac{K_t'}{K_t} - \frac{Y_t'}{Y_t}\right) = \beta_t \cdot \left(\frac{s}{\beta_t} - \delta_t - g_t\right) \qquad (3)$$

である。前者は恒等式，すなわち，経済変数がどんな値をとっても成立する式であり，ピケティ氏の著書〔2014〕では「資本主義の第一基本法則」とよばれる。

2　命題

このモデルがどのように運行するのかを調べよう。

【命題１】

K_t の成長率が時間の経過に関して一定ならば，Y_t の成長率も一定で K_t の成長率に一致する：

K_t の成長率＝Y_t の成長率 g.

このとき，資本/所得比率 β_t は一定の値をとり，それを β と書けば

$$\beta = \frac{s}{g+\delta}$$

である。

《証明》

上記（１）により

$$\frac{K'}{K} = \frac{s}{\beta_t} - \delta$$

である。よって，左辺が一定ならば β_t は一定値 β をとり，β_t の定義により Y_t の成長率 g は K_t の成長率に等しい。（証明終り）

逆に，

【命題２】（Blume and Durlauf〔2015, pp. 756-757〕）

Y_t の成長率が一定で $g+\delta>0$ ならば，資本/所得比率 β_t は一定の値

に収束する。その値をβと書けば，

$$\beta=\frac{s}{g+\delta}$$

である。よって，長期的にK_tの成長率はY_tの成長率gに等しい。

《証明》

上記(3)により

$$\beta_t'=-(g+\delta)\cdot\beta_t+s$$

が成り立ち，これを満たす解は

$$\beta_t=C\cdot\exp(-(g+\delta)\cdot t)+\frac{s}{g+\delta}$$

である。よって，$g+\delta>0$ ならば，$t\to\infty$ のとき

$$\beta_t\to\beta=\frac{s}{g+\delta}$$

である。(証明終り)

したがって，資本または所得が一定の率で成長するならば，資本/所得比率は一定の値，$\beta=\frac{s}{g+\delta}$ に収束する。これを変形すると $\beta=\frac{s-\delta\cdot\beta}{g}=\frac{s_n}{g}$ である。ここで，$s_n\equiv\frac{S-\delta\cdot K}{Y}=s-\delta\cdot\beta$ は純貯蓄率である。時間が経過すると資本/所得比率が $\beta=\frac{s_n}{g}$ に収束することは，「資本主義に第2法則」とよばれる（ピケティ〔2014，pp. 172-179〕)。

この式は，（世界大戦や大恐慌などの）「ショックや危機の影響がなくなったときに，資本/所得比率が長期的に向かう潜在的な均衡水準」（ピケティ〔2014，pp. 178-179〕）を教えてくれる。実際，日本では太平洋戦争によって国富全体の4分の1が失われたが[(1)]，戦後，資本/所得比率は上昇して2010年には $\beta=\frac{0.146}{0.025}=5.84$ を回復した（ピケティ〔2014，表5-1（p. 182）と図

5-3（p. 180）]）。

資本/所得比率が一定であるならば，生産関数の形を限定できる。

【命題 3 】（宇沢の定理）

K_t と Y_t が同一の率 g で，労働者数も一定率，$n\equiv\frac{L'_t}{L_t}$ で成長するならば，生産関数はハロッド中立型であり，技術進歩率は $g-n$ でなければならない。すなわち，1 次同次の生産関数 F(･, ･) に対して，ある 1 次同次の関数 G(･, ･) が存在して

$$\mathrm{F}(A_{Kt}\cdot K_t, A_{Lt}\cdot L_t)=\mathrm{G}(K_t, A_t\cdot L_t),\ \frac{A'_t}{A_t}=g-n\equiv g_A$$

が成立する。

《証明》

証明は容易だが[2]，直観的に言えば，

$$Y_t=\mathrm{F}(A_{Kt}\cdot K_t, A_{Lt}\cdot L_t)=A_{Kt}\cdot\mathrm{F}\left(K_t, \frac{A_{Lt}\cdot L_t}{A_{Kt}}\right)$$

において，左辺の Y_t と右辺の K_t が同じ率 g で成長するためには，A_{Kt} は定数で，$\frac{A_{Lt}\cdot L_t}{A_{Kt}}$ の成長率が g でなければならないからである。（証明終り）

よって，このとき次の指標も一定になる：

・効率単位で測った資本/労働比率，$k_t\equiv\frac{K_t}{A_t\cdot L_t}$（∵分母の $A_t\cdot L_t$ も $g_A+n=g$ の率で成長するから），

・資本収益率，$r=\mathrm{G}_1(K_t, A_t\cdot L_t)=\mathrm{G}_1\left(\frac{K_t}{A_t\cdot L_t}, 1\right)$（∵ G_1(･, ･) は

（1） 中村隆英，宮崎正康〔1995〕。
（2） たとえば，Acemoglu〔2009, pp. 59-64〕を参照。

G(·, ·) の一番目の変数に関する導関数であり，これはゼロ次同次である)，

・資本分配率，α（∵(2))。

このような状態を均整成長経路（balanced growth path）と言う。

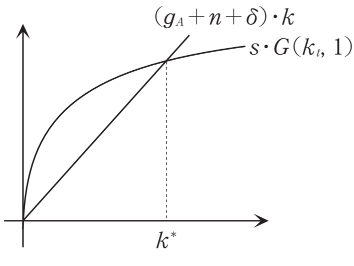
では，ショックや危機によって均整成長経路から外れたときに，経済は再びそこに戻ろうとするだろうか。たとえば，日本が直面しているショック―（戦争や恐慌ではなく）技術進歩率や人口増加率の低下（$g_A\downarrow, n\downarrow$）が起きたとき，資本収益率や資本分配率は以前のものよりも高くなるのか。次の命題がこれに答える。

【命題 4】

技術進歩率と人口増加率がそれぞれ一定の率 g_A と n で成長するとき，経済がいまどのような状態であっても，資本/労働比率，k_t はしだいに一定の値 k^* に収束する。ここで，k^* は

$$sG(k, 1)=(g_A+n+\delta)\cdot k$$

を満たすただ一つの解である（図を参照）[3]。すなわち，経済はしだいに K_t と Y_t が一定の率 $g=g_A+n$ で成長する均整成長経路に近づいて，そこではすでに見たように，資本収益率は



$$r^*=G_1(k^*, 1),$$

資本/所得比率は

$$\beta^*=\frac{s}{g_A+n+\delta}=\frac{s_n}{g},$$

（3） いわゆる Inada 条件が満たされて，資本の限界生産力は 0 の近くまで逓減するとしよう。

資本分配率は

$$\alpha^{*}=r^{*}\cdot\beta^{*}=\mathrm{G}_{1}(k^{*},1)\cdot\frac{s}{g_{A}+n+\delta}$$

である。

《証明》

k_t を t に関して微分すると

$$k_t'=\frac{K_t}{A_t\cdot L_t}\cdot\left(\frac{K_t'}{K_t}-\frac{A_t'}{A_t}-\frac{L_t'}{L_t}\right)=s\cdot\mathrm{G}(k_t,1)-(g_A+n+\delta)\cdot k_t$$

（∵（1））

である。よって，いま k_t が k^* より小さいならば $k_t'>0$ だから k_t は k^* まで上昇し，同様に，k_t が k^* より大きいときには k^* まで低下する。$k_t=k^*$ のときにはここにとどまる。（証明終り）

このモデルでは r^* と g の大小関係を確定できないが，上の式から $\frac{\alpha^*}{s_n}=\frac{r^*}{g}$ が成り立つ。「典型的な値」では，$\alpha^*>s_n$ だから $r^*>g$ が観察されそうである。

さらに，図から分かるように，$g_A+n+\delta\downarrow$ というショックが生じると，新しい均整成長軌道では

$$r^{*}=\mathrm{G}_{1}(k^{*},1)\downarrow,\ \frac{w_t^{*}}{A}=\mathrm{G}_{2}\left(1,\frac{1}{k^{*}}\right)\uparrow,\ \beta^{*}=\frac{s}{g_{A}+n+\delta}\uparrow$$

となり，資本分配率が以前より上昇するか，低下するかは分らない。しかし，次に示すように，生産関数において資本と労働の代替弾力性が 1 より大であるときには，資本分配率は上昇する。また，新たな均整成長経路に収束する過程において，資本/労働比率も，資本分配率も上昇する。

【命題 5 】（Piketty〔2015，脚注 5 〕）

生産関数において資本（K_t）と労働（$A_t\cdot L_t$）の代替弾力性，σ が 1 よ

り大ならば，（均整成長経路上であってもなくても）

$$k_t\uparrow\Leftrightarrow\alpha_t\uparrow\left(\text{および }\beta_t=\left\{G\left(1,\frac{1}{k}\right)\right\}^{-1}\uparrow\right)$$

が成り立つ。

《証明》

代替弾力性の定義によって，

$$\sigma=-\frac{d\ln(K_t/(A_t\cdot L_t))}{d\ln(r_t/(w_t/A_t))}.$$

これを変形して

$$\sigma\cdot d\ln(r_t/(w_t/A_t))=-d\ln(K_t/(A_t\cdot L_t)),$$

さらに，両辺に $\sigma\cdot d\ln(K_t/(A_t\cdot L_t))$ を加えると

$$\sigma\cdot d\ln\left(\frac{r_t\cdot K_t}{w_t\cdot L_t}\right)=(\sigma-1)d\ln\left(\frac{K_t}{A_t\cdot L_t}\right),$$

すなわち，

$$d\ln\left(\frac{\alpha_t}{1-\alpha_t}\right)=\frac{(\sigma-1)}{\sigma}d\ln k_t$$

を得る。したがって，$\sigma>1$ のときには，k_t が上昇すると右辺はプラスになり α_t も上昇する。同様に，k_t が低下すると α_t も低下する。（証明終り）

おわりに

均整成長経路においては，資本/所得比率も資本分配率も一定であり，$\alpha^*>s_n$ ならば $r^*>g$ だが，逆ならば $r^*<g$ である。技術進歩率や人口成長率が低下したとき，たしかに，資本と労働が代替的であれば，新たな均整成長経路に向かう途中では資本/所得比率と資本分配率の上昇が同時に起きる。けれども，これは収束までの現象であり，しかも技術進歩率や人口成長率が上昇したときには逆の現象が起きる。よって，資本主義の本質的な特徴とは

言えない。そもそも富の不平等化を正しく分析するには，代表的個人を前提にした成長モデルでは限界がある。ここで紹介したモデルは，ピケティ氏の主張を検討するための導入部分と理解すべきである。

参考文献

Acemoglu, Daron 2009 *Introduction to Modern Economic Growth,* Princeton University Press.

Autor, David H., David Dorn, Gordon H. Hanson and Jae Song 2014 “Trade Adjustment: Worker-Level Evidence,” *The Quarterly Journal of Economics,* 1799-1860.

Blume Lawrence E. and Steven N. Durlauf 2015 “Capital in the Twenty-First Century: A Review Essay,” *Journal of Political Economy,* vol. 123, no. 4, 749-777.

Borjas, George J., Richard B. Freeman, and Lawrence F. Katz 1992. “On the Labor Market Effects of Immigration and Trade,” in *Immigration and the Work Force,* ed. by George J. Borjas and Richard B. Freeman: The University of Chicago Press.

Piketty Thomas 2015 “About Capital in the Twenty-First Century,” *American Economic Review,* 105 (5): 48-53.

Sachs, Jeffrey D. and Howard J. Shatz 1994. “Trade and Jobs in U. S. Manufacturing,” *Brookings Papers on Economic Activity* 1, 1-69.

トマ・ピケティ（2014）『21世紀の資本』（山形浩生，守岡桜，森本正史訳）みすず書房。

中村隆英，宮崎正康（1995）『史料・太平洋戦争被害調査報告』東京大学出版会。