博士論文

算数教育における割合についての数理構造に関する研究

2015 年

甲南大学大学院 自然科学研究科

坂井武司

目　　次

第１章　はじめに

算数教育において，割合は，児童にとって理解することが難しく，教師にとって指導することが難しい単元であると言われている。割合について考える場合，問題の状況として，比較量と基準量から割合を求める「割合に関する状況」，基準量と割合から比較量を求める「比較量に関する状況」，比較量と割合から基準量を求める「基準量に関する状況」という３つの状況がある。平成 19 年度から実施されている全国学力・学習状況調査の結果において，これら３つの状況に関する正答率は 60 ％程度であり，児童が割合の数理構造を理解していない現状がうかがえる。また，教師の意識に関する日本数学教育学会算数興味調査委員会の報告[1]において，割合は，「指導しにくい単元」の第２位，「児童がよく理解できなかったと思われる単元」の第３位，「もっと時間をかけて教えたい単元」の第２位である。また，平成 15 年度小・中学校教育課程実施状況調査質問紙調査集計結果[2]において，「割合は児童にとって理解しにくい」と回答した教師は 54.5 ％であった。割合を指導することに対して，教師が課題を感じている実態がうかがえる。

割合指導の問題点は 1950 年代から指摘されており，その内容は今も変わっていない。割合は，整数や小数の乗除，分数等の割合を学習する以前の多様な教科内容と関連している。系統性の強い算数という教科において，「割合」の単元だけで割合指導の問題点を克服することは難しい。そのため，小数の乗法，除法の単元において，乗法的構造を基にした図を用いることにより，小数の乗法，除法の意味を理解させ，整数倍から小数倍へと意味の拡張を図る実践研究が多くなされている。しかし，割合の見方や考え方が児童に定着しないことには，別の理由がある。

1.1　概念的知識と手続き的知識

(1)宣言的知識と手続き的知識

Anderson, J. R. は，ACT 理論[3]及びそれを拡張した ACT*理論[4]に関する研究において，知識獲得過程における知識の変化のメカニズムを明らかにしている。知識獲得過程は，宣言的段階と手続き段階という連続した２つの段階に区別される。宣言的段階は，「初期のプロダクションが問題解決に適した特定のプロダクションに置き換わる手続き化」[4,　p.235]と「独立していたプロダクションが結び付き，１つのまとまったプロダクションに変化する合成」[4,　p.235]というメカニズムにより知識の編集がなされる段階である。また，手続き的段階は，「一般的なプロダクションが問題状況に適したより特殊化したプロダクションに変化する分化」[4, p.241]，「プロダクションの適用領域が拡張され，より広い文脈で適用できるようになる般化」[4, p.241]，「よく使用されるプロダクションの強さが上がる強固化」[4,　p.241]というメカニズムにより知識の調整がなされる段階である。このような宣言的段階に用いられる知識を宣言的知識(概念的知識)，手続き的段階に用いられる知識を手続き的知識という。ACT*理論に基づいた手続き的学習における知識獲得過程[5,　p.26]を図 1-1 に示す。ACT*理論において，概念的知識から手続き的知識という結び付きが示唆される。

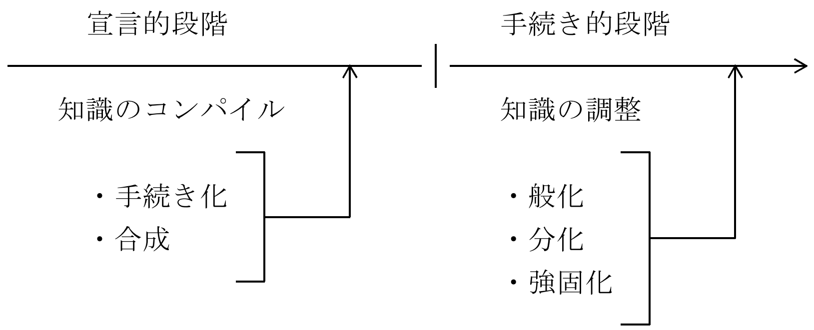


図1-1　知識の変化のメカニズム

Hiebert, J., & Lefevre, P. の見解によると，概念的知識は,「色々な関連に富む知識として特徴付けられる知識のネットワーク」[6, p.3]であり,「新しい知識を適当な知識のネットワークあるいは構造へ同化したり，ネットワーク内の整理されていない知識を関係付けたり，独立したネットワーク間を関係付けたりする認知的再構成」[6, p.4]によって発達する。さらに，認知的再構成は,「情報が提示されるレベルと同じレベルの抽象性において構成され，特殊な文脈に結び付けられている初歩的レベル」[6, p.4]と「結び付けられている断片的な情報よりも高い抽象的なレベルにおいて構成され，特殊な文脈にあまり結び付けられていない内省的レベル」[6, p.5]に区別される。一方，手続き的知識は,「数学の形式的言語あるいは記号の表象体系という部分と数学的課題を完成するためのアルゴリズムあるいはルールという部分から構成された知識」[6, p.6]である。計算のような記号操作のルールに関して,「手続き的知識を活性化したりすることやそのルールの選択を指示したりすることにおいて，概念的知識は何ら役立たない」[7, p.181]という側面がある。しかし,「記号に関する対象を操作すること及び対象に関する活動と記号に関する活動とを比較することにより，手続きが定式化される」[8, p.338]過程において，概念的知識と手続き的知識が結び付き，記号操作に関する手続きが発展する。

Byrnes, J. P., & Wasik, B.A. の見解によると，概念的知識は,「〜であるということを知ること，即ち，ある領域の核となる概念やその概念の相互関係から構成される知識」[9, p.777]であると定義される。概念的知識は,「いくつかの異なる構成物を使用すること，意味論的ネットワーク，階層性，心的モデルを含む」[9, p.777]ことを特徴とする。他方，手続き的知識は,「どのようにするのかを知ること，即ち，色々な目標に到達するために要求される一歩一歩の歩みに関する知識」[9, p.777]であると定義される。手続き的知識は,「技能，方略，結果，内面化された行為のような構成物を使用する」[9, p.777]ことを特徴とする。また，概念的知識と手続き的知識の関係として,「概念的知識は手続き的知識を獲得するための必要条件であるが，十分条件ではないとする動的相互作用の見解」[9, p.778]と「概念的知識は手続き的知識を獲得するための必要条件かつ十分条件であるとする同時活性化の見解」[9, p.777]が示されている。これら２つの見解に加えて，概念的知識は手続き的知識を獲得するための十分条件であるが，必要条件ではないとする見解が考えられる。

Rittle-Johnson, B., & Alibali, N. W.［10］, Rittle-Johnson, B., Siegler, R. S., & Alibali, N. W.［11］の見解によると，概念的知識は,「ある領域を支配する原理やある領域における知識の単位間の相互関係の暗黙的または明示的な理解」[11, pp.346-347]であると定義される。一方，手続き的知識は,「問題を解決するための行為の因果的連鎖を実行する能力」[11, p.346]であると定義される。概念的知識における暗黙的な理解とは,「同数累加のかけ算において乗数は整数であり，積は被乗数より大きい。わり算の等分除において，除数は整数であり，除数も商も両方とも被除数よりも小さい」[12, p.14]というような原始的モデルに基づいた理解である。原始的モデルは,「対応する概念や演算の初期に学校で教えられた方法をモデルが反映するというものである。最初の説明が子供達によって学ばれるとき，それは，彼らの知的行動に強く根ざす傾向がある。また，原始的で自然で基本的である人間の知的行動の特徴と一致している」[12, p.15]ため，影響力が強く，新たな知識の獲得に対して抵抗を引き起こす。手続き的知識における因果的連鎖とは,「課題の完了に対して，最初の手続きは入力として作用し，次の手続きによって認識される結果を次々に作り出す」[6, p.6]というプロダクションシステムを意味する。

(2) ミスコンセプションとプリコンセプション

暗黙的な理解に見られるような子供が有する概念として，ミスコンセプションやプリコンセプションといった概念化がなされている。ミスコンセプションは,「子供が独自に構成した考えや思考のプロセス」[13, p.1241]である。つまり,「子供が授業で形式の整った数学的定義や理論に遭遇したとき，誤って同化したもの」[14, p.177]であり，誤解や何らかの欠如に起因する。したがって，数学的に正しくない概念である。一方，プリコンセプションは，生活や学習を含む様々な経験を通して,「教授される以前に，子供が独自に導き出した考え」 [13, p.1241],［15, p.66]である。つまり,「一般化され

た形式は有していないものの，初歩的なモデルあるいは理論の性質を有している」［16, p.98］。したがって，特別な場合において数学的に正しい概念であるが，一般性が保証されていない概念である。また，プリコンセプションは，「暗黙的に獲得されており，いったんある条件が整った時に自動的・無意識的に呼び起こされる」［17, p.10］ため，「子供は，教授された後もプリコンセプションに固執し，教授される概念を既存のプリコンセプションに取り込む」［18, p.126］傾向がある。プリコンセプションは変容し難く，概念的知識や手続き的知識の獲得を阻害する。算数教育におけるプリコンセプションに関する研究として，高垣マユミ［16］，［17］，［19］，［20］は，高さ概念の獲得過程に見られるプリコンセプションを明らかにし，高さのプリコンセプションを変容させる教授ストラテジーについて検討を行っている。

1.2　一般化モデルと反復モデル

(1)一般化モデル

概念的知識と手続き的知識の同時活性化とは，「概念的知識と手続き的知識の保持，効率的な探索過程，これら既存の知識の再構成を必要としない新しい要素への適合がなされることにより，一般化と抽象が可能となる」［21, p.108］ことであると考えられる。Dörfler, W.［22］は，抽象と一般化の過程及びその意味について明らかにしている。図 1-2 に Dörfler, W.の一般化モデルを示す。また，このモデルに基づいて，一般化の過程の概略を示す。

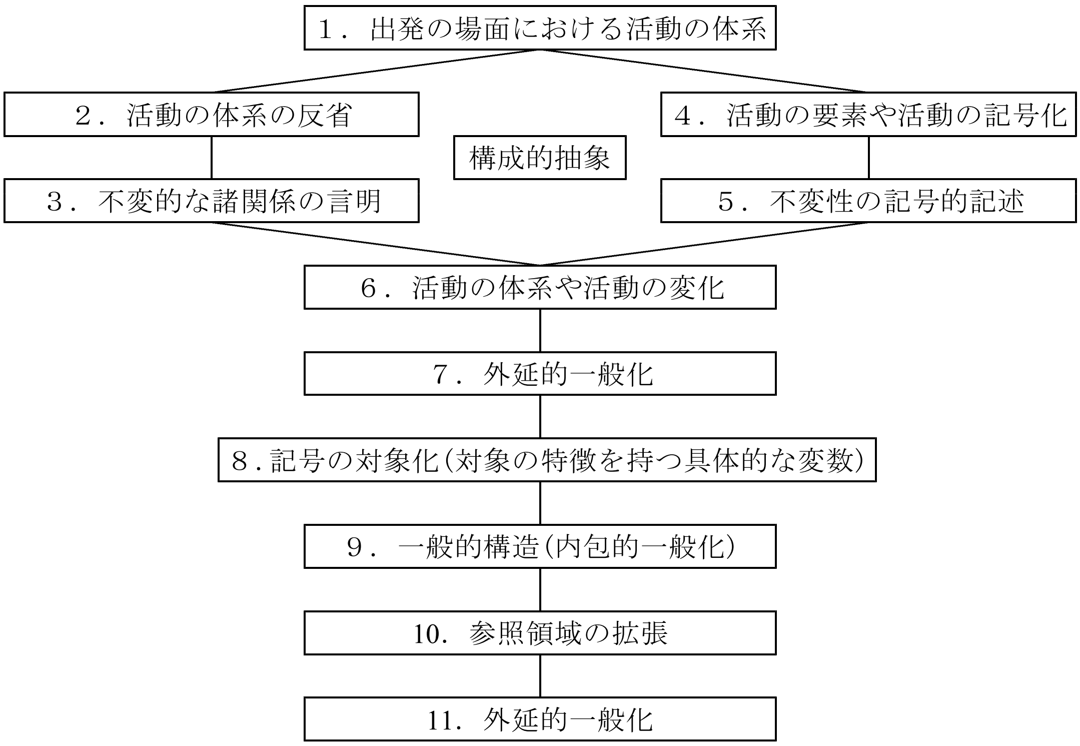


図1-2　Dörfler, W.の一般化モデル

「１．出発の場面における活動の体系」

出発点は活動を具体化する。活動は，具体的な活動，心的あるいは記号的活動である。

「２．活動の体系の反省」

活動の目的，手段，方針が反省され，活動に関する構成要素間の関係に注意が向けられる。

「３．不変的な諸関係の言明」

活動の繰り返しにより，構成要素間の関係は不変性を有するようになる。

「４．活動の要素や活動の記号化」

不変性を記述するために，言語的，図的，幾何的，代数的な記号が導入される。
「５．不変性の記号的記述」
記号という手段により，不変性は記述され固定される。
「６．活動の体系や活動の変化」
「活動が構成的抽象により操作に変換される」[23, p.122]ことにより，全ての記号に関連する参照領域は，徐々に拡張される。
「７．外延的一般化」
不変性を通して記述された活動の構造は保持され，操作の記号的側面において，記号が様々な活動の代替性をもつようになる。つまり，記号は代用性という特性を持つ変数となる。
「８．記号の対象化(対象の特徴をもつ具体的な変数)」
不変性の記号的記述を再考することにより，記号は参照領域から分離され，独立した対象となる。
「９．一般的構造(内包的一般化)」
記号は対象の性質をもつ変数であり，「対象とする概念の内包は，一般的構造をもつ」[23, p.123]ため，不変性は抽象化された一般性を形成する。
「10．参照領域の拡張」
変数を解釈することにより，新たな活動は一般化の下に包括され，一般化の参照領域はさらに拡張される。
「11．外延的一般化」
「一般化は循環し，記号の対象化，内包的一般化，参照領域の拡張が繰り返される」[24, pp.2-3]ことにより，一般性において表現された不変性は，妥当性をもつようになる。
「構成的抽象」
不変性の記号的記述は，抽象の過程という特徴をもつ。したがって，「１．出発の場面における活動の体系」～「５．不変性の記号的記述」の抽象の過程は，活動によって構成されるため，構成的抽象に属する。また，記号は不変的関係と操作から意味を得て，対象化される。したがって，「８．記号の対象化」において構成的抽象は完了する。

Dörfler, W.の一般化モデルでは，「活動の反省が抽象を誘導するように，記号の反省を可能にする認知機構を一般化とし，抽象と一般化を統合する形で数学的一般化を構想している」[23, p.119]ため，この一般化モデルを考慮した授業設計により，概念的知識と手続き的知識の同時活性化がなされると考えられる。しかし，「一般化モデルに基づく授業設計に関して，一般化モデルの各段階に対してどのような場面を対応させるのか，また，各段階をつなぐ直線に対してどのような指導方法を用いるのかについて，具体例は示されていない」[25, p.56]。

(2)反復モデル

Rittle-Johnson, B., Siegler, R. S., & Alibali, N. W. [11]は，概念的知識と手続き的知識の関係として，図 1-3 に示す概念的知識と手続き的知識の発達に関する反復モデルを提唱している。

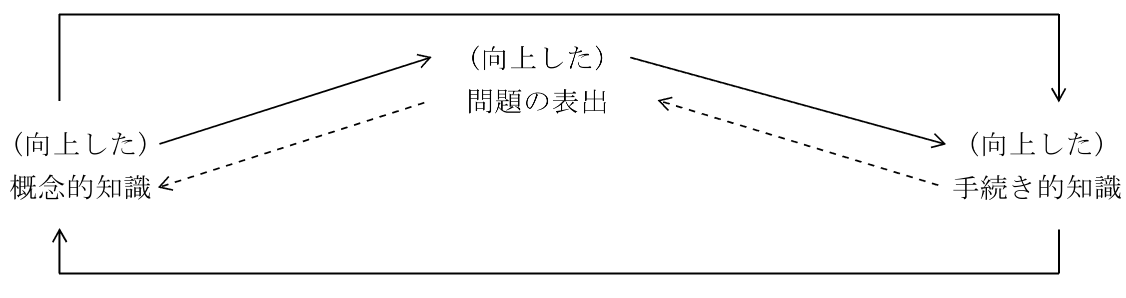


図1-3　概念的知識と手続き的知識の発達に関する反復モデル

この反復モデルは，概念的知識と手続き的知識に関する発達的優位性を意味していない。概念的知

識と手続き的知識の両方に関して，子供は部分的な知識を有しており，優位な知識の向上がもう一方の知識の向上を導きながら互いに発達することを意味している。概念的知識と手続き的知識を結び付ける上で重要な役割を果たすのが，問題の表出である。問題の表出は，「問題解決中の作業記憶において，ある問題の内的描写または再形成」［11, p.347］として定義され，一方の知識から他方の知識への結び付きの基礎となり，知識の向上を促進させる。

1.3　割合に関する概念的知識と手続き的知識

(1) 割合の定義

割合の概念に関して，内包としての割合の定義は，「同種の２つの数量 A，B があり，A が B の何倍であるかを表した数 p を割合という」［26, p.34］である。B を基準量，A を比較量とすると，「p ＝ A ÷ B」，「A ＝ B × p」，「B ＝ A ÷ p」という関係が成り立つ。また，割合の概念の適用される範囲としての外延は，諸事物の関係について，倍，百分率，歩合のような割合を用いた表記の仕方であると考えられる。倍は基準量を１とした場合である。百分率は基準量を 100 とした場合であり，単位として％を用いる。歩合は基準量を 10 とした場合であり，単位として割，分，厘を用いる。この割合の定義に基づき，現行の６社の第５学年の教科書［27］-［32］では，「ある量をもとにして，くらべる量がもとにする量の何倍にあたるかを表した数を，割合といいます。割合は，次の式で求めることができます。割合＝くらべる量÷もとにする量」［28, p.42］と同様の記述がなされている。直芳子［33］，［34］によると，これまでの教科書に記述された割合の定義に関して，「一方の数や量が他方のどれだけにあたるかという考え方を割合といいます」というように考え方を割合とするもの，「２つの量の割合は一方をもとにして他方が何倍，または，何分の何にあたるかで言い表すことができます」というように割合を関係に近い意味で使うもの，「一方をもとにして他方が何倍にあたるかを表した数を割合といいます」というように割合を数とするものの３つが存在する。しかし，昭和 52 年の学習指導要領以降の教科書では，割合は数として定義されている。

前田隆一は，「割合は，単なる倍とは違う意味があり，量を直接比べるのではなく，各基準量に対する各量の相対的な大きさ（倍）を比べるときに積極的な意味がある」［35, pp.240-241］と述べている。つまり，比較量÷基準量の値を求めるだけであれば，比較量が基準量の何倍かを示しただけである。倍と割合を明確に区別する立場から，田端輝彦は，「比例関係を前提とした２組の数量関係を比較するときに割合という用語を用いるべきである」［36,　p.25］と指摘している。２組の数量関係を比較する意味やその表し方において，割合の概念は比・比例の概念と関連している。同種の２つの数量 A，B の割合を表す方法として，「A : B のように２数の組で表す方法と，A/B のように１つの数で表す方法がある。A : B と表された A と B の割合を A と B の比といい，A（前項）を B（後項）で割った商 A/B を比の値という」［26,　p.308］。つまり，比の値は A の B に対する割合を表している。「比は２つの数量間の数的関係を表し，比例は２つの割合の相当性に関係している」［37, p.198］。したがって，A の B に対する比が C の D に対する比に等しいとき，A，B，C，D は比例する［26, p.117］，［38, p.181］といい，A : B ＝ C : D と表される。Copeland, R. W. が「A/B ＝ C/D は比例の考えを表している」［39, p.195］と述べているように，A : B ＝ C : D という比例式において，AD ＝ BC，A/B ＝ C/D，A/C ＝ B/D，B/A ＝ D/C，C/A ＝ D/B という関係が成り立つ。つまり，比例するとは，２つの数量の割合が等しいことを意味している。

(2) 乗法的構造

Jane-Jane, L., & Watanabe, T. は，「割合，比，比例の概念は，乗法的概念の分野の発達にともなって発達する」［40, p.216］と述べている。また，Vergnaud, G. は，「乗法・除法は，解法に乗法・除法を用いる必要がある問題場面全体の集合として定義され，乗法的構造により，単純かつ多様な比の問題として説明される」［41,　p.141］と述べている。割合の概念は，乗法的概念としての乗法的構造と関連している。そこで，Vergnaud, G.［42］の見解を援用し，乗法的構造の概要を示す。割合の問題場面は，割合，比較量，基準量に関する３項関係が成り立つ。しかし，乗法的構造は，「３項関係から成るの

ではなく，子供が３項関係を引き出さなければならない４項関係から成り，二項演算または単項演算のどちらかが引き出される」[42, p.129]。つまり，割合の問題場面は，割合，比較量，基準量及び乗法の単位元である１の４項関係から成る。そこで，p を割合，A を比較量，B を基準量とした場合の二項演算及び単項演算について，図 1-4 ～図 1-8 に示す。

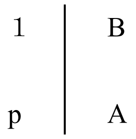


図1-4　二項演算

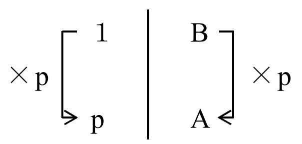


図1-5　単項演算①

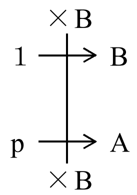


図1-6　単項演算②

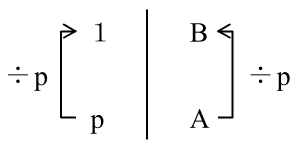


図1-7　単項演算③

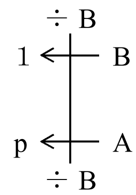


図1-8　単項演算④

図 1-4 において，A が未知数の場合，乗法の問題場面として B × p という二項演算が導かれる。B または p が未知数の場合は，除法の問題場面として A ÷ p または A ÷ B という二項演算が導かれる。単項演算①と単項演算②は乗法を表している。図 1-5 における× p は１を p に対応させるスカラー演算子であり，図 1-6 における× B は１を B に対応させる関係演算子である。単項演算①から，B × p ＝ A を導くことができる。単項演算③は等分除，単項演算④は包含除を表している。図 1-7 における÷ p は p を１に対応させるスカラー演算子であり，図 1-8 における÷ B は B を１に対応させる関係演算子である。単項演算③が単項演算①の逆演算という観点から，A ÷ p ＝ B を導くことができる。しかし，「子供は× p を÷ p に変える心的逆操作が難しいため，B × p ＝ A から B を求める」[42, p.131]傾向がある。また，単項演算④は単項演算②の逆演算であるが，「子供は逆の関係演算子を思いつくことがなく，スカラー演算子を得て，転置する」[42, p.132]傾向がある。渡会陽平[43]は，乗法的構造において，具体的な操作に基づいて乗法・除法の意味を説明したり乗法・除法を立式したりするために必要な theorems-in-action を明らかにしている。theorems-in-action は，「問題を解決するために，操作または一連の操作を選択するとき，子供によって考慮される数学的な関係」[41, p.144]と定義される。また，図 1-8 の構造に関して，「包含除の意味である同数累減の操作を説明することができない」[43, p.9]という指摘がある。

(3) 双方向の見方

蒔苗直道が，「倍概念を扱う際には，その逆の場合にも触れることが多く，両方の見方ができることが必要である」[44, p.6]と指摘しているように，「割合は，基準量によって２つの数量の関係の表し方が異なる」[45, p.3]。同種の２つの数量 A，B（A ＞ B）を比較するとき，大小の比較，差による比較，割合による比較がある。大小の比較に関して，「A は B より多い」と「B は A より少ない」という２つの見方がある。差による比較に関して，「A は B より A － B 多い」と「B は A より A － B 少ない」という２つの見方がある。割合による比較に関して，「A は B の A/B」と「B は A の B/A」という２つの見方がある。このように同種の２つの数量を比較するとき，どちらを基準とするかにより２つの見方が存在する。これを双方向の見方という。「基準を考えなければ数は生まれないと言えるほど，基準という考え方は本質的なものである」[46, p.12]。しかし，子供は基準を用いてはいるが，その意識は低いという指摘がなされている[46]，[47]。

差による比較において視点が当たるのは差の部分であり，双方向の見方に基づいて比較をしても差は変わらない。そのため，差による比較を考える場合，「A は B より A － B 多い」と「B は A より A

－ B 少ない」という双方向の見方に基づいた指導がなされることは殆どない。しかし，割合による比較において視点が当たるのは，量そのものではなく，基準量に対する相対的な大きさである。この意味において，双方向の見方に基づいた同種の２つの数量の関係を把握させる指導が重要であると考えられる。

(4)割合に関する概念的知識と手続き的知識の定義

本研究では，割合の概念を割合に関する概念的知識と手続き的知識の２つの側面から捉え，前述した割合の定義及び Hiebert, J., & Lefevre, P.［6］，Rittle-Johnson, B. Siegler, R. S., & Alibali, M. W.［11］の見解を基に，割合に関する概念的知識を「初等レベルとしての割合，比較量，基準量の相互の関係や内省的レベルとしての一般化された原理である乗法的構造についての暗黙的または明示的な体系」と定義する。割合に関する概念的知識の具体例として，次のことが考えられる。

・同種の２つの数量の関係の把握における基準量と比較量の意味
・同種の２つの数量の関係の把握における双方向の見方
・割合の定義
・割合＝比較量÷基準量，比較量＝基準量×割合，基準量＝比較量÷割合という式
・倍，百分率，歩合の意味
・割合，比較量，基準量を含む文章表現
・問題場面に対応する２組の数量の関係の割合による比較

また，割合に関する手続き的知識を「割合の問題解決における順序や方法に関して，原理的・統一的に組織づけられ，客観的妥当性を要求し得る判断・実行の体系」と定義する。割合に関する手続き的知識の具体例として，次のことが考えられる。

・割合の問題解決における立式に対する記号と構文上のルール
・割合の問題解決における手続き上のルールやアルゴリズム
・割合の問題解決の方略

1.4　割合と確率

(1)確率の概念

確率には，古典的確率，経験的確率，公理的確率がある。古典的確率は，Laplace, P. S.によって集大成された確率の概念であり，「事象 A の確率は，(A に都合のよい場合の数)/(可能な場合の数)と定義される。事象 A は有限事象であり，どの場合も同じ程度に可能なことを前提としている」[48, p.4]。標本空間を Ω，根元事象を ω，$\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_N\}$とすると，確率 $P(\omega_i)=1/N$　$(i=1, 2, \cdots, N)$である。このとき，Ω の部分集合である事象 A に含まれる根元事象の個数を n(A)とすると，$P(A)=n(A)/N$となる。また，事象 A と事象 B に関して，$A\cap B=\phi$ならば，$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$が成り立つ。さらに，事象 B が事象 A の余事象であるとすると，$P(\overline{A})=1-P(A)$が成り立つ。経験的確率は，Bernoulli, J.の大数の法則に基づいた確率の概念である。大数の法則とは，「ある試行を n 回繰り返したとき，事象 A が起きた回数を n(A)で表すと，相対頻度 n(A)/n は，n が大きくなるにしたがってある値 P(A)に近づく」［48, pp.8-9］ことである。公理的確率とは，Kolmogorov, A. N.によって確立された確率の概念であり，確率は公理的に定義される。つまり，「$\Omega=\{\omega, \omega', \cdots\}$を任意の標本空間とし，次の３つの条件を満たす事象 A の実数値関数 P(A)を確率という」［48, p.9］。

(ⅰ) $0\leqq P(A)$

(ⅱ) $P(\Omega)=1$

(ⅲ) $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$が互いに排反$(A_i\cap A_j=\phi,\ i\neq j)$するとき，$P(\sum_{n=1}^{\infty}A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)$

Steinbring, H.［49］-［51］は，古典的確率，経験的確率，公理的確率に関する概念，記号/象徴，指示対象/指示の状況の間の関係を図 1-9 のようにまとめている。

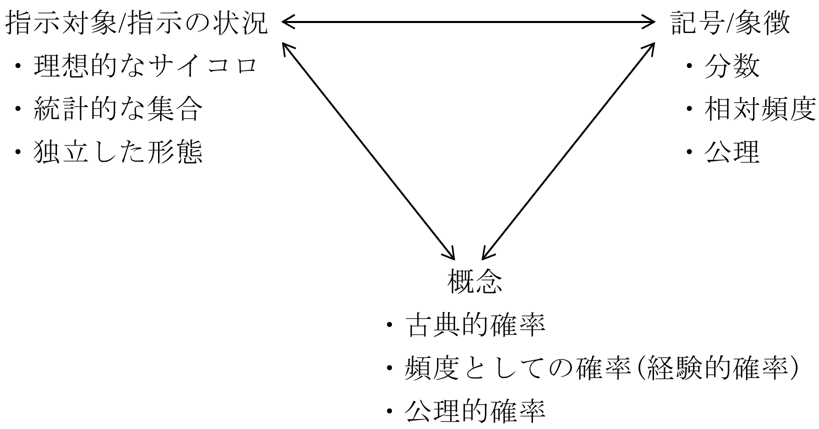


図1-9　確率の概念に適用された認識論的三角形

「歴史的に見ると，確率の初期の概念は，分数という記号体系によって符号化されてきた」［49, p.52］。分数によって符号化するとは，表 1-1 に示す確率概念の認識における方法の対象化［52］の第２水準において，「全事象の空間を対象とし，その部分集合である事象に着目し，その事象と全事象の個数の比の値を求めることにより偶然を計量化する」［52, p.47］ことである。

表1-1　確率概念の認識における方法の対象化

	対象	方法
第０水準	偶然	列挙した結果
第１水準	試行の結果（列挙した結果の集合）	全事象の要素
第２水準	全事象の空間（根元事象の集合全体）	数学的確率
第３水準	数学的確率（の集合）	確率の命題

しかし，三角富士夫が「子供は確率と割合を同一視しており，確率として用いられる数が蓋然性と深く結び付いているという実感に欠ける」［53,　p.16］と指摘するように，不確定な事象が持つ偶然性の度合いを表す蓋然性に関して，割合と確率は異なる概念である。口分田政史，渡邉伸樹は，確率について未習の小学校１，２，３年生を対象に，確率に関する認識調査を行い，「３年生は素朴的に割合に着目して，蓋然性の大小比較を行う」［54,　p.30］傾向があることを見出している。確率に関する場面において，「割合で見る，即ち，比例的立場から偶然性を質的に比較するようになることは，比(比の値)に関する適切な概念の獲得に先立つ」［55,　p.83］ことを考慮すると，割合と確率は異なる概念であるが，確率について未習の子供は，割合を用いることにより確率に関する場面にアプローチできる。確率 P(A)は０≦ P(A)≦１であるが，割合 p は部分集合である事象と全事象の個数の比の値とは限らない。部分集合である事象同士の個数の比の値の場合も考えられるため，割合 p は０≦ p である。梶光雄，岩田義孝，川瀬喜生ほか［56］は，確からしさの見方・考え方の基盤となる内容の１つに割合(百分率，比，比の値)を取り上げている。Clark, M. R., Berenson, S. B., & Cavey, L. O.［57］は，割合と分数との関係における確率の位置づけを図 1-10 のように示している。

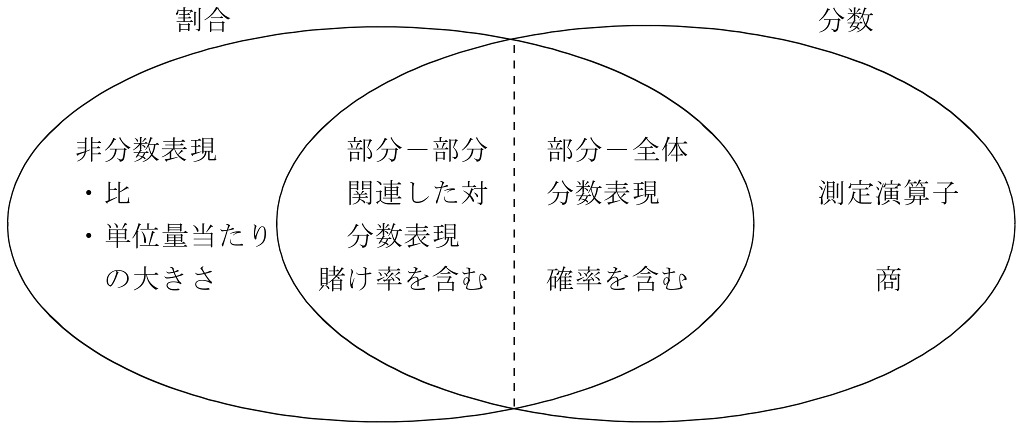


図1-10　割合と分数との関係における確率の位置づけ

(2)「部分－部分」と「部分－全体」

Jones, G. A., Thornton, C. A., & Mogill, A. T.［58］は，初期の確率の考えの発達を促す要素の１つとして,「部分－部分」と「部分－全体」に基づいた推論の重要性を指摘している。Singer, J. A., & Resnick, L. B.［59］は，第６学年，第７学年，第８学年の 15 人の子供を対象に，赤いおはじきの数，黒いおはじきの数，おはじき全体の数を変化させた２つの集合において，赤いおはじきが出る蓋然性を比較する問題を用いて，「部分－部分」と「部分－全体」に関する調査を行った。子供は「赤いおはじきの数とおはじき全体の数が提示される「部分－全体」問題において，欠けている部分である黒いおはじきの数を考慮する。しかし，赤いおはじきの数と黒いおはじきの数が提示される「部分－部分」問題において, 欠けているおはじき全体の数を考慮することは殆どない」［59, P.243］ことを見出している。子供は「部分－全体」より「部分－部分」に着目する傾向がある。

Spinillo, A. G. は，７，８歳の子供を対象に，青とピンクのおはじきの数を変化させた３つの集合において，目標となる色を引き当てる蓋然性により集合を順序づける問題を用いて,「幼い子供でも,「部分－部分」の関係に基づいて確率の判断をすることができる」［60, p.358］ことを明らかにしている。これらの結果から，割合を用いることにより確率に関する場面にアプローチする初期の確率の考えにおいて,「部分－部分」に基づいた推論は重要な役割を果たす。

1.5　比例的推論

(1)比例的推論の方略

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. によると，比例的推論は,「２つの変数と倍数の比較の感覚，情報の幾つかの部分を心的に貯えたり処理したりするべき能力を含む数学的推論の形式である」と定義され,「比例的推論の本質的な要素は，構造的類似性の認識である」［61, p.93］。また，比例に関する課題は，加法的関係と乗法的関係の両方を含んでおり，比例的推論に関する理解の初期段階においては，課題を解決するために，加法的推論が乗法的推論よりも使用される［61, p.102］,［62, p.406］。このことは，比例的推論が，加法的推論から乗法的推論という一般的な形式へと発展する可能性を示唆している。また,「乗法的推論は，比と比例の世界への入り口」［63, P.273］となる重要な意味をもつ。しかし，子供は「解法に関して最も単純な方法である加法的推論を一貫して選択する」［64, p.48］傾向がある。「比例的推論を十分に習得するためには，２つの重要な段階が必要である。第１に，加法的関係から乗法的関係への着目の転換である。第２に，項目内と項目間の両方における推論である」［65, p.128］。比例に関する課題が加法的関係と乗法的関係を含むことに関して，平山秀人は,「比例関係を定式化すると，関数 $f(x)$ は，$f(kx) = k \cdot f(x)$，$f(x+x') = f(x) + f(x')$ という２つの性質を持つ。また，一方にある量を加えたら同量をもう一方に加えるタイプの加法的推論の誤りは，$f(x+x') = f(x) + x'$ という式に表すことができる」［66, p.16］と述べている。

Tourniaire, F., & Pulos, S.［38］は比例的推論に関する文献の再吟味を通して，比例的推論の方略として，Within 方略，Between 方略，building-up 方略，Fall-Back 方略を取り上げている。２つの項目 A，B の各々における順序づけられた対を（a, b），（c, d）とする。Within 方略と Between 方略［67, pp.233-234］，［68, p.34］，［69, p.1］，［70, p.48］の概要を図 1-11 ～図 1-15 に示す。

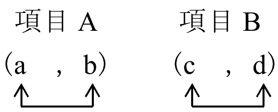


図1-11　Within方略

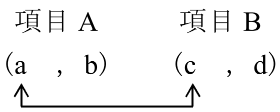


図1-12　Between方略①

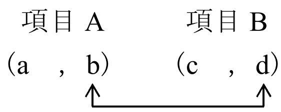


図1-13　Between方略②

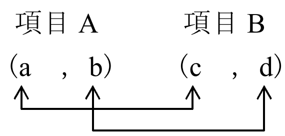


図1-14　Between方略③

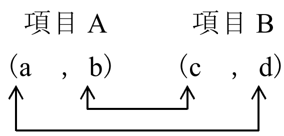


図1-15　Between方略④

Within 方略は項目内に着目し，a : b と c : d という内比を用いた方略である。一方，Between 方略は項目間に着目し，a : c と b : d という外比を用いた方略である［38, p.185］，［71, p.3］，［72, p.7］。building-up 方略［73, p.90］の概要を図 1-16 に示す。building-up 方略は，１つの比の中での関係を加法によって別の比へと拡張する方略である。Steffe, L. P. は，「１つの比の中での関係を単位として，加法的に繰り返し用いることは，乗法の観点からの操作的基礎を子供に提供する」［74, p.135］ことから，building-up 方略の使用を乗法の前段階と位置づけている。Fall-Back 方略［38, p.186］は，子供が困難な問題に直面した時に用いる退化的方略である。例えば，「除法を含む乗法的な考え方を必要とする高次な問題が提示されると，子供は低次の考え方である減法を含む加法的な考え方に依存する」［70, p.83］傾向がある。

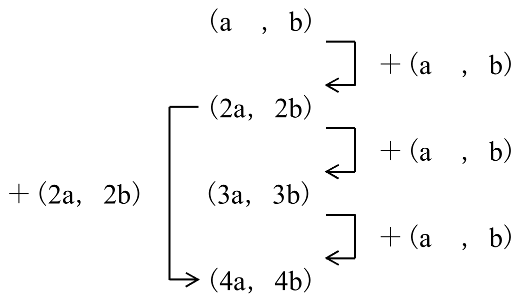


図1-16　building-up方略

(2) 内包量比較と確率の量化

1) 内包量比較

藤村宣之は，比例的推論を「２量の比例関係に基づく一方の値の推理（比例的推論）と２量を含む２項の比較（内包量比較）」［75, p.276］の２つに区別している。比例的推論には，「一方の次元の変化にともなって他方の次元がどのように変化するかを推理する定性的推理と一方の次元の変化にともなって他方の次元がどのような値に変化するかを推理する定量的推理があり，定量的推理には，定性的知識に加えて，倍などの数的関係に関する知識が必要である」［76, p.112］。比例的推論と内包量比較の関係について，「比例的推論と内包量比較は，課題解決時に倍数関係の認識を必要とする点で共通点をもつが，子供の認識としては，別の側面である」［76, p.276］。比例的推論には，「内包量が一定の

とき，一方の量が増加すると他方の量も増加するという初歩的な論理的比例(定性的推理)の理解が反映されやすい」[76, p.285]。それ故，比例的推論は内包量比較に先行すると考えられる。この初歩的な論理的比例の理解が，「比例的推論の場面で変化率に着目する手がかりとなり，倍数関係という量的認識の形成を促す」[76, p.285]。藤村宣之は，小学校３，４，５年生を対象に，比例的推論と内包量比較に関する調査を行い，「小学校３年生は，数学的には同一事象の２側面である比例的推論と内包量比較が子供の中で協応せず，別の過程として認識されている」[75, p.284]段階であるが，小学校４～５年生にかけて，「比例的推論における認識を内包量比較に適用できる」[75, p.284]段階に移行することを明らかにしている。また，「比例的推論を特質とする具体物の操作は，内包量比較を促進する」[75, p.284]ことを明らかにしている。さらに，藤村宣之[77]は，小学校３～６年生を対象に，異種の量の商(速さ)と同種の量の商(濃度)という２つの領域に関して，比例的推論課題と内包量比較課題を用いて調査を行い，比例的推論における領域一般性と内包量比較における領域固有性が存在すること及び２項関係への着目のしやすさの点で比例的推論が内包量比較より容易であることを明らかにしている。

2)確率の量化

内包量比較としての確率比較課題は，「速度や密度のような物理概念と違って，課題に関する特別な物理学的知識を必要とせず，かなり純粋な形で論理数学的認識としての割合の概念を調べることができる」と中垣啓[78, p.36]は述べている。Piaget, J., & Inhelder, B.［79, pp.95-114］，Offenbach, S. I., Gruen, G. E., & Caskey, B. J.［80, pp.965-970]は，割合による判断が求められる確率比較課題を用いて，確率概念の発達過程における３つの段階を明らかにしている。Gruen, G. E., Offenbach, S. I., & Keane, T. は，「割合を考慮した応答の殆どは，形式的操作期の段階(第３段階)あるいは具体的操作期から形式的操作期への過渡期(第 2.5 段階)にいる子供の間で生じる」[81, p.101]ことを明らかにしている。

第１段階：偶然や確率の概念がなく，直観に依存する段階(４～７歳)。
第２段階：部分－全体の包含関係を理解し，全ての可能性を考慮できる段階(７～ 11 歳)。
第３段階：組合せや割合の概念発達により，確率を量化することができる段階(11 ～ 12 歳)。

また，確率の量化に関して，Schlottmann, A. は，「子供から大人まで，確率を統合するときには，乗法(割合)を用いる」[82, p.109]ことを明らかにしている。Falk, R., & Wilkening, F. は，与えられた確率と等しい確率となるくじを構成させる課題において，「等しい確率を得るために，等しい割合を生み出すのは，13 歳頃である」[83, p.1354]ことを明らかにしている。中垣啓[78]は，割合の概念は，２つの要素間の関係を量化することを含意していることに基づいて，くじ引き課題を用いた調査を行い，確率の量化という観点から量化の次元と量化の水準を区別し，表 1-2 のように割合の概念の心理的発達段階の分析を行っている。表 1-2 の段階Ⅱ B において，1/2 ＝ 2/4 という確率の量化により，当たりやすさは同じと判断できるのは，第５学年の頃であるという見解は，「２量が共に倍になっても内包量の値は変わらないという倍数関係の認識に基づく等価性の認識は，内包量概念の基礎をなすものであり，11，12 歳から概念の形成が始まる」[84, p.284]という見解と一致する。また，1/2 ＝ 2/4 は比例の考えを表しており，1/2 と 2/4 が等しいと判断するためには，比例的推論が必要となる。さらに，中垣啓は，与えられた確率と等しい確率となるくじを構成させる課題を用いた調査を行い，心理的優位性に基づいた割合の概念の認知発達は，「肯定(割合の大きさに及ぼす当たりの効果)に対する否定(割合の大きさに及ぼすはずれの効果)の補償能力がより完全になっていく均衡化の過程と捉えることができる」[85, p.46]と述べている。

表1-2　割合の概念の心理的発達段階

<table>
<tr><th>量化の次元</th><th>量化の水準</th><th>心理的優位性</th><th>発達段階</th><th>優位方略</th></tr>
<tr><td rowspan="4">一次的量化の段階</td><td rowspan="2">質的量化</td><td>優位性の支配</td><td>段階０Ａ</td><td>【存在方略（A 方略）】
当たりの存在の有無による判断</td></tr>
<tr><td>劣位性による補償</td><td>段階０Ｂ</td><td>【存在方略（H 方略）】
はずれの存在の有無による判断</td></tr>
<tr><td rowspan="2">数量的量化</td><td>優位性の支配</td><td>段階ⅠＡ</td><td>【多少比較方略（A 方略）】
当たりの多少による判断</td></tr>
<tr><td>劣位性による補償</td><td>段階ⅠＢ</td><td>【多少比較方略（H 方略）】
当たりが同数の場合，はずれの多少による判断</td></tr>
<tr><td rowspan="5">二次的量化の段階</td><td rowspan="2">質的量化</td><td>優位性の支配</td><td>段階ⅡＡ</td><td>【A ≷ H 方略】
２つの袋での当たりとはずれの多少による判断</td></tr>
<tr><td>劣位性による補償</td><td>段階ⅡＢ</td><td>【A ＝ H 方略】
２つの袋での当たりとはずれが同数の場合に等確率と判断</td></tr>
<tr><td rowspan="3">数量的量化</td><td>優位性の支配</td><td>段階ⅢＡ</td><td rowspan="2">【差異方略】
〈内的差異方略〉
１つの袋内の当たりとはずれの差異の比較
〈外的差異立方略〉
２つの袋間の当たりの差異とはずれの差異の比較
【倍数方略】
〈内的倍数方略〉
１つの袋内の当たりとはずれの相対的差異の量化及びそれらの比較
〈外的倍数方略〉
２つの袋間の当たりの相対的差異とはずれの相対的差異の量化及びそれらの比較
【組立方略】
〈内的組立方略〉
一方の袋内のくじ構成を基本単位とした他方の袋のくじ構成の組み立て
〈外的組立方略〉
基本単位の変換による２つの袋のくじ構成の同一視</td></tr>
<tr><td>劣位性による補償</td><td>段階ⅢＢ</td></tr>
<tr><td>完全補償</td><td>段階Ⅳ</td><td>【計算方略】
有理計算による数量的な割合の表現</td></tr>
</table>

確率の量化に見られる「1/2」は,「半分」という比例的用語との関係において重要な意味を持つ。割合を学習する前から，子供は「半分」という比例的用語を使用している。ここでいう「半分」は，数的に導き出された「1/2」というよりは，むしろ，直観的に導き出された「1/2」であり,「およそ半分」という意味合いである。Spinillo, A. G.［60］, Spinillo, A. G., & Bryant, P.［86］は，比例的判断において，子供は「1/2」という直観的アプローチを保持していると共に，直接的な比較ができない場合の比例的判断において,「1/2」よりも大きい・小さい・等しいという量的な判断の基準として,「1/2」の境界線が重要な役割を果たすことを明らかにしている。Lembke, L. O., & Reys, B. J. も，子供が用いる「基準方略としての半分」［87, p.247］を見出している。早川健は,「２量の関係を倍(割合)

で見ていくときに，「半分」という基準は子供たちに分かりやすい。半分よりも大きいか小さいかで比べることは理解しやすい。半分を考えるところが，倍(割合)の見方や比例関係を考えるきっかけになる」[88, p.25]と基準方略としての半分を用いることの意義を述べている。「意味を持つ認識の枠組み」[89, p.88]をスキーマとするとき，Moss, J., & Case, R. は，「比例的評価に関する構造と「２倍・1/2(半分)」に関する数的構造が，有理数における２つの根元となるスキーマであり，10 才～ 11 才頃に，これら２つの構造が協調し，相対的な比例や簡単な分数(1/2 や 1/4)に関する理解を生み出す」[90, pp.125-126]と述べている。また，子供の初歩的・直観的な比に関する理解と数を半分にすることに関する手続きを結びつけ，「Doubling(２倍)方略」と「Halving(1/2)方略」[90, p.127]として一般化を行っている。中村享史は，「割合の見方を子供たちは潜在的に持っている。それを算数指導の中で顕在化させていくことが大切である」[91, p.19]と割合指導の今後の方向性を述べている。

(3)比例的推論の発達段階

1)ルールモデル

Siegler, R. S.［69］,［92］,［93］, Siegler, R. S., & Vago, S.［94］, Siegler, R. S., & Richards, D. D.［95］は，比例的推論に関わる天秤課題，写影課題，確率課題，速さ課題などにおいて，子供が用いると考えられるルールを設定している。認知発達のメカニズムに関して，「Piaget, J. は操作に特徴付けられる認知構造全体が変化するという立場をとるのに対して，Siegler, R. S. は知識と処理方略とを一応分離して考える中で，処理方略の変化から発達を捉えていく立場をとる」[96, P.135]。したがって，方略の発達という観点から，Siegler, R. S. は以下のようにルールを 4 つに類型化し，ルールモデルの一般化を行っている。

ルールⅠ：完全に優位次元のみにもとづいて判断する。判断の結果はその次元内の値に依存する。
ルールⅡ：優位次元の値が異なる時には常に優位次元にもとづき判断するが，値が等しい時には，下位次元をも考える。
ルールⅢ：優位，下位の両次元を常に考慮するが，一方の選択肢で優位次元の値が大きく，他方の選択肢で下位次元の値が大きい時には，この葛藤を解決する一貫した公式をもたない。
ルールⅣ：両次元を常に考慮し，それを組み合わせる適切な公式を知っている。

Piaget, J. & Inhelder, B.［79］の確率比較課題と同様に，確率について未習の子供たちを対象とする場合，確率課題は割合に関する課題と考えられる。この確率課題に関するルールモデルに基づいたルールを図 1-17 ～図 1-20 に示す。

浅川伸一，椎名乾平は，ルール評価アプローチの再検討を行い，「子供にとって，わり算よりも適用が容易であると思われる引き算を適用するというバグルール」[97, p.3]を想定したルールに基づいて分析を行った結果，引き算バグルールの存在を明らかにしている。「コンピュータ・プログラムにプログラム・ミスがあると，同じ問題では必ず同じ誤りが生じる。このようなプログラム・ミスはバグと呼ばれる」[98, p.81]ように，バグルールとは同じ誤りを引き起こすルールのことである。

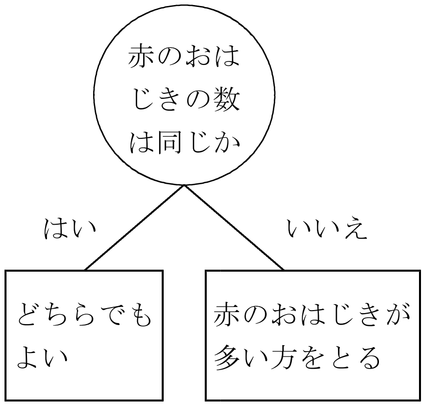


図1-17　ルールⅠ

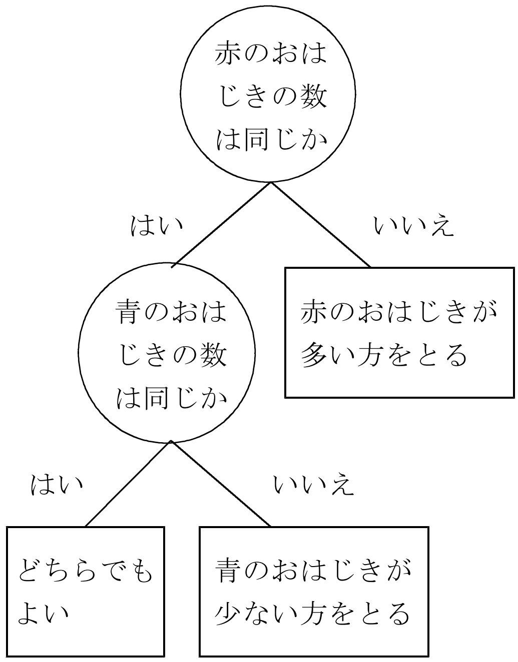


図1-18　ルールⅡ

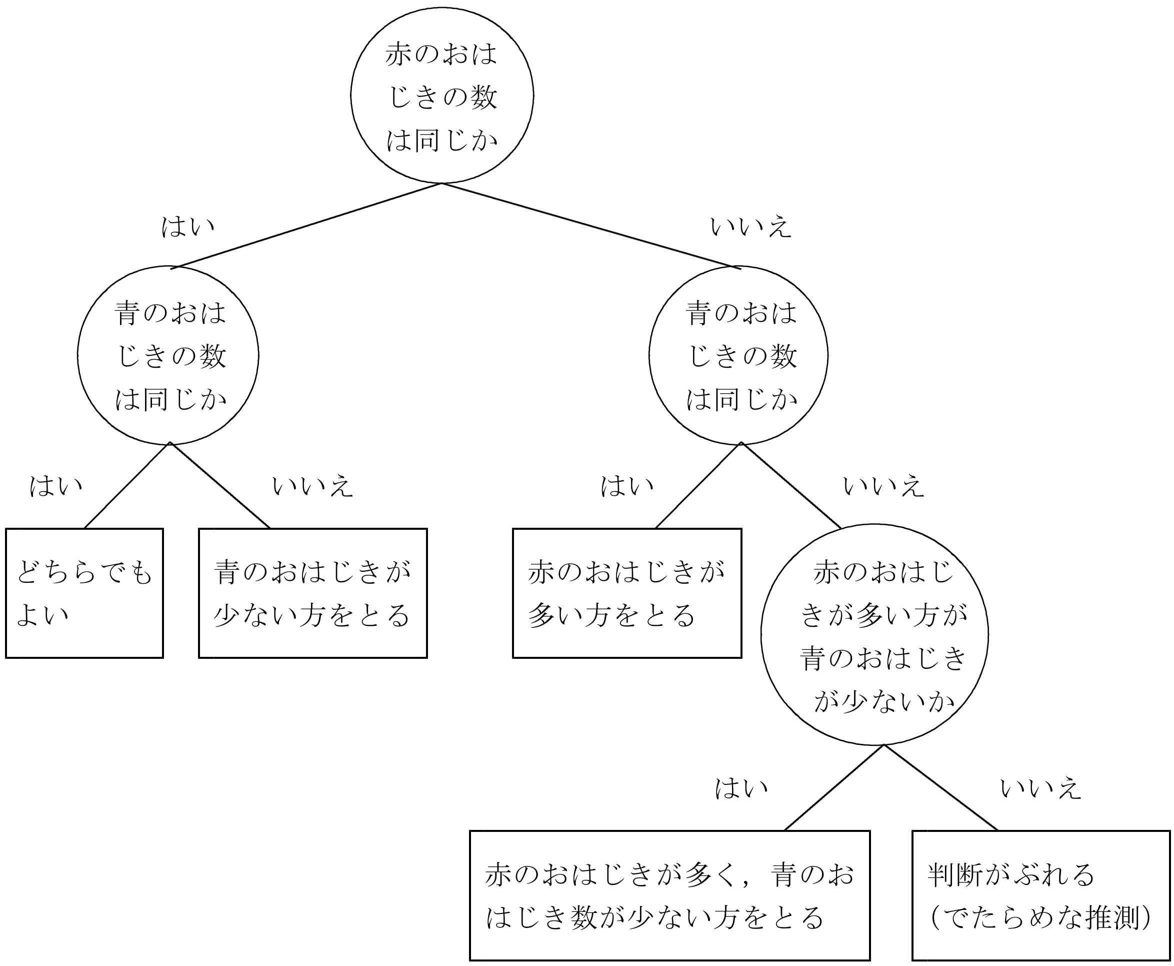


図1-19　ルールⅢ

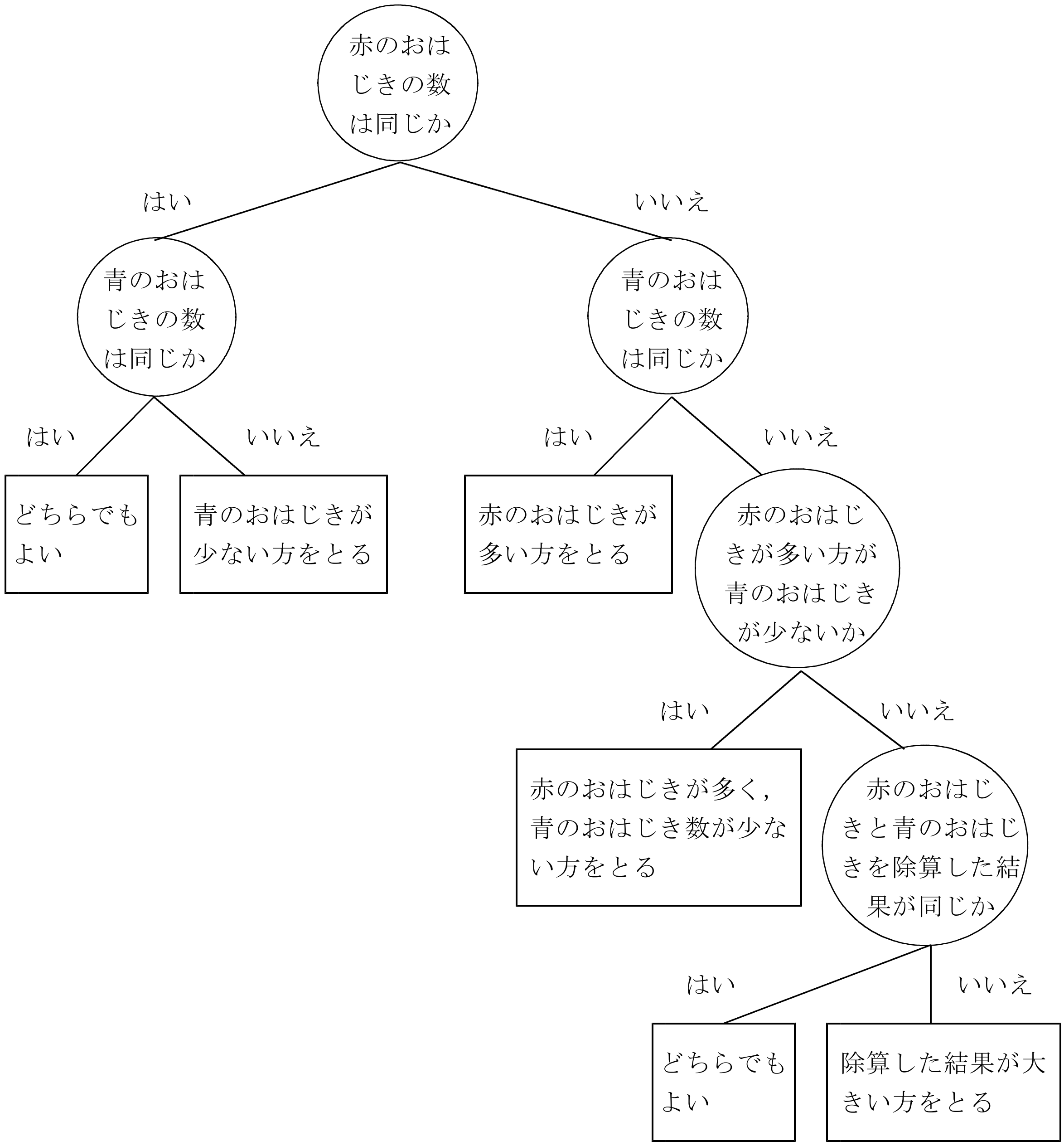


図1-20　ルールⅣ

2) ジュース混合実験

Noelting, G.［67],［68]は，６～16歳の子供を対象に，図1-21に示すようなオレンジジュースと水のグラスの数を変化させた混合物について，相対的なオレンジの味を比較する問題を用いて調査を行った。比例的推論に関する方略の発達に関して，表1-3に示すような９つの段階区分を行い，各段階における典型的な児童のプロトコールに基づいた各段階の特徴を明らかにしている。表1-3における発達に関する変化は，段階間の質的または構造的変化と段階内での量的変化である。また，Case, R.［99］は，Noelting, G.のオレンジジュース混合実験を基に，各段階の子供の使用する方略に必要とされる作業記憶容量の観点から分析を行い，子供の使用する方略は，その子供の属する発達段階の作業記憶容量に依存していることを明らかにしている。

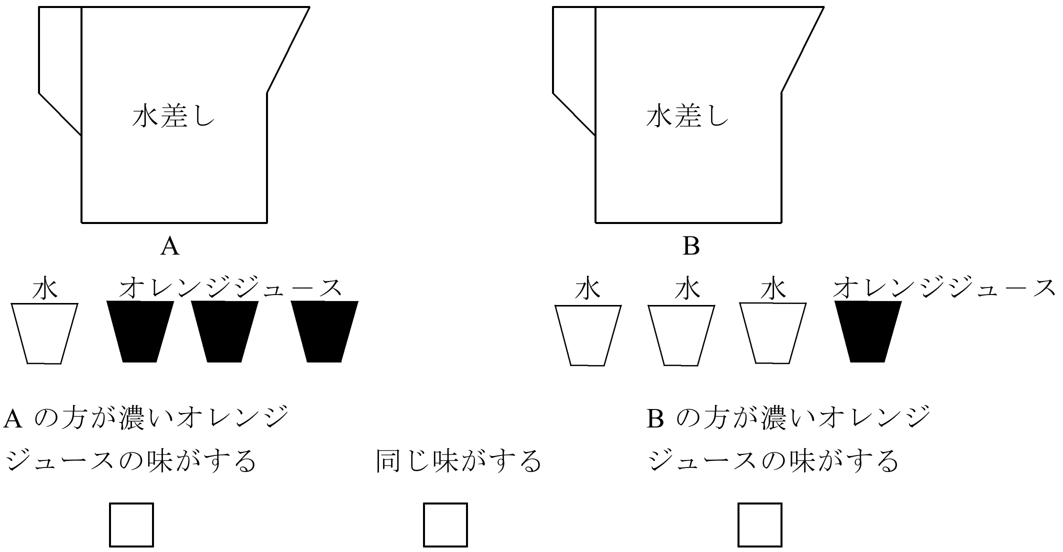


図1-21　オレンジジュース混合実験の問題

表1-3　カテゴリー化された項目と各段階の特徴

「段階	項目	混合物	正答数	特徴
0	0	(1, 0)と(0, 1)	−	要素の同定
IA	2	(4, 1)と(1, 4)	319	順序対の間の最初の条件の区別
	6	(3, 1)と(2, 2)	319	
	4	(1, 2)と(2, 1)	319	
IB	1	(1, 0)と(1, 1)	311	等しい最初の条件, 順序対の間の２番目の条件の区別
	3	(1, 2)と(1, 5)	307	
	5	(1, 1)と(1, 2)	305	
IC	8	(2, 2)と(3, 4)	297	相等性と順序対内の条件の区別
	13	(2, 3)と(1, 1)	295	
	10	(2, 1)と(3, 3)	291	
IIA	9	(2, 2)と(3, 3)	251	(1, 1)と同値な類
	11	(1, 1)と(3, 3)	244	
	7	(1, 1)と(2, 2)	231	
IIB	12	(1, 2)と(2, 4)	186	何か同値な類
	15	(4, 2)と(2, 1)	156	
IIIA1	16	(2, 1)と(4, 3)	141	相互に倍数である２つの対応する条件を伴った順序対
	17	(1, 3)と(2, 5)	131	
	14	(2, 3)と(1, 2)	107	
	18	(2, 1)と(3, 2)	88	
IIIA2	20	(6, 3)と(5, 2)	87	１つの対を減じると同じ，即ち，(1, 1)の単位の除去
	22	(4, 2)と(5, 3)	71	
	19	(2, 3)と(3, 4)	65	
	21	(3, 2)と(4, 3)	59	
IIIB	23	(5, 2)と(7, 3)	51	相互に倍数である対応する条件のない対
	24	(3, 5)と(5, 8)	−	
	25	(5, 7)と(3, 5)	−	

(注)混合物の括弧内は，オレンジジュースと水のグラスの数を示す。

1.6　割合指導の課題

(1) 割合の文章題解決と割合の素地

1) 割合の文章題解決

割合の文章題には，問題の状況に関して，比較量と基準量から割合を求める「割合に関する状況」，基準量と割合から比較量を求める「比較量に関する状況」，比較量と割合から基準量を求める「基準量に関する状況」という３つの状況がある。「割合に関する状況」は比の第１用法(割合＝比較量÷基準量)，「比較量に関する状況」は比の第２用法(比較量＝基準量×割合)，「基準量に関する状況」は比の第３用法(基準量＝比較量÷割合)に対応する。また，数量の属性に関して，比較量が基準量の部分となる「全体－部分型」，比較量と基準量が異なるものに属する「対比型」，比較量と基準量が同じものに属し，一方の量の時間経過により変化したものが他方の量となる「伸縮型」の３つの型がある。例えば，全体－部分型の問題はくじの総数と当たりくじの本数に関する問題，対比型の問題は学校の高さとテレビ塔の高さに関する問題,伸縮型の問題は定価と割引価格に関する問題に対応する。さらに，認知プロセスに関して，同種の２つの数量の関係を捉える「基礎・基本型」と２組の同種の数量の関係を比較する「活用型」の２つの型がある。基礎・基本型の問題はくじの総数に占める当たりくじの本数の割合を求める問題，活用型の問題は２つのくじの当たりやすさを比較する問題に対応する。基礎・基本型の問題に関して,「比の第２用法の問題の正答率は，他の用法と比べて高い」[100, p.9]。特に「比の第３用法の解決が困難である」[101, p.29]。しかし，活用型の問題に関して，「割合に関する状況」,「比較量に関する状況」,「基準量に関する状況」の難易度については明らかにされていない。また，基礎・基本型の問題に関して，全体－部分型の問題の方が対比型の問題よりも容易である[102, p.75], [103, p.294]。

算数文章題解決の下位過程として，Mayer, R. E. は,「文の意味内容を理解する変換過程及び文と文の間の関係を理解する統合過程からなる理解過程」[104, p.459]と「理解した内容にあった立式をするプラン化過程及び式を計算する実行過程からなる解決過程」[104, p.459]に区分している。また，算数文章題が解けない理由として，理解過程において問題文のメンタルモデルを適切に構成できないことを指摘している。メンタルモデルとは,「頭の中で操作したり稼働させたり他の視点から見直したりという活動のできるような，つまり，心的シミュレーションができるようなもの(オブジェクト)としての表象」[105, p.18]のことである。算数文章題解決における適切なメンタルモデルとは,「子供が構成した問題スキーマに当該の文章題の内容に関連する算数・数学の知識を組み込んで形成されたネットワーク」[106, p.85]である。Riley, M. S., Greeno, J. G., & Heller, J. I. は，問題解決に関する主たる知識として,「様々な意味論的関係を理解することに関する問題スキーマ」[107, p.165],「問題解決に関係する行動についてのモデルの知識を表象することに関する行動スキーマ」[107, p.165],「問題に対する解法を計画することに関する方略的知識」[107, p.165]の３つに分類し,「問題解決における子供の困難性は，これら３つの知識の１つないしそれ以上の欠落によりメンタルモデルを適切に構成できないことに起因する」[107, p.170]と指摘している。

割合の文章題解決における「子供のメンタルモデルには，割合の第２用法と第３用法の知識，問題構造，基準量の知識，意味場面の知識などが複雑にネットワークを構成して組み込まれている」[106, p.118]。割合の文章題は,「１つの要素に１つの数値を割り当てた割当文，要素間の数量関係や数値の関係性を示す関係文，質問文及び問題を解くことに関して直接関係しない文」[101, p.127]から構成される。割合の文章題解決に関して，多鹿秀継，石田淳一[101]は，理解と記憶の関係から，割合の文章題を解くことができた場合，つまり，メンタルモデルを構成することができた場合は，関係文の再生がよい。解くことができなかった場合は，関係文から割当文への転化エラーが多く見られることを明らかにしている。また，石田淳一，多鹿秀継は,「割合の文章題が解けない子供の場合，理解過程において統合過程が変換過程に比べて弱い」[108, p.22]ことを指摘している。さらに，坂本美紀は，割合の文章題が解けない子供の場合,「変換過程で質問文を正しく理解しているが，関係文の理解や統合過程での割当文と関係文との統合において，誤りが生じている」[109, p.94]と述べている。

これらの結果は，「割合の文章題を解く場合には，その文章を理解することが重要である」[106, p.160]と共に，統合過程の処理を促進させることの重要性を示唆している。多鹿秀継，中津楢男[110]は，線分図や関係図の作成が割合の文章題解決における統合過程に効果的に作用し，メンタルモデルの構成に役立つことを指摘している。また，割合の文章題解決のステップを自己説明させることにより，既有知識が活性化され，子供は問題を解決するための知識を推論し，結果として解決につながる知識の構成，即ちメンタルモデルの構成を行うことができることを明らかにし，自己説明を利用した割合の文章題の解決支援プログラムを構築している。

割合の文章題解決の理解過程における割合に関する文章表現と用語の難しさについては，これまでにいくつか報告されている[111]-[115]。割合という言葉は日常用語として子供も使用する。「割合は背景に基準量が考えられている」[35, P.241]ため，割合に関連して，「もとにする量(基準量)」や「くらべる量(比較量)」という用語が用いられることが多い。しかし，「もとにする量(基準量)」や「くらべる量(比較量)」は変数を意味する抽象的な用語であるため，子供にとって意味が理解しにくい。また，割合，比較量，基準量を含む文章表現には，「A は B の何倍です」，「A は B に対して何倍です」，「A は B と比べて何倍です」，「A は B をもとにすると何倍です」，「A は B の内の何倍です」といった様々な表現があるため，子供にとって基準量を把握することが難しく，割合の文章題の文章理解を困難にしている。蛯名正司は，「日常生活や問題解決の場面で用いられる割合の表現は「～の何%」や「～の何倍」である。この表現がデフォルトとして子供の中に定着しているのであれば，それと関連付ける必要がある」[116, p.116]と述べている。デフォルトとは，「特に修正されない限りは，既有知識として一般的にある値が入っているとみなす予備設定」[105, pp.17-18]のことである。寺岡利幸，横山真智子も，「初期の段階においては，「～は～の何倍」という表現に統一して指導した方がよい」[117, p.16]と述べている。また，子供は，文の構造を把握するのに「語順や助詞の違いによる関係性の違いに注目しない」[118, p.44]だけでなく，「助詞の“の”だけで基準量を判断することはできない」[119, p.84]ことが報告されている。割合の文章題を「A は B の～倍です」の文に変換し，文の内容を図に表現すること及び図の解釈をすることを通して，基準量を把握させる指導が重要であると考えられる。

2) 割合の素地

割合指導は多様な教科内容と関連している。割合指導の意義は，「小数，分数の四則と密接な関連があるだけでなく，広く数学及び生活の諸分野に割合の考え方を適用させることにある」[120, p.27]。現行の学習指導要領では，割合の理解と活用を目的として，第５学年において百分率，歩合として，第６学年において比や比の値として割合が指導される。しかし，整数倍，小数倍，分数倍の指導を重視し，それらの発展として割合の意味を理解させることにより，百分率，歩合，比等の理解がよりよく行われ，生活に即した問題を解決する能力が高められる。「倍概念は乗法に先行し，分割概念は除法に先行する」[121, p.4]ため，低学年からの割合の素地となる指導の必要性も指摘されている[122]-[128]。現行の学習指導要領においても，割合の素地となる指導は低学年の段階から位置づけられている。例えば，第２学年において「いくつ分」の意味を「倍」という用語を用いて表現することにより，倍概念に基づいて乗法が導入されると共に，「半分」と結び付いた 1/2 や 1/4 という簡単な分数が導入される。第３学年において分割概念に基づいて除法により整数倍を求め，第４学年において「基準量を１と見る」ことにより整数倍を捉え直し，小数倍が導入される。第５学年において乗法，除法の意味が整数倍から小数倍へと拡張される。このとき，小数倍のよさを実感できるようにすることが重要である[129]。さらに，第６学年において乗法，除法の意味が分数倍へと拡張される。このとき，分数倍の導入によって，乗除が一元的に取り扱うことができるようになるという分数倍のよさを実感できるようにすることが重要である[130]。また，「割合の意味は，基準とする量を単位として測ること，つまり，量を測ること，測定することと同じ意味である」[131, p.4]。正確には，「割合は測定値の上位概念といえ，社会的な規約に基づく特定な量を基準にとるか，その場，その場で任意に基準を決めるかで，測定値と割合は区別される」[132, p.7]。したがって，測定と関連付けた割合の素地と

なる指導も重要である。例えば，第４学年で指導する 90°(直角)と 180°(２直角)は，一方が他方の２倍・1/2 の関係にあり，360° も４直角として倍関係を捉えることができる。第５学年で指導する円周率は，直径に対する円周の割合と捉えることができる。さらに，割合を表す分数として，「～の 1/2」や「２は３の 2/3」という表記がある。操作の表現とみる場合は分割分数，２つの数量関係の表現としてみる場合は割合分数と区別されることがある。どちらの分数の用法も，割合を表すという目的は同じであり，「分母と分子の区別がつき，それぞれの働きが理解されてこそ割合としての意味が確立される」[133, p.18]。また，「分割概念から倍概念へ意味の拡張を図ることにより，n 分の１から 1/n 倍へと考えられるようになる」[121, p.5]。割合分数と関連させて，整数倍とその逆の単位分数倍(２倍，３倍，４倍，1/2 倍，1/3 倍，1/4 倍程度まで)を一般的な分数倍の場合から切り離して先行して指導することの必要性[134]も指摘されている。分数は部分と全体の関係を把握しやすいことや商分数として演算と結び付きやすいことから，分数指導を割合の素地となる指導として考慮する必要がある。岡田いずみ[135]，渡辺敏[136]は，部分と全体の関係を分数で表し，既習の通分により２つの数量の一方(全体)を揃えて比べる方法(分数表示方略)が，子供にとって理解しやすいことを明らかにしている。中村享史は，「倍概念や乗除法の意味，分数指導と関連付けて割合が扱われていることを意識化して指導すべきである」[91, p.19]と割合指導の顕在化を今後の方向性として述べている。

(2) 図的表現

割合指導における図的表現の利用に関して，整数，小数，分数の乗法・除法と割合の関わりから，線分図，数直線，テープ図，関係図を用いた多くの研究がなされている[46]，[137]-[153]。割合の問題解決における図の利用について，田村弘[154]は，割合の関係を数直線の上にのせ，その概念を視覚化すると共に，比の３用法の視覚化を図るというねらいのもとに，図 1-22 に示す１本の数直線の図を用いて，B × p ＝ A を表すことを提案している。また，加藤康順[155]は，割合の問題の構造を捉え，その構造から演算方法を決定するために，図 1-23 に示す２本の数直線の図を用いた小数の乗法・除法の意味理解の指導を提案している。２本の数直線の図は，現行の４社の第５学年の教科書[27]，[30]-[32]において，「割合」の単元で用いられている。また，現行の２社の教科書[28]，[29]においては，図 1-24 に示す２本のテープ図と数直線を組み合わせた図を用いている。また，線分図と図 1-25 に示す関係図の併用[28]や図 1-26 に示す４マス関係表[29]を用いる場合もある。早川健[88]，土谷利美[156]，田端輝彦[157]は，割合の導入場面において，同じ割合となる数対を２本の数直線の図や表にまとめ，変化に着目することにより比例関係を捉え，対応に着目することにより割合が一定であることを捉えさせる指導を提案している。市川啓[158]は，２本の数直線の図において測定操作に基づいて小数倍を意味付け，測定数(割合)としての見方を育む指導を提案している。中村享史[159]，青山尚司[160]，高橋丈夫，田端輝彦，市川啓[161]は，「１にあたる量」が示されていな問題場面を図 1-27 に示す２本の数直線の図に表し，帰一法や倍比例，等分比例などの解決方法により，同じ割合をつくることを通して，小数の乗法を割合により意味付ける指導を提案している。しかし，「線分図から割合関係としての基準量(B)の p 倍が比較量(A)であることを読み取ることは困難さを伴う場合がある。他方，関係図は線分図から問題解決に必要な２量を取り出し，その割合関係(B の p 倍が A である)だけを表すものであり，線分図に表現できても，その図から２量の割合関係を取り出せない場合もある」[162, P.129]という指摘がなされている。また，佐藤俊太郎[163]は，２本の数直線の図において，基点とする０と０が対応しているため対応する値は等しいはずであり，対応する値が異なることに対して抵抗感が強く働くと指摘している。小林章子[164]は，割合の問題解決において，図 1-28 に示す３項関係の数量関係構造図を用いた指導を提案している。しかし，子供にとって，既習の３項関係における整数倍の意味づけは同数累加に基づいているため，「基準量のいくつ分」という考え方であり「基準量を１と見る」という考え方に基づいていない。そこで，廣瀬隆司[165]は，割合の問題解決において，１(倍)を強調した関係図として，図 1-29 に示す４項関係の数量関係構造図を用いた指導を提案している。３項関係の数量関係構造図及び４項関係の数量関係構造図は，基準量と比較量の大小関係に依存していないために，各項の配置が一定であり，各項を結ぶ矢線によって

立式につながりやすいことが特徴である。なお，図 1-22 ～図 1-29 において，B：基準量，A：比較量，p：割合である。

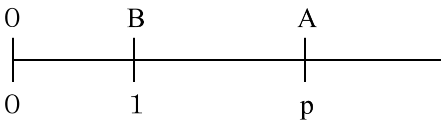


図1-22　１本の数直線の図

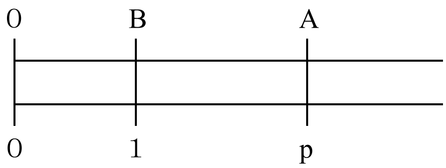


図1-23　２本の数直線の図①

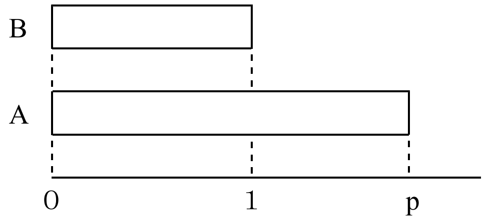


図1-24　２本のテープ図

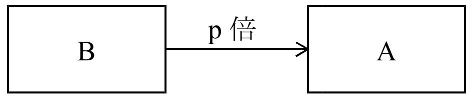


図1-25　関係図

もとにする量	くらべる量
B	A
1	p

図1-26　４マス関係表

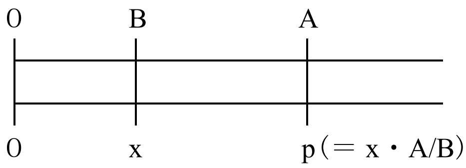


図1-27　２本の数直線の図②

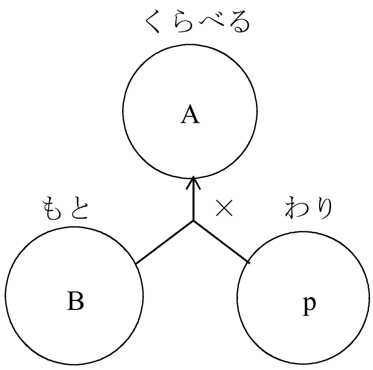


図1-28　３項関係の数量関係構造図

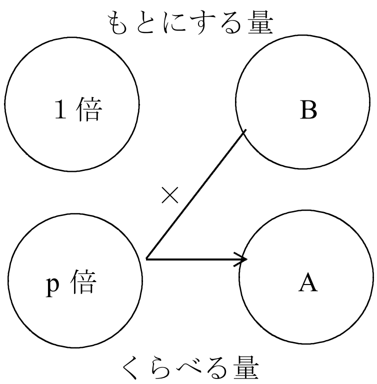


図1-29　４項関係の数量関係構造図

(3) 全国学力・学習状況調査

1) A問題における課題

割合の理解に関する子供の実態や割合指導の成果・課題は，全国学力・学習状況調査の結果として報告されている。平成 19 年から平成 26 年までの全国学力・学習状況調査[166]-[172]において，同種の２つの数量の割合に関する以下のような A 問題が出題されている。A 問題とは，主として知識に関する問題である。

平成 19 年度 A 問題④

答えが 210 × 0.6 の式で求められる問題を，下の１から４までの中から１つ選んで，その番号を書きましょう。

１　砂糖を 0.6kg 買って 210 円はらいました。この砂糖１ kg のねだんはいくらでしょう。

２　210kg の大豆を 0.6kg ずつふくろにつめます。大豆を全部つめるには，ふくろはいくついるでしょう。

３　１ m の値段が 210 円のリボンを 0.6m 買いました。リボンの代金はいくらでしょう。

４　赤いテープの長さは 210cm です。赤いテープの長さは白いテープの長さの 0.6 倍です。白いテープの長さは何 cm でしょう。

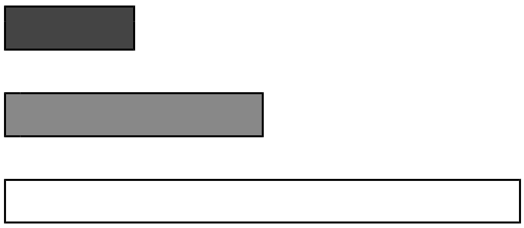
平成 20 年度 A 問題④

テープが３本あります。テープの長さは，次のようになっています。

・赤色のテープの長さは３ m

・青色のテープの長さは６ m

・黄色のテープの長さは 12m



(1)　黄色のテープの長さは，赤色のテープの長さの何倍ですか。求める式と答えを書きましょう。

(2)　青色のテープの長さは，黄色のテープの長さの何倍ですか。求める式と答えを書きましょう。

平成 20 年度 A 問題⑨(2)

３月に貸し出された本の冊数は 620 冊で，そのうち「物語」の本の冊数の割合は，全体の 40%です。「物語」の本の冊数は何冊ですか。求める式と答えを書きましょう。（円グラフ略）

平成 21 年度 A 問題⑦

ある会場に小学生が集まりました。集まった小学生 200 人のうち 80 人が女子でした。女子の人数の割合は，集まった小学生の人数の何%ですか。下の１から４までの中から１つ選んで，その番号を書きましょう。

１　0.4%　　２　0.25%　　３　40%　　４　80%

平成 22 年度 A 問題⑨(1)

じゃがいも畑の面積 40 ㎡は，学校の畑の面積 50 ㎡のどれだけの割合にあたりますか。答えを書きましょう。（図略）

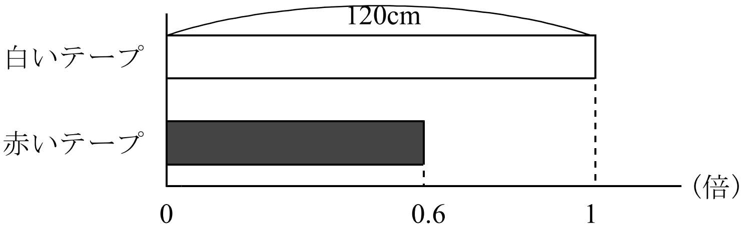
平成 24 年度 A 問題③

赤いテープと白いテープの長さについて，次のことが分かっています。

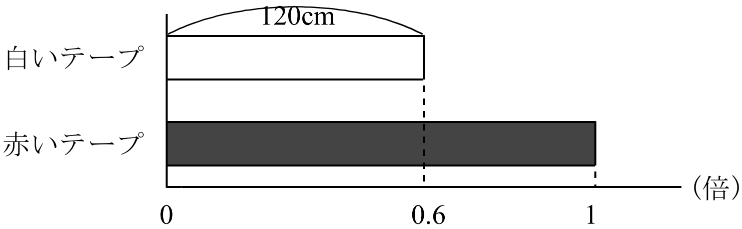
> 赤いテープの長さは 120cm です。
> 赤いテープの長さは，白いテープの長さの 0.6 倍です。

(1)　赤いテープと白いテープの長さの関係を正しく表している図はどれですか。次の 1 から 4 までの中から１つ選んで，その番号を書きましょう。

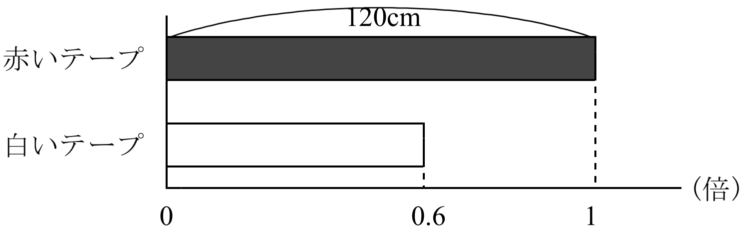
1



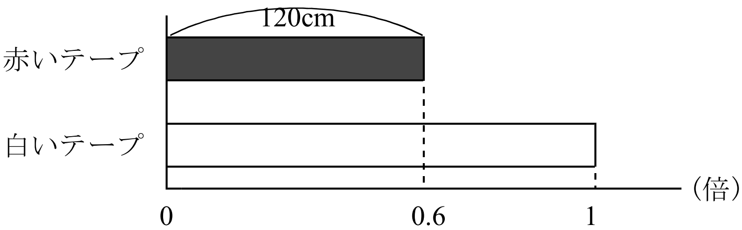
2



3



4



(2)　白いテープの長さを求める式を書きましょう。ただし，計算の答えを書く必要はありません。

平成 24 年度 A 問題⑧

犬を飼っている人は８人です。この８人は学級全体の人数の 25%にあたります。学級全体の人数は何人ですか。求める式と答えを書きましょう。(円グラフ略)

平成 25 年度 A 問題⑧

(1)　200cm の 50%の長さは，□ cm です。□にあてはまる数を，下の 1 から 4 までの中から１つ選んで，その番号を書きましょう。

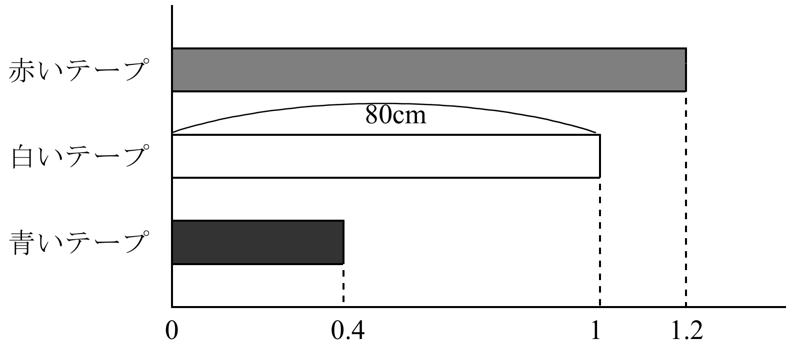
1　100　　2　150　　3　250　　4　400

(2)　500g の 120%の重さは，□です。下の 1 から 3 までの中から１つ選んで，その番号を書きましょう。

1　500g より軽い　　2　500g より重い　　3　500g と同じ

平成 26 年度 A 問題②

下の図のように，白いテープの長さをもとにして，赤いテープと青いテープの長さを表しました。



(1)　赤いテープの長さを求める式を，下の **1** から **4** までの中から 1 つ選んで，その番号を書きましょう。

1　80 ＋ 0.2　　**2**　80 － 0.2　　**3**　80 × 1.2　　**4**　80 ÷ 1.2

(2)　青いテープの長さを求める式を，下の **1** から **4** までの中から 1 つ選んで，その番号を書きましょう。

1　80 ＋ 0.6　　**2**　80 － 0.6　　**3**　80 × 0.4　　**4**　80 ÷ 0.4

「割合に関する状況」は平成 20 年度 A 問題④，平成 21 年度 A 問題⑦，平成 22 年度 A 問題⑨(1)，「比較量に関する状況」は平成 20 年度 A 問題⑨(2)，平成 25 年度 A 問題⑧，平成 26 年度 A 問題②，「基準量に関する状況」は平成 19 年度 A 問題④，平成 24 年度 A 問題③，平成 24 年度 A 問題⑧に出題されている。「割合に関する状況」の調査結果において，平成 20 年度 A 問題④の設問(1)の正答率は 83.1%，設問(2)の正答率は 55.7%である。この結果から，多くの児童は除法を用いて割合を求めることを理解している。しかし，設問(2)において，「大きい数÷小さい数」に基づく誤答率は 24.0%である。平成 21 年度 A 問題⑦の正答率は 57.1%，「大きい数÷小さい数」に基づく誤答率は 22.6%である。平成 22 年度 A 問題⑨の設問(1)の正答率は 57.8%である。したがって，「割合に関する状況」において，基準量を正しく認識し，除法を用いることのできる児童は約 55%であり，約 20%の児童は「大きい数÷小さい数」に基づいて演算決定する傾向がある。「比較量に関する状況」の調査結果において，平成 20 年度 A 問題⑨の設問(2)の正答率は 55.1%，除法を用いた誤答率は 23.7%である。平成 25 年度 A 問題⑧の設問(1)の正答率は 76.9%，除法を用いた誤答率は 9.5%である。割合が 1/2 (50%)という簡単な場合であれば，児童は基準量を正しく認識し，乗法を用いることができる。設問(2)の正答率は 77.1%，割合が 100%を超える場合について，基準量と比較量の関係を判断できないことに基づく誤答率は 16.5%である。平成 26 年度 A 問題②の設問(1)の正答率は 72.1%，除法を用いた誤答率は 8.5%，加法を用いた誤答率は 17.0%である。基準量が比較量より大きい場合，児童は正しく乗法を用いることができる。設問(2)の正答率は 54.3%，除法を用いた誤答率は 28.1%，減法を用いた誤答率は 15.6%である。基準量が比較量より小さい場合，約 20%の児童は除法を用いる傾向がある。このような児童は，基準量が比較量より大きい場合は乗法，基準量が比較量より小さい場合は除法という考えに基づいて，演算決定をしていると考えられる。また，量と割合を混同し，加法や減法を用いる児童は約 10%である。「比較量に関する状況」においても，基準量を正しく認識し，乗法を用いることのできる児童は約 55%である。「基準量に関する状況」の調査結果において，平成 19 年度 A 問題④では，除法を用いて基準量を求める場面に対して，乗法を用いると考えた誤答率が 30.1%である。平成 24 年度 A 問題③の設問(1)の正答率は 34.3%，基準量を正しく認識していないことに基づく誤答率は 58.4%である。設問(2)の正答率は 41.3%，乗法を用いた誤答率は 48.6%である。平成 24 年度 A 問題⑧の正答率は 58.7%，乗法を用いた誤答率は 10.1%である。「基準量に関する状況」の調

査結果においても，基準量を正しく認識し，除法を用いることのできる児童は約 55%であり，同種の２つの数量の関係を正しく図に表現できる児童は約 30%である。

「割合に関する状況」，「比較量に関する状況」，「基準量に関する状況」のいずれも約 55%の正答率である。この結果は，児童が同種の２つの数量の関係を図に表現することができないこと及び図を基に基準量を把握し演算決定することができないことに起因する。つまり，割合に関する概念的知識と手続き的知識が同時活性化されていないことが問題である。

2)B問題における課題

平成 19 年から平成 26 年までの全国学力・学習状況調査[166]-[169]，[171]-[173]において，同種の２つの数量の割合に関する以下のような B 問題が出題されている。B 問題とは，主として活用に関する問題である。

平成 19 年度 B 問題④(1)

まなぶさんの町にケーキ屋があります。このケーキ屋のロールケーキ，チーズケーキ，イチゴケーキ，チョコレートケーキの定価は次の通りです。

ロールケーキ	チーズケーキ	イチゴケーキ	チョコレートケーキ	
250 円	300 円	350 円	400 円	（図略）

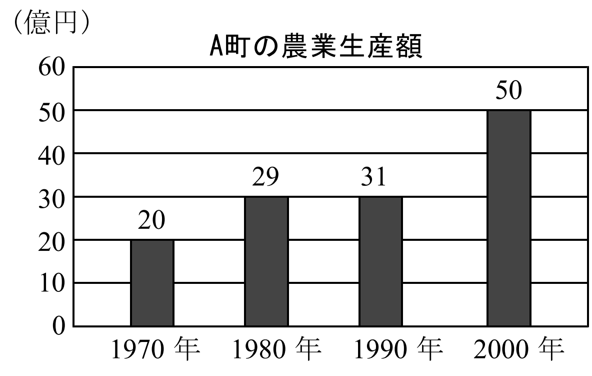
このケーキ屋は木曜日と日曜日が安売りの日です。木曜日と日曜日は，次のようにケーキを売っています。

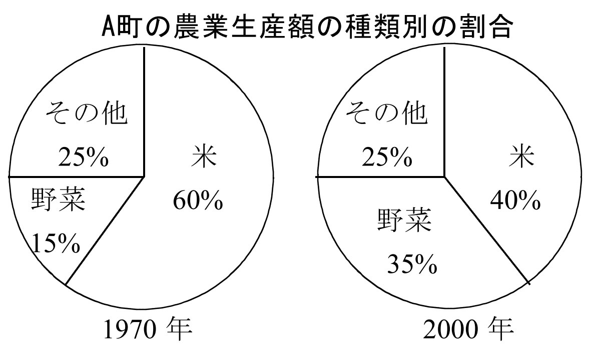
〔木曜日〕
すべてのケーキを定価の 20%引きで売ります。例えば定価 250 円のケーキは，50 円引きになって 200 円になります。

〔日曜日〕
定価が 320 円よりも安いケーキは，どれも 200 円で売ります。

(1)　まなぶさんは，チーズケーキ１個とチョコレートケーキ１個を買おうと思います。木曜日の代金と日曜日の代金では，どちらの方がいくら安くなりますか。求める式と答えをそれぞれ書きましょう。

平成 20 年度 B 問題②(3)



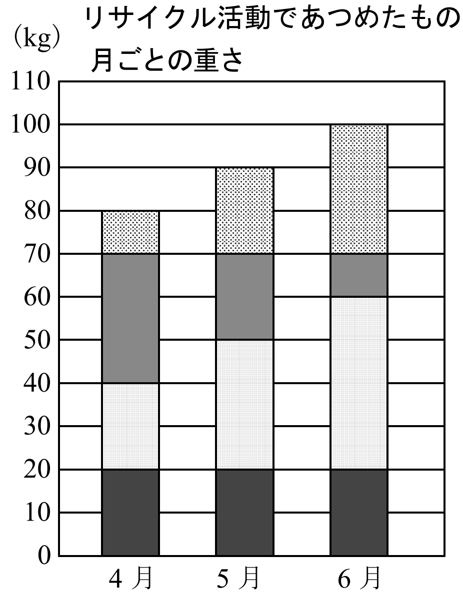


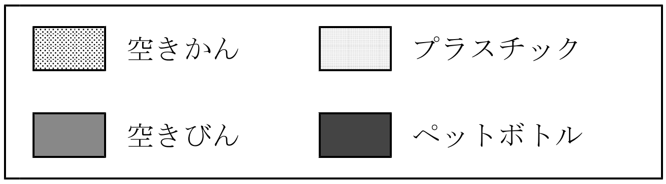
(3)　A 町の 1970 年と 2000 年の米の生産額について，ひろしさんは，次のように言いました。

米の割合が，60%から 40%に減っているから，米の生産額は減っています。

ひろしさんの言っていることは，正しいですか。「正しい」か「正しくない」かのどちらかを○で囲みましょう。また，そのわけを，言葉や式を使って書きましょう。

平成 21 年度 B 問題⑸(3)





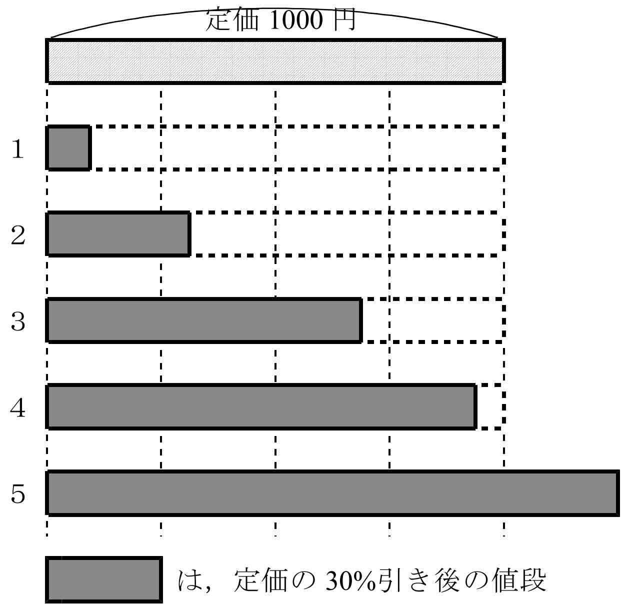
(3)　4 月の全体の重さをもとにしたペットボトルの重さの割合と，6 月の全体の重さをもとにしたペットボトルの重さの割合を比べると，どのようなことが言えますか。下の **1** から **3** までの中から正しいもの 1 つ選んで，その番号を書きましょう。また，その番号を選んだわけを，言葉や式を使って書きましょう。

1　ペットボトルの重さの割合は，4 月のほうが大きい。
2　ペットボトルの重さの割合は，4 月と 6 月で同じ。
3　ペットボトルの重さの割合は，6 月のほうが大きい。

平成 22 年度 B 問題⑸

ひろしさんは，買い物に行きました。

(1)　右の図のように，定価 1000 円のぼうしには，「定価の 30%引き」という札がついています。定価 1000 円の図に対して，定価の 30%引き後の値段を正しく表している図はどれですか。下の **1** から **5** までの中から 1 つ選んで，その番号を書きましょう。　(図略)



(2)　ひろしさんは，下のような定価で売られているシャツ，ズボン，くつを 1 品ずつ買います。

ア	シャツ	定価 1900 円
イ	ズボン	定価 3900 円
ウ	くつ	定価 5800 円　(図略)

ひろしさんは，右の図のような割引券を 1 枚持っています。その割引券には，「1 品に限り，定価の 20%引き」と書かれています。

(図略)

シャツ，ズボン，くつのうち，どれに割引券を使うと，値引きされる金額がいちばん大きくなりますか。

上の **ア** から **ウ** までの中から 1 つ選んで，その記号を書きましょう。また，その記号の商品に割引券を使うと，値引きされる金額がいちばん大きくなるわけを，言葉や式を使って書きましょう。

平成 24 年度 B 問題5(3)

(3)　あやかさんは，学級の男子と女子ではどちらのほうが一輪車に乗れるかを調べてみようと思い，下のような男女別の表にまとめました。

一輪車に乗れる人調べ　（人）

	乗れる	乗れない	合計
男子	9	6	15
女子	12	8	20

上の表を見て，あやかさんは次のように言いました。

乗れる人数は，男子が 9 人で女子が 12 人です。だから，女子のほうが乗れるのかな。

すると，この話を聞いて，たろうさんは次のように言いました。

でも，合計の人数は男子と女子で違います。
だから，乗れる人数だけで比べるのではなくて，割合で比べてみませんか。

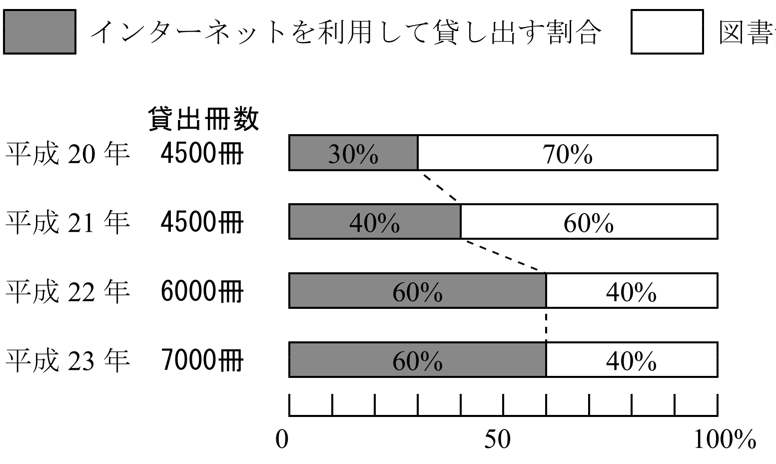
男子と女子それぞれで，合計人数をもとにした乗れる人数の割合を比べます。男子と女子ではどちらのほうが割合が大きいですか。次の **1** から **3** までの中から 1 つ選んで，その番号を書きましょう。また，その番号を選んだわけを，言葉や式を使って書きましょう。

1　男子のほうが乗れる人数の割合が大きい。
2　女子のほうが乗れる人数の割合が大きい。
3　男子と女子の乗れる人数の割合は同じ。

平成 25 年度 B 問題5(3)

(2)　帯グラフは，平成 20 年から平成 23 年までの貸出し冊数の合計とインターネットを利用した割合を表しています。

貸出冊数の合計とインターネットを利用した割合



かずやさんたちは，実際にインターネットの貸出冊数が増えているかどうかを調べます。
インターネットの貸出冊数は次の式で求められます。

貸出冊数の合計×インターネットを利用した割合＝インターネットの貸出冊数

この式を使って，かずやさんとたまきさんは，平成 20 年と平成 21 年を比べました。

〔かずやさんの考え〕
30%と 40%を小数で表すと 0.3 と 0.4 になります。
4500 × 0.3 ＝ 1350 なので，平成 20 年は 1350 冊です。
4500 × 0.4 ＝ 1800 なので，平成 21 年は 1800 冊です。
だから，平成 21 年のほうが増えています。

〔たまきさんの考え〕
30%と 40%を小数で表すと 0.3 と 0.4 になります。
4500 × 0.3 と 4500 × 0.4 を比べると，もとにする量は同じで，割合は大きくなっています。
だから，平成 21 年のほうが増えています。

平成22年と**平成23年**を比べると，インターネットの貸出冊数は増えていますか。次の **1** から **3** までの中から１つ選んで，その番号を書きましょう。また，その番号を選んだわけを，２人の考えのどちらか一方をもとにして，言葉や式を使って書きましょう。

1　平成 22 年より平成 23 年のほうが増えている。
2　平成 22 年より平成 23 年のほうが減っている。
3　平成 22 年より平成 23 年は変わらない。

平成 26 年度 B 問題２(1)

あきらさんは，学校の水の使用量について調べるために，事務室で下の資料をもらいました。

学校の水の使用量

月	4・5 月	6・7 月	8・9 月	10・11 月	12・1 月	2・3 月	1 年間
使用量(m^3)	550	1500	950	900	800	800	5500

※「４・５月」は，「４月と５月の合計」を表しています。

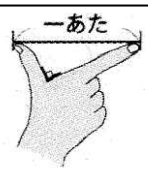
(1)　あきらさんは，６・７月の 1500m^3 がどれくらいの量なのかを，家の近所のプールに入る水の量をもとに考えることにしました。
あきらさんの家の近所のプールには，水が 250m^3 入ります。
６・７月の水の使用量は，このプールに入る水の量の何倍になりますか。求める式と答えを書きましょう。

平成 26 年度 B 問題５(2)(3)

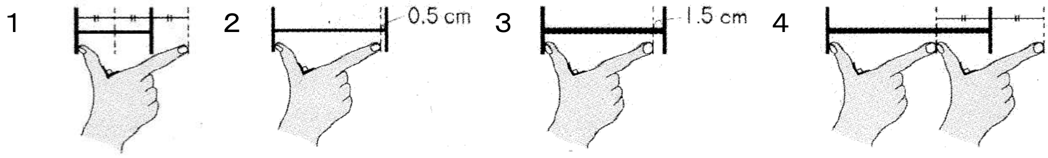
(2)　まことさんは，使いやすいはしの長さのめやすについて発表します。

使いやすいはしの長さのめやす

使いやすいはしの長さのめやすは，「**一あた半**」といわれています。
一あたは，親指と人差し指を直角に広げたときのそれぞれの指先を結んだ長さです。
一あた半は，**一あた**を 1.5 倍した長さです。



下の１から４までの中から，**一あた半**の長さを表しているもの（ ）を１つ選んで，その番号を書きましょう。



(3)　まことさんの発表を聞いて，なつきさんは妹のはしを買いに行こうと思いました。
なつきさんは**一あた**の長さについてさらに調べ，下のことがわかりました。

一あたは，身長の約 10%の長さです。

妹の身長は 140cm です。

妹の身長と，左の**使いやすいはしの長さのめやす**をもとに，**一あた半**の長さを求めると，はしの長さは約何 cm になりますか。求め方を言葉や式を使って書きましょう。また，答えも書きましょう。

「割合に関する状況」は平成 21 年度 B 問題5 (3)，平成 24 年度 B 問題5，平成 26 年度 B 問題2 (1)，「比較量に関する状況」は平成 19 年度 B 問題4 (1)，平成 20 年度 B 問題2 (3)，平成 22 年度 B 問題5，平成 25 年度 B 問題5 (3)，平成 26 年度 B 問題5 (2) (3) に出題されている。「基準量に関する状況」は出題されていない。

「割合に関する状況」において，平成 21 年度 B 問題5の設問 (3) の正答率は 17.9%であり，比較量の大小により割合の大小を判断した誤答率は 42.9%ある。平成 24 年度 B 問題5の設問 (3) の正答率は 23.8%である。部分－全体の関係において，部分－部分に着目して割合を求め，２組の数量の関係を判断した誤答率は 14.2%である。割合の大小は基準量と比較量の２つによって決まることを理解していない児童が約 40%いる。また，約 20%の児童しか，問題場面に応じて基準量を正しく判断することができていない。平成 26 年度 B 問題2の設問 (1) の正答率は 82.6%であり，比較量が基準量より大きい場合について，児童は２つの数量の関係を割合を用いて正しく把握することができる。「比較量に関する状況」において，平成 19 年度 B 問題4の設問 (1) の正答率は 29.5%である。百分率の意味を理解し，定価と割引価格の関係を捉えることができていない。平成 20 年度 B 問題2の設問 (3) の正答率は 17.6%であり，割合の大小により比較量の大小を判断した誤答率は 65.0%である。２つのグラフを関連付けて基準量と割合を読み取り，比較量を求めなければならないため，子供にとって負荷が多く，低次な考え方に Fall-Back したと考えられる。平成 22 年度 B 問題5の設問 (1) の正答率は 69.2%である。「～の何%」と「～の何%引き」という表現の違いを捉えられないことに基づく誤答率は 16.6%である。設問 (2) の正答率は 17.4%である。平成 25 年度 B 問題5の設問 (3) の正答率は 44.7%である。割合の大小により比較量の大小を判断した誤答率は 18.4%である。また，比較量を計算することにより，その大小を判断したものは 32.7%，割合（乗数）が同じ場合に基準量（被乗数）の大小を基に比較量の大小を判断したものは 12.0%である。概念的知識よりも手続き的知識に依存して判断する傾向がある。また，約 30 ～ 40%の児童しか，比較量の大小は基準量と割合の２つによって決まることを理解していない。平成 26 年度 B 問題5の設問 (2) の正答率は 46.3%である。基準量を正しく認識できないことに基づく誤答率は 12.9%，量と割合を混同し，加法を用いた誤答率は 37.2%である。設問 (3) の正答率は 33.3%である。割合が１より小さい場合について比較量を求め，さらに，その比較量を基準量とすることにより，割合が１より大きい場合について比較量を求めるという２つの段階があるため，児童にとって，解決の見通しを立てることができなかったと考えられる。

「割合に関する状況」と「比較量に関する状況」に関して，約 20 ～ 40%の正答率である。この結果は，割合，比較量，基準量の相互関係を理解していないために正しく説明ができないこと，つまり，割合に関する概念的知識が手続き的知識に比べて弱いことに起因する。したがって，割合に関する概念的知識と手続き的知識を同時活性化させることにより，概念的知識と手続き的知識を相互に高める教授法の構築が必要である。

1.7　本論文の目的と構成

算数の学習内容は日常生活との関連があり，割合の内容も例外ではない。日常生活において，２つの数量の関係を把握する場合や２組の数量の関係を比較する場合に，割合が用いられる。これにより，正確な表現や判断をすることが可能になる。しかし，２つの数量の関係を把握する場合，児童は質的に大小関係を把握することが多い。量的に差を求めることはあるが，割合を求めることは殆どない。２組の数量の関係を比較する場合も同様，児童は差による比較を行うことが多く，割合による比較を行うことは殆どない。そのため，割合の学習において，２つの数量の関係を把握する場合や２組の数量の関係を比較する場合に，児童は乗法的な考えよりも加法的な考えを優先する。また，日常生活において，児童は「半分」という言葉を使用する。しかし，半分の意味について，児童が乗法的に 0.5 倍や 1/2 と認識しているとは限らない。２つに分割した部分の大きさが等しいことを半分と考えている加法的な場合がある。このような日常生活での経験が，割合の数理構造の理解に影響し，割合指導を難しくしている。割合の問題解決に見られる加法的な考えや乗法的な考えは，確率比較課題を用いた研究において，割合の概念の心理的発達段階に位置付けられている。しかし，割合に関する発達段階や児童の認識を考慮した具体的な教授法は構築されていない。また，これまでの研究では，「割合に関する状況」のみを取り扱っており，３つの状況に関する児童の認識を統合的に分析する研究は行われていない。

情報処理心理学の観点から児童の問題解決を捉えるとき，その処理過程は，仮定としての条件がインプットされ，結論としての解答がアウトプットされるプロダクションシステムに基づいた論理的な思考過程であると考えることができる。つまり，論理学の観点から，命題論理と述語論理を用いて，児童の問題解決過程を数学的に説明することが可能であると考えられる。児童の思考過程を詳細に分析する方法を用いることにより，これまでの研究成果を発展させ，割合に関する知識獲得過程における知識の変化のメカニズムを明らかにすることができると考え，本研究の着想に至った。

割合に関する概念的知識と手続き的知識の構造や２つの知識間の関係，それぞれの知識における３つの状況の関係を明らかにすることにより，割合に関する知識獲得過程における知識の変化のメカニズムを考慮し，割合に関する数理構造の理解を促進する教授法を構築することができる。しかし，割合に関する概念的知識と手続き的知識における３つの状況について，児童の知識を測定する調査問題は開発されていない。そこで，割合指導に関する現状を打開するために，本研究おいては，割合に関する概念的知識と手続き的知識における３つの状況について，児童の知識を測定する調査問題の開発を行い，割合に関する知識獲得過程における知識の変化のメカニズムを明らかにし，割合に関する数理構造の理解を促進する教授法を構築することを目的とする。

これらの先行研究を踏まえ，次章より本論文では，以下の構成により研究を行う。

第２章では，これまでの研究成果に基づいた本研究の位置づけを明確にするために，筆者が行ってきた研究として，２つの対象物の比較に関する研究[174]，２つの確率の比較における着目の仕方と方略に関する研究[175]，２つの確率の比較における全体への着目に関する研究[176]，３つの確率の比較における割合に関する児童の認識の研究[177]についてまとめ，割合に関する発達段階や児童の認識に関する研究の成果を示す。また，「２倍・1/2」を活用した授業に関する研究[178]，[179]についてまとめ,割合に関する発達段階や児童の認識を考慮した割合の教授法に関する研究の成果を示す。

第３章では，割合に関する概念的知識と手続き的知識における３つの状況について，児童の知識を測定する調査問題の開発を行う。これまでの研究の多くは，児童の割合の認識をプロトコルから分析

しており，数学的に児童の思考過程を示した研究ではない。そこで，論理学の観点から，命題論理と述語論理を用いて調査結果の分析を行い，割合に関する概念的知識と手続き的知識における３つの状況の水準及び段階を明らかにする。また，割合に関する概念的知識と手続き的知識における３つの状況の関係についても明らかにする。

第４章では，割合に関する数理構造の理解を促進する教授法として，「割合」の単元の指導計画に一般化の過程と反復過程を位置づけ，問題の表出を通して，概念的知識と手続き的知識が向上していく詳細な過程を設定する。また，この教授法により授業実践を行い，事前調査と事後調査の結果を分析し，割合に関する数理構造の理解を促進する教授法の効果を明らかにする。

第５章では，第３章と第４章で明らかになった事実を基に，割合に関する概念的知識と手続き的知識における３つの状況の詳細な関係について考察を行う。また，割合に関する数理構造の理解を促進する教授法の効果に関して，その要因について考察を行う。最後に，本研究の成果を踏まえ，今後の課題について述べる。

第２章　割合の概念形成についての研究

2.1　２つの対象物の比較に関する研究

２つの対象物の比較に関する研究[174]の目的は，２つの相似な図形の比較において，児童が用いる比較の仕方を明らかにすることである。そこで，以下に示す２つの相似な図形の比較に関する調査問題を作成し，「割合」の単元が既習である第５学年の児童 67 名，第６学年の児童 100 名を対象に調査を実施した。

(1) 調査問題

調査問題は，以下の３点を考慮して作成した。

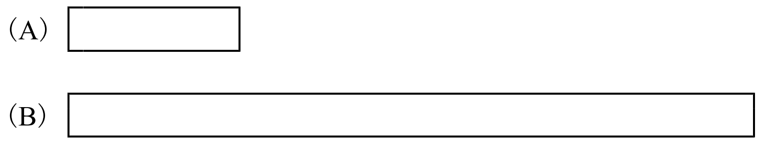
①比較する対象物の形に関して，児童に馴染みのある長方形，正方形，正三角形だけでなく，三角形と四角形で構成された図形や曲線を含む身の回りのものの形を対象物として設定する。

②比較する対象物の数に関して，比較する対象物を自ら選択できるように，比較する２つの対象物が指定された場面だけでなく，比較する対象が複数含まれる場面を設定する。

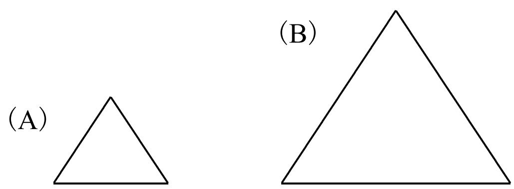
③比較する対象物の大きさに関して，児童が捉えやすい割合である２倍，３倍，４倍を基本とし，相似比が１：２，１：３，１：４となる相似な図形を設定する。

・相似比が１：２の問題［問題２，問題４，問題５］
・相似比が１：３の問題［問題３］
・相似比が１：４の問題［問題１］

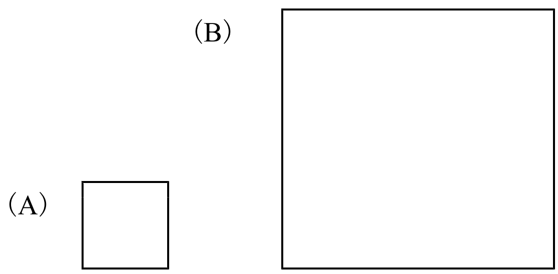
〔問題１〕２本のリボンを比べるとき，比べて分かったことをくわしく書きなさい。
ただし，比べて分かったことがいくつもあるときは，全て書きなさい。



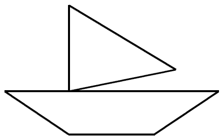
〔問題２〕２つの正三角形を比べるとき，比べて分かったことをくわしく書きなさい。
ただし，比べて分かったことがいくつもあるときは，全て書きなさい。

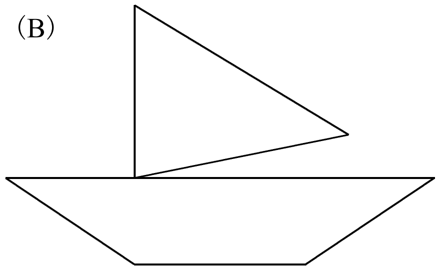


〔問題３〕２つの正方形を比べるとき，比べて分かったことをくわしく書きなさい。
ただし，比べて分かったことがいくつもあるときは，全て書きなさい。

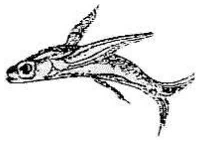


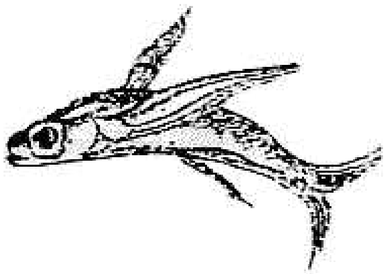
〔問題４〕２そうのヨットを比べるとき，比べて分かったことをくわしく書きなさい。
ただし，比べて分かったことがいくつもあるときは，全て書きなさい。

(A)


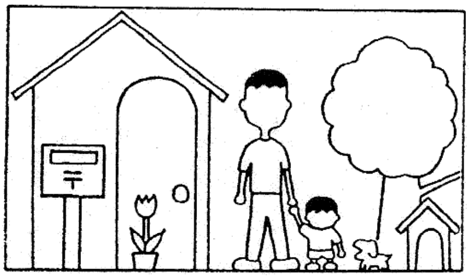
(B)


〔問題５〕２ひきの魚を比べるとき，比べて分かったことをくわしく書きなさい。
ただし，比べて分かったことがいくつもあるときは，全て書きなさい。

(A)


(B)


〔問題６〕下の絵の中から選んで比べるとき，比べて分かったことをくわしく書きなさい。
ただし，比べて分かったことがいくつもあるときは，全て書きなさい。



⑵児童の記述を得点化する基準

調査結果の分析に当たり，児童の記述を得点化するために，以下に示す基準を設定した。

①比較を行っていない場合は０点とする。
②大小による比較という質的な比較を行っている場合は１点とする。
③差による比較という量的な比較を行っている場合は２点とする。
④割合による比較を行っている場合は４点とする。
⑤異なる基準に該当する記述がある場合は，それぞれの記述に対する得点の合計得点とする。
⑥同じ基準に該当する記述が複数ある場合は，まとめて１つの記述と判断し，合計得点としない。

①～⑥の基準にしたがって得点化をすることにより，「比較していない（０点），大小による比較（１点），差による比較（２点），大小による比較と差による比較（３点）・割合による比較（４点），大小による比較と割合による比較（５点），差による比較と割合による比較（６点），大小による比較と差による比較と割合による比較（７点）」というように，児童の解答パターンを再現することができる。

⑶調査結果の分析と考察

第５・６学年の児童の各問題の得点分布を表 2-1 に示す。また，問題１～問題６の得点の合計を総得点とし，学年別の総得点分布を表 2-2 に示す。

表2-1　各問題の得点分布

得点	0	1	2	3	4	5	6	7
問題１	14	82	13	9	15	24	9	1
問題２	18	89	20	9	12	14	5	0
問題３	19	83	22	14	15	11	2	1
問題４	21	120	7	1	11	5	1	1
問題５	25	111	11	1	12	5	1	1
問題６	26	112	12	1	10	3	0	3

表2-2　学年別の総得点分布表

総得点	５年	６年	全体	総得点	５年	６年	全体	総得点	５年	６年	全体
0	0	7	7	15	0	3	3	30	0	1	1
1	0	3	3	16	0	7	7	31	0	0	0
2	0	1	1	17	1	2	3	32	0	0	0
3	1	2	3	18	2	0	2	33	0	0	0
4	2	3	5	19	0	1	1	34	0	0	0
5	2	4	6	20	2	5	7	35	0	0	0
6	36	18	54	21	1	1	2	36	0	1	1
7	2	5	7	22	0	2	2	37	0	0	0
8	1	4	5	23	0	0	0	38	0	0	0
9	1	3	4	24	0	1	1	39	0	0	0
10	9	7	16	25	0	1	1	40	0	0	0
11	2	3	5	26	1	1	2	41	0	0	0
12	1	8	9	27	1	0	1	42	0	0	0
13	2	2	4	28	0	1	1				
14	0	3	3	29	0	0	0				

表 2-1 を基に各問題の児童の解答パターンを判断すると，問題１において，割合による比較を行っている４点以上の児童は全体の 29.3%，問題２において 18.6%，問題３において 17.4%，問題４において 10.8%，問題５において 11.4%，問題６において 9.6%である。「割合」の単元が既習であるにも関わらず，割合による比較を行うことのできる児童が極めて少ない。このことから，第５学年と第６学年の児童にとって，割合による比較を行うことはかなり難しいと言える。

また，表 2-2 より，総得点について，第５学年の児童と第６学年の児童の平均の差に関する t 値を算出すると，t ＝ 1.896 である。有意水準５％において，自由度 150 の場合，t の臨界値は 1.98 である。第５学年の児童と第６学年の児童の平均間に有意な差がない。このことから，第６学年において，分数の乗除，比の概念の導入，比例の学習が既に行われているにもかかわらず，これらの学習が割合の活用にほとんど適用されていないと考えられる。

さらに，表 2-2 を基に，総得点に関する平均値（X）と標準偏差（SD）を算出すると，X ＝ 9.826，SD ＝ 6.535 である。これらの平均値と標準偏差から，次に示すような Category を設定する。

Category １：（X-SD）≦３

Category ２：４≦（X-SD）かつ（X+SD）≦ 16

Category ３：17 ≦（X+SD）

この Category に基付いた各 Category における度数分布を表 2-3 に示す。また，各 Category に属する児童の解答パターンを表 2-4 に示す。

表2-3　各Categoryの度数分布表

Category	1	2	3
得点範囲	０～３	４～16	17～36
度数	14	128	25

表2-4　各Categoryに属する児童の解答パターン

	1	2	3	4	5	6	7
Category １	14	0	0	0	0	0	0
Category ２	563	59	28	35	27	4	1
Category ３	20	25	7	39	35	15	6

各 Category に属する児童の典型的なプロトコールとして，得点３，得点 10，得点 28 から１名ずつを抽出し，これらの児童のプロトコールを以下に示す。

○ Category １：得点３〔６年児童 KI〕
問題１：B の方が長い。面積。
問題２：B の方が大きい。面積。
問題３：面積。
問題４：面積。
問題５：ぱっと見て。
問題６：A の方が高い。

○ Category ２：得点 10〔５年児童 RT〕
問題１：A・B の長さが，B の方が長い。B は A の２倍以上ある。
問題２：A の方が大きさが小さい。B の方が面積が広い。
問題３：ぱっと見たときに，大小の区別がはっきりする。面積が A の方がせまい。
問題４：大きさが A の方が小さい。面積は B の方が広い。
問題５：A の方が小さい。
問題６：犬ごやより家の方が全体的に大きい。家の方が出入口が広い。

○ Category ３：得点 28〔６年児童 KI〕
問題１：A より B の方が４倍とちょっと長い。面積も A より B の方が４倍とちょっと大きい。
問題２：A より B の方が１辺の長さも面積も２倍長くて大きい。逆に言うと，A は B の 1/2 である。比で表すと１：２になる。
問題３：A と B では B の方が３倍とちょっと大きい。面積で表すと，14.8 － 5.2 ＝ 9.6 で，9.6cm^2 の差がある。
問題４：A より B の方が２倍とちょっと大きい。
問題５：A は約４ cm，B は約８ cm。B の方が約２倍大きいけど，その他はあまり変わらない。
問題６：A の家は B の小屋より 7.3 － 2.2 で 5.1cm 高い。面積で表すと，約 36.5 －約 2.2 で約 34.3cm^2 だけ A の方が大きい。全体的に A の方が B より３倍とちょっと大きい。

表 2-4 と Category １～ Category ３に属する児童の典型的なプロトコールより，各 Category 間の差異は明らかである。したがって，児童が用いる比較の仕方の観点から，割合についての児童の認識は，３つのカテゴリーに分類できる。

2.2　比較における着目の仕方と方略に関する研究

比較における着目の仕方と方略に関する研究[175]の目的は，確率比較課題において，児童が用いる比較対象への着目の仕方及び比較の方略の発達段階を明らかにすることである。そこで，以下に示す２つのくじの当たりやすさの比較に関する調査問題を作成し，「割合」の単元が未習である第５学年の児童 87 名，「割合」の単元が既習である第６学年の児童 71 名を対象に調査を実施した。

(1) 調査問題

調査問題は，Singer, J. A. & Resnick, L. B.［59］の「Marbles 問題」を用いた調査を参考に，以下の３点を考慮して作成した。

①比較対象への着目の仕方を明らかにするために，当たりくじの数，はずれくじの数，くじ全体の数を同時に提示する「Complete 問題」の形式に限定する。

②場面の設定に関して，Marble を取り出すよりも，児童にとって比較的馴染みがあるくじを引く場面に変更する。

③数値の設定に関して，割合による比較に関する発達段階をより明確にするために，児童が着目しやすいと考えられる２倍・1/2 という特殊な割合を考慮する。また，次のように数値を設定することにより，正答に至る比較の方略を問題によって選択できるようにする。

- くじ全体の数が等しい問題［問題１，問題３］
- 一方のはこの部分(当たり)が全体の「半分」より多く，他方のはこの部分(当たり)が全体の「半分」より少ない問題［問題３，問題４］
- 両方のはこの部分(当たり)が全体の「半分」より少ない問題［問題２，問題５］
- 「部分－部分」(当たり－はずれ)が２倍・1/2 の関係である問題［問題２，問題３］

〔問題１〕当たりくじとはずれくじの入った２つのはこ A と B があります。
A のはこには，当たりくじが３本とはずれくじが５本，全部で８本入っています。
B のはこには，当たりくじが４本とはずれくじが４本，全部で８本入っています。
くじを１本引く時，どちらのはこから引く方が当たりやすいですか。

（1）下の３つのどれかに○をつけてください。

A のはこの方が当たりやすい	A と B のどちらのはこでも同じ	B のはこの方が当たりやすい
□	□	□

（2）なぜ上のように○をつけたのか，その理由をくわしく書いてください。

□

〔問題２〕当たりくじとはずれくじの入った２つのはこ A と B があります。
A のはこには，当たりくじが５本とはずれくじが 10 本，全部で 15 本入っています。
B のはこには，当たりくじが３本とはずれくじが６本，全部で９本入っています。
くじを１本引く時，どちらのはこから引く方が当たりやすいですか。
（1）と（2）は問題１と同様。以下，略

〔問題３〕当たりくじとはずれくじの入った２つのはこ A と B があります。
A のはこには，当たりくじが４本とはずれくじが８本，全部で 12 本入っています。
B のはこには，当たりくじが８本とはずれくじが４本，全部で 12 本入っています。
くじを１本引く時，どちらのはこから引く方が当たりやすいですか。

〔問題４〕	当たりくじとはずれくじの入った２つのはこ A と B があります。 A のはこには，当たりくじが６本とはずれくじが７本，全部で 13 本入っています。 B のはこには，当たりくじが４本とはずれくじが３本，全部で７本入っています。 くじを１本引く時，どちらのはこから引く方が当たりやすいですか。
〔問題５〕	当たりくじとはずれくじの入った２つのはこ A と B があります。 A のはこには，当たりくじが５本とはずれくじが８本，全部で 13 本入っています。 B のはこには，当たりくじが４本とはずれくじが７本，全部で 11 本入っています。 くじを１本引く時，どちらのはこから引く方が当たりやすいですか。

⑵児童の記述を記号化する基準

調査における児童の記述を参照したとき，着目の仕方と比較の方略に関して，いくつかの識別可能な記述表現が見られた。そこで，各問題に対する児童の記述を分類するために，当たりくじの数，はずれくじの数，くじ全体の数のどの関係に着目して比較をしたか，どのような比較の方略を使用したかの２つの観点から基準を定め記号化を行った。また，複数の基準に関係する記述がある場合は，答を選択するに至った最終判断の記述をもとに記号化を行った。さらに，どちらの基準に関係するか記述から判断がつきにくい場合は，他の問題の記述の傾向から判断し，記号化を行った。なお，以下に各問題において児童が書いた理由の代表的な記述を先ず述べ，それらを記号化と対応づける。

〔問題１〕
記述１：全部のくじの数は同じで，A より B の方が当たりくじが多いので，B の方が当たりやすい。
記述２：A は当たりくじよりはずれくじの方が２本多く, B は当たりくじとはずれくじが同じだから，B の方が当たりやすい。
〔問題２〕
記述３：A は B より当たりくじが多く，B は A よりはずれくじの数が少ないので，どちらも当たりやすさは同じ。
記述４：A は当たりくじの２倍がはずれくじで，B も当たりくじの２倍がはずれくじだから，当たりやすさは同じ。
記述５：A も B もあたりくじの３倍が全部のくじの数になっているので，当たりやすさは同じ。
〔問題３〕
記述６：全部のくじの数は同じで，B ははずれくじより当たりくじの方が多く，A は当たりくじよりはずれくじの方が多いから，B の方が当たりやすい。
記述７：B は当たりくじが A の２倍で，はずれくじが A の 1/2 だから，B の方が当たりやすい。
〔問題４〕
記述８：A は当たりくじよりはずれくじの方が多く, B ははずれくじより当たりくじの方が多いから，B の方が当たりやすい。
記述９：A の当たりくじは半分以下で，B のあたりくじは半分以上なので，B の方が当たりやすい。
〔問題５〕
記述 10：A も B も当たりくじとはずれくじの差が３本なので，その時は当たりくじの多い A の方が当たりやすい。
記述 11：A は B より当たりくじもはずれくじも１本ずつ多いので，当たりやすさは同じ。
記述 12：A は当たりくじの 1.6 倍がはずれくじで，B は当たりくじの 1.75 倍がはずれくじなので，A の方があたりやすい。

児童が着目した全ての関係を図 2-1 に示す。また，図 2-1 を基に作成した着目の仕方に関する記号

化の基準を表 2-5 に示す。さらに，着目した２つの数量を関係づける比較の方略に関する記号化の基準を表 2-6 に示す。

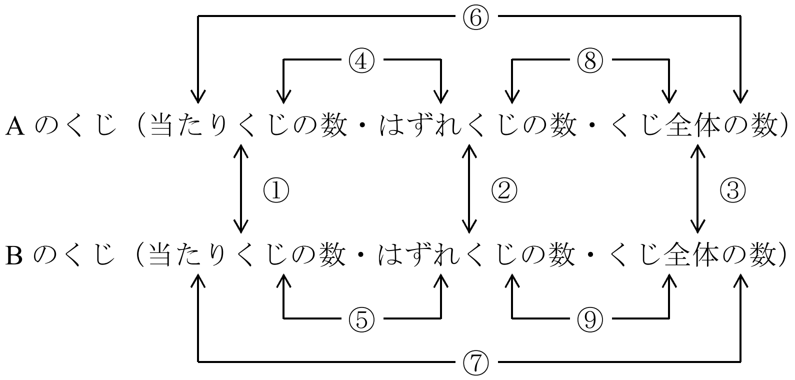


図2-1　児童が着目した全ての関係

表2-5　着目の仕方に関する記号化の基準

P	①または②という部分だけに着目し，判断する。
W	③という全体だけに着目し，判断する。
P･P	①に着目した判断と②に着目した判断の２つを関係づける。〈記述３，記述７，記述11〉
P･W	①または②に着目した判断と③に着目した判断の２つを関係づける。
P･P･W	①着目した判断，②に着目した判断，③に着目した判断の３つを関係づける。
P-P	④と⑤という「部分－部分」に着目し，判断する。〈記述２，記述４，記述８，記述９，記述12〉
P-P･P	④と⑤に着目するが，最終判断として①または②に着目し，判断する。〈記述10〉
P-P･W	④と⑤に着目するが，最終判断として，③に着目し，判断する。
P-W	⑥と⑦または⑧と⑨という「部分－全体」に着目し，判断する。〈記述５〉 ①または②だけに着目したり，④と⑤に着目したりし，判断しているが，「全体が同じ」という記述がある。〈記述１，記述６〉

表2-6　比較の方略に関する記号化の基準

大小	数値の大小による比較を行う。〈記述１，記述３，記述６，記述８〉
差	２量の差による比較を行う。〈記述２，記述 10，記述 11〉
半分	２倍・1/2(半分という記述も含む)という特殊な割合による比較を行う。〈記述４，記述７〉
割合	割合による比較を行う。〈記述５，記述 12〉 最小公倍数や比を考えて比較を行う。

(3)調査結果の分析と考察

1)正答率

各問題の正答者数と誤答者数を表 2-7 に示す。表中の( )内は百分率を表す。

表2-7　各問題の正答率

		問題１	問題２	問題３	問題４	問題５
正答	５年	86（98.9）	36（41.4）	84（96.6）	70（80.5）	21（24.1）
	６年	70（98.6）	43（60.6）	69（97.2）	57（80.3）	20（28.2）
誤答	５年	1 （1.1）	51（58.6）	3 （3.4）	17（19.5）	66（75.9）
	６年	1 （1.4）	28（39.4）	2 （2.8）	14（19.7）	51（71.8）

表 2-7 より，いずれの学年においても，問題１→問題３→問題４→問題２→問題５の順に調査問題の難易度が高くなっている。

2)着目の仕方

児童が，当たりくじの数，はずれくじの数，くじ全体の数のどの関係に着目して比較をするのかを調べるために，着目の仕方に関する記号化の基準にしたがって，各問題における着目の仕方を表 2-8 示す。表中の「その他」は，「P･W」と「P･P･W」を含む。また，( )内は百分率を表す。

表2-8　各問題における着目の仕方

		問題１	問題２	問題３	問題４	問題５
P/W	P or W	25（15.8）	29（18.4）	30（19.0）	14（8.9）	23（14.6）
	P･P	29（18.4）	17（10.8）	32（20.3）	12（7.6）	26（16.5）
	P-P･Por P-P･W	0（0）	2（1.3）	0（0）	3（1.9）	8（5.1）
	その他	0（0）	5（3.2）	0（0）	2（1.3）	5（3.2）
P-P		67（42.4）	83（52.5）	61（38.6）	113（71.5）	79（50.0）
P-W		37（23.4）	22（13.9）	35（22.2）	14（8.9）	17（10.8）

表 2-8 より，部分や全体だけに着目している(P/W)児童は 1/4 程度いる。一方の部分に着目した判断と他方の部分に着目した判断の２つを関係づけようとしている児童(P･P)や，「部分－部分」に着目しているが，最終判断として，部分や全体だけに着目し，判断している児童(P-P･P or P-P･W)も，「部分－部分」の関係に準ずるものと考えられる。したがって，割合に関する問題を解決するために，明らかに児童は「部分－全体」よりは，「部分－部分」に着目すると考えられる。そこで，第５学年と第６学年の児童における着目の仕方を比較するために，第５・６学年の児童が用いた各問題における着目の仕方を表 2-9 に示す。表中の( )内は百分率を表す。

表2-9　第５・６学年の児童の着目の仕方

	P/W		P-P		P-W	
	５年	６年	５年	６年	５年	６年
問題１	30（34.5）	24（33.8）	43（49.4）	24（33.8）	14（16.1）	23（32.4）
問題２	31（35.6）	22（31.0）	51（58.6）	32（45.1）	5（5.7）	17（23.9）
問題３	36（41.4）	26（36.6）	39（44.8）	22（31.0）	12（13.8）	23（32.4）
問題４	18（20.7）	13（18.3）	66（75.9）	47（66.2）	3（3.4）	11（15.5）
問題５	31（35.6）	31（43.7）	50（57.5）	29（40.8）	6（6.9）	11（15.5）

表 2-9 より，全ての問題において第５学年より第６学年の方が，「部分－全体」に着目している児童が多い。しかし，いずれの学年においても，全体として，「部分－全体」より「部分－部分」に着目する傾向があると考えられる。このように，第５学年の児童が，「部分－全体」より「部分－部分」に着目して比較をするということを考慮すると，単元全体を通して，「部分－全体」を意識した指導計画を立てるとともに，割合による比較の導入においては，「部分－部分」の関係である２量に関する問題を扱う方がよいと考えられる。

3)比較の方略

児童が，どの比較の方略を用いて，着目した２つの数量を関係づけるのかを調べるために，比較の方略に関する記号化の基準にしたがって，各問題における比較の方略を表 2-10 に示す。表中の( )内は百分率を表す。

表2-10　各問題における比較の方略

	大小		差		半分		割合	
	５年	６年	５年	６年	５年	６年	５年	６年
問題１	66（75.9）	49（69.0）	14（16.1）	15（21.1）	2 （2.3）	0 （0）	5 （5.7）	7 （9.9）
問題２	35（40.2）	23（32.4）	19（21.8）	10（14.1）	29（33.3）	18（25.4）	4 （4.6）	20（28.2）
問題３	68（78.2）	51（71.8）	7 （8.0）	9（12.7）	10（11.5）	6 （8.5）	2 （2.3）	5 （7.0）
問題４	64（73.6）	39（54.9）	21（24.1）	21（29.6）	1 （1.1）	1 （1.4）	1 （1.1）	10（14.1）
問題５	35（40.2）	22（31.0）	47（54.0）	32（45.1）	1 （1.1）	0 （0）	4 （4.6）	17（23.9）

表 2-10 より，問題５において，割合による比較ができた第６学年の児童は 23.9 ％であり，既習内容であるにも関わらず，割合をよく理解できていないと判断できる。この理由として，割合を求めることはあっても，割合を使って比較する経験が少ないことや，割合による比較を十分に理解していない児童にとっては，割合による比較を適用することができなかったと考えられる。さらに，割合が未習の内容である第５学年の児童の方が，第６学年の児童より，全体として，２倍・1/2 に着目して比較できる。このように，第５学年の児童が，２倍・1/2 に着目して比較できることを考慮すると，割合の単元の導入においては，２倍・1/2 を上手く活用した授業展開の工夫が必要である。

4)割合による比較に関する発達段階

児童の各問題における比較の方略を調べると，５題全ての問題に対して，割合による比較は行わず，少なくとも１題は２倍・1/2 による比較を行った児童が 44 名いた。これらの児童に関する各問題における比較の方略を表 2-11 に示す。なお，表 2-11 における１は「大小」，２は「差」，３は「半分」，４は「割合」を表している。また，左から正答率の低い問題から順に並べてある。

表2-11　「２倍・1/2」による比較を行った児童の比較の方略

	問題５	問題２	問題４	問題３	問題１		問題５	問題２	問題４	問題３	問題１
H1	1	1	1	3	1	H23	2	3	1	1	2
H2	1	1	1	3	2	H24	2	3	1	1	2
H3	1	1	1	3	3	H25	2	3	1	1	2
H4	1	3	1	1	1	H26	2	3	1	1	2
H5	1	3	1	1	1	H27	2	3	1	1	2
H6	1	3	1	1	1	H28	2	3	1	3	1
H7	1	3	1	1	1	H29	2	3	1	3	1
H8	1	3	1	1	1	H30	2	3	1	3	2
H9	1	3	1	1	1	H31	2	3	2	1	1
H10	1	3	1	1	1	H32	2	3	2	1	1
H11	1	3	1	1	2	H33	2	3	2	1	1
H12	1	3	1	3	1	H34	2	3	2	1	1
H13	1	3	1	3	1	H35	2	3	2	1	1
H14	2	3	1	1	1	H36	2	3	2	1	2
H15	2	3	1	1	1	H37	2	3	2	2	1
H16	2	3	1	1	1	H38	2	3	2	2	1
H17	2	3	1	1	1	H39	2	3	2	2	2
H18	2	3	1	1	1	H40	2	3	2	2	2
H19	2	3	1	1	1	H41	2	3	2	3	1
H20	2	3	1	1	1	H42	2	3	2	3	1
H21	2	3	1	1	1	H43	2	3	2	3	2
H22	2	3	1	1	1	H44	3	1	1	1	1

表 2-11 より，H4 ～ H43 の児童は，問題２において２倍・1/2 による比較を行っているが，問題５において大小による比較，あるいは，差による比較を行っている。このことから，２倍・1/2 という特殊な割合による比較は行うことができるが，いわゆる割合による比較は行うことができない段階であると考えられる。また，５題全ての問題に対して，少なくとも１題は割合による比較を行った児童が 35 名いた。これらの児童に関する各問題における比較の方略を表 2-12 に示す。なお，表 2-12 における１は「大小」，２は「差」，３は「半分」，４は「割合」を表している。また，左から正答率の低い問題から順に並べてある。

表2-12　割合による比較を行った児童の比較の方略

	問題５	問題２	問題４	問題３	問題１		問題５	問題２	問題４	問題３	問題１
R1	1	2	1	1	4	R19	4	3	1	2	2
R2	1	3	2	1	4	R20	4	3	2	1	4
R3	2	2	1	1	4	R21	4	3	2	3	4
R4	2	3	1	3	4	R22	4	4	1	2	1
R5	1	4	1	1	4	R23	4	4	1	4	4
R6	1	4	2	1	1	R24	4	4	3	1	1
R7	1	4	2	4	3	R25	4	4	3	3	1
R8	1	4	4	2	2	R26	4	4	4	1	1
R9	2	4	1	1	1	R27	4	4	4	1	1
R10	2	4	1	1	1	R28	4	4	4	1	1
R11	2	4	1	1	1	R29	4	4	4	1	4
R12	2	4	1	1	1	R30	4	4	4	3	2
R13	2	4	1	1	1	R31	4	4	4	4	1
R14	2	4	1	3	1	R32	4	4	4	4	2
R15	4	1	1	1	1	R33	4	4	4	4	4
R16	4	1	2	1	2	R34	4	4	4	4	4
R17	4	3	1	1	1	R35	4	4	4	4	4
R18	4	3	1	1	1						

表 2-12 より，R17 ～ R35 の児童は，問題５において割合による比較を行っており，また，問題２においても２倍・1/2 による比較，あるいは，割合による比較を行っている。このことから，割合による比較を十分に理解している段階であると考えられる。一方，R1 ～ R14 番の児童は，問題１～問題４において，少なくとも１題は割合による比較を行っているが，問題５において割合による比較を行っていない。また，R15 と R16 の児童は，問題５において，割合による比較を行っているが，問題２において大小による比較を行っている。このことから，R1 ～ R16 の児童は，数値に依存して割合が使えたり，使えなかったりする段階であると考えられる。つまり，割合による比較を十分に理解しているというわけではないが，全く理解していないというわけでもない段階である。まさに，この段階の児童が，割合による比較への「過渡期」にいると考えられる。

したがって，大小による比較や差による比較しか行うことができない段階を，割合による比較がよく分かっていない段階とすると，割合による比較において，次の４つの発達段階があると考えられる。

第１段階：割合による比較がよく分かっていない段階
第２段階：２倍・1/2 という特殊な割合による比較は行うことができる段階
第３段階：数値に依存して割合が使えたり使えなかったりする「過渡期」の段階
第４段階：割合による比較を十分に理解している段階

2.3　全体への着目に関する研究

全体への着目に関する研究[176]の目的は，確率比較課題において，全体への着目に対する全体を構成する部分の数の影響及び「部分－全体」に関して２倍・1/2 の関係である数値の提示の効果を明らかにすることである。そこで，以下に示す３つの部分(１等，２等，はずれ)で構成される２つの福引きにおける部分(２等)の出やすさの比較に関する調査問題 A 及び２つの部分(当たりとはずれ)で構成される２つの福引きにおける部分(はずれ)の出やすさの比較に関する調査問題 B を作成した。調査問題 A を用いる第５学年の児童 32 名を実験群，調査問題 B を用いる第５学年の児童 31 名を統制群として，調査を実施した。

(1)調査問題

実験群の調査問題 A は以下の３点を考慮して作成した。

①全体への着目に関する部分の数の影響を明らかにするために，単なる「部分－部分」への着目では解決できな３つの部分の提示(実験群)と，「部分－部分」に着目して解決できる２つの部分の提示(統制群)における着目の仕方を比較する。

②はずれやすさを求める対象とすると，１等と２等を合わせた当たりに意味があり，当たりとはずれという「部分－部分」に着目しやすくなる。また，１等の出やすさを求める対象とすると，１等を当たりと考え，２等とはずれを合わせたものをはずれとすることに意味があり，当たりとはずれという「部分－部分」に着目しやすくなる。しかし，２等の出やすさを求める対象とすることにより，２等より上位の１等とはずれを合わせたものをはずれとすることに意味はなく，全体に着目する必要性が出てくる。

③「１等＋はずれ＝２等」となる数値を設定すると，「部分－部分」に着目しやすくなるので，１等，２等，はずれの数値を考慮する必要がある。そこで，「部分(２等)－全体」に関して「1/2」の関係を基準とし，それより大きい場合，小さい場合，また，それと等しい場合を組み合わせ，次の条件を満たすように１等，２等，はずれの数値を設定した。

- 箱 A の２等の割合＝ 1/2，箱 B の２等の割合＝ 1/2 〔問題１〕
- 箱 A の２等の割合＝ 1/2，箱 B の２等の割合＜ 1/2 〔問題２〕
- 箱 A の２等の割合＞ 1/2，箱 B の２等の割合＝ 1/2 〔問題３〕
- 箱 A の２等の割合＜ 1/2，箱 B の２等の割合＜ 1/2 〔問題４〕
- 箱 A の２等の割合＞ 1/2，箱 B の２等の割合＞ 1/2 〔問題５〕

〔問題１〕

赤玉(１等)，青玉(２等)，白玉(はずれ)の３種類の玉の入った２つのはこ A と B があります。
はこを１回まわして福引きをするとき，どちらのはこの方が青玉(２等)が出やすいですか。

	１等	２等	はずれ
はこ A	14 本	41 本	27 本
はこ B	18 本	53 本	35 本

（１）下の３つのどれかに○をつけてください。

A のはこの方が２等が出やすい	A と B のどちらのはこでも同じ	B のはこの方が２等が出やすい
□	□	□

（２）なぜ上のように○をつけたのか，その理由をくわしく書いてください。

問題２～問題５に関しても同様の問題文であるため，異なる１等，２等，はずれの数値のみを示す。

〔問題２〕

	１等	２等	はずれ
はこ A	17 本	55 本	38 本
はこ B	26 本	70 本	48 本

〔問題４〕

	１等	２等	はずれ
はこ A	16 本	49 本	37 本
はこ B	28 本	75 本	49 本

〔問題３〕

	１等	２等	はずれ
はこ A	15 本	52 本	29 本
はこ B	19 本	54 本	35 本

〔問題５〕

	１等	２等	はずれ
はこ A	27 本	80 本	49 本
はこ B	14 本	60 本	37 本

統制群の調査問題 B は，当たりとはずれの数値が，実験群の調査問題における１等，２等，はずれの数値と次のような関係となるように作成した。

〔実験群〕　　　　〔統制群〕
「１等＋はずれ」の数値→「あたり」の数値
「２等」の数値→「はずれ」の数値

〔問題１〕

赤玉(当たり)，白玉(はずれ)の２種類の玉の入った２つのはこ A と B があります。はこを１回まわして福引きをするとき，どちらのはこの方が白玉(はずれ)が出やすいですか。

	当たり	はずれ
はこ A	41 本	41 本
はこ B	53 本	53 本

(１)下の３つのどれかに〇をつけてください。

A のはこの方が はずれが出やすい	A と B のどちらの はこでも同じ	B のはこの方が はずれが出やすい
□	□	□

(２) なぜ上のように〇をつけたのか，その理由をくわしく書いてください。

問題２～問題５に関しても同様の問題文であるため，異なる当たりとはずれの数値のみを示す。

〔問題２〕

	あたり	はずれ
はこ A	55 本	55 本
はこ B	74 本	70 本

〔問題４〕

	あたり	はずれ
はこ A	53 本	49 本
はこ B	77 本	75 本

〔問題３〕

	あたり	はずれ
はこ A	44 本	52 本
はこ B	54 本	54 本

〔問題５〕

	あたり	はずれ
はこ A	76 本	80 本
はこ B	51 本	60 本

(2) 児童の記述を記号化する基準

実験群の児童の記述を参照したとき，着目の仕方と比較の方略に関して，いくつかの識別可能な記

述表現が見られた。そこで，各問題に対する児童の記述を分類するために，１等，２等，はずれ，全体のどの関係に着目して比較をしたか，どのような比較の方略を使用したかの２つの観点から，基準を定め記号化を行った。複数の観点で着目している場合には，着目した部分の数を優先して分類する。調査問題 A において実験群の児童が着目した主な関係を図 2-2 に示す。また，図 2-2 を基に作成した着目の仕方に関する記号化の基準(実験群)を表 2-13 に示す。さらに，着目した２つの数量を関係づける比較の方略に関する記号化の基準(実験群)を表 2-14 に示す。

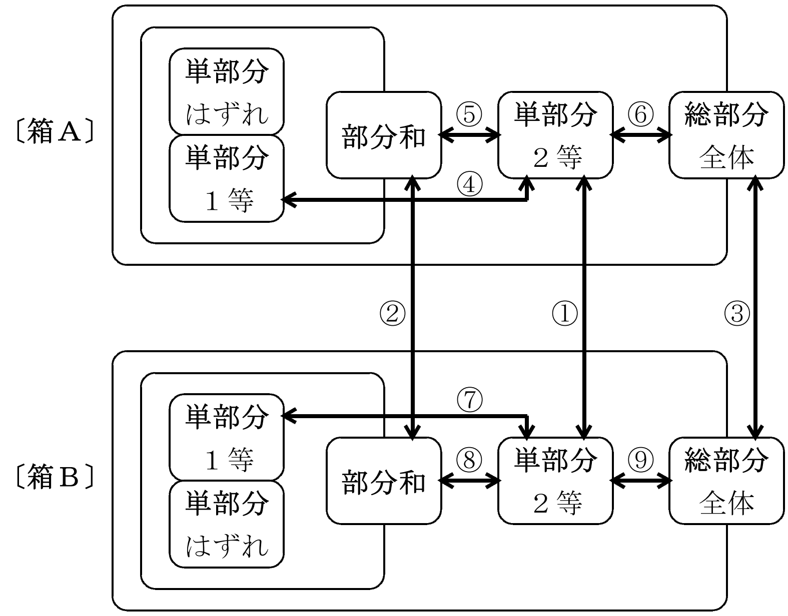


図2-2　実験群の児童が着目した主な関係

表2-13　着目の仕方に関する記号化の基準(実験群)

部分と全体に関する着目の仕方の観点	
単部分	３つの部分(１等，２等，はずれ)のいずれかに着目する。
部分和	２つの部分(１等とはずれ)を合わせて新しく作った部分に着目する。
総部分	３つの部分(１等，２等，はずれ)を合わせた全体に着目する。
「部分－部分」と「部分－全体」に関する着目の仕方の観点	
部分	部分(単部分または部分和)に着目しており，箱 A と箱 B において，部分どうし(単部分と単部分〔①〕または部分和と部分和〔②〕)の比較を行う。
全体	全体(総部分)に着目しており，箱 A と箱 B において，全体どうし(総部分と総部分〔③〕)の比較を行う。
部分－部分	同一の箱内で部分と部分(単部分と単部分〔④と⑦〕または単部分と部分和〔⑤と⑧〕)に着目して関係づけを行い，箱 A と箱 B において，関係づけた値の比較を行う。または，箱 A と箱 B において，部分どうし(単部分と単部分〔①〕)の比較の結果と別の部分どうし(単部分と単部分または部分和と部分和〔②〕)の比較の結果を関係づける。
部分－全体	同一の箱内で部分と全体(単部分と総部分〔⑥と⑨〕)に着目して関係づけを行い，箱 A と箱 B において関係づけた値の比較を行う。または，箱 A と箱 B において，部分どうし(単部分と単部分〔①〕または部分和と部分和〔②〕)の比較の結果と，全体どうし(総部分と総部分〔③〕)の比較の結果を関係づける。

表2-14　比較の方略に関する記号化の基準(実験群)

大小	数値の大小による比較を行う。
差	２量の差による比較を行う。
1/2	「1/2」の境界線より大きい場合，小さい場合，等しい場合という判断による比較を行う。
割合	割合による比較を行う。

統制群の児童の記述を参照したとき，着目の仕方に関して，いくつかの識別可能な記述表現が見られた。そこで，各問題に対する児童の記述を分類するために，当たり，はずれ，全体どの関係に着目して比較をしたかという観点から，実験群と同様に基準を定め記号化を行った。複数の観点で着目している場合には，着目した部分の数を優先して分類した。着目の仕方に関する記号化の基準(統制群)を表 2-15 に示す。「部分－部分」と「部分－全体」に関する着目の仕方の観点は，実験群と同様，「部分」，「全体」，「部分－部分」，「部分－全体」という４つの観点のため，省略する。また，比較の方略の観点も実験群と同様，「大小」，「差」，「1/2」，「割合」という４つの観点のため，省略する。

表2-15　着目の仕方に関する記号化の基準(統制群)

部分と全体に関する着目の仕方の観点	
単部分	２つの部分(当たりとはずれ)のいずれかに着目する。
総部分	２つの部分(当たりとはずれ)を合わせた全体に着目する。

(3)調査結果の分析と考察

1)２倍・1/2の関係である２量と比較の方略

比較の方略として「1/2」の境界線より大きい場合，小さい場合，等しい場合という判断(以下「1/2」)や，割合による判断(以下「割合」)を行っている児童は，実験群では，問題１，問題２においては３人(児童 A，児童 B，児童 C)，問題３～問題５においては２人(児童 A，児童 B)であった。３人とも，「1/2」による比較は行わず，割合による比較を行っていた。また，統制群で，こうした比較の方略を用いていた児童は，問題１においては１人(児童 D)，問題２においては１人(児童 E)，問題３～問題５においては０人であった。２人とも，割合による比較は行わず，「1/2」による比較を行っていた。このことは，実験群と統制群のどちらにおいても，殆どの児童が大小や差による比較を行っており，「部分－全体」に関して２倍・1/2 の関係である２量の提示は，全体に着目した割合による比較を行うことに有効に作用しなかったと考えられる。

2)部分と全体に関する着目の仕方

児童が「部分－全体」に着目するためには，まず，全体に着目する必要がある。そこで，実験群と統制群の各問題における部分(単部分，部分和)と全体(総部分)への着目の仕方を表 2-16 に示す。表中の( )内は百分率を表す。

表2-16　実験群と統制群の部分と全体への着目の仕方

	問題１		問題２		問題３		問題４		問題５	
	実験群	統制群	実験群	統制群	実験群	統制群	実験群	統制群	実験群	統制群
単部分	11 (34.4)	30 (96.8)	10 (31.2)	30 (96.8)	12 (37.5)	31 (100)	10 (31.3)	29 (93.5)	10 (31.3)	31 (100)
部分和	4 (12.5)		7 (21.9)		8 (25)		9 (28.1)		9 (28.1)	
総部分	17 (53.1)	1 (3.2)	15 (46.9)	1 (3.2)	12 (37.5)	0 (0)	13 (40.6)	2 (6.5)	13 (40.6)	0 (0)

表 2-16 より，全ての問題において，全体(総部分)に着目する割合は，実験群の方が統制群よりも高い。このことから，３つの部分の提示の方が，２つの部分の提示よりも，全体(総部分)に着目しやすい提示であると言える。したがって，全体を構成する部分の数を変化させたことは，全体(総部分)への着目に影響したと考えられる。また，「部分和」は２つの部分を合わせて新しく１つの部分を作った場合であり，「部分和」により新しい部分を作り出すことは，「部分－部分」の関係において問題を解決しようとする過程であると考えられる。したがって，「部分和」に着目した児童の割合が，問題１を除き，20 ～ 30 %程度であることから，児童は，全体を構成する部分の数が変化しても，「部分－部分」に着目することにかなり強い執着心があると考えられる。

3)「部分－部分」と「部分－全体」に関する着目の仕方

全体への着目が，「部分－全体」への着目にも影響しているかを調べるために，実験群と統制群の各問題における「部分」,「全体」,「部分－部分」,「部分－全体」への着目の仕方を表 2-17 に示す。「部分和」により新しい部分を作り出すことが,「部分－部分」の関係において問題を解決する過程であることを考慮して,「部分和」を「部分」として扱った。また，表中の( )内は百分率を表す。

表2-17　実験群と統制群の「部分－部分」と「部分－全体」への着目の仕方

	問題１		問題２		問題３		問題４		問題５	
	実験群	統制群	実験群	統制群	実験群	統制群	実験群	統制群	実験群	統制群
部分	9 (28.1)	8 (25.8)	9 (28.1)	7 (22.6)	11 (34.4)	9 (29)	9 (28.1)	9 (29)	9 (28.1)	9 (29)
全体	5 (15.6)	0 (0)	6 (18.8)	0 (0)	5 (15.6)	0 (0)	7 (21.9)	1 (3.2)	8 (25)	0 (0)
部分－部分	6 (18.8)	22 (71)	8 (25)	23 (74.2)	9 (28.1)	22 (71)	10 (31.2)	20 (64.6)	10 (31.3)	22 (71)
部分－全体	12 (37.5)	1 (3.2)	9 (28.1)	1 (3.2)	7 (21.9)	0 (0)	6 (18.8)	1 (3.2)	5 (15.6)	0 (0)

表 2-17 より，全ての問題において，実験群は「部分－全体」に着目する割合が高く，逆に，統制群は「部分－部分」に着目する割合が高い。また，表中の「部分－部分」と「部分－全体」に関して χ^2 検定を行った。問題１に関して $\chi^2 = 18.11$，問題２に関して $\chi^2 = 12.83$，問題３に関して $\chi^2 = 11.80$，問題４に関して $\chi^2 = 6.34$，問題５に関して $\chi^2 = 8.48$ である。有意水準５%において，自由度１の場合，χ^2 の臨界値は 3.84 である。全ての問題において，有意な差がある。したがって，全体を構成する部分の数を変化させた(部分の数を３つにした)ことは，「部分－全体」への着目にも影響したと考えられる。このことから，調査問題で用いたような３つの部分の提示をすることは，自ら全体の量を作り出し，「部分－全体」の関係を意識して考えるきっかけになると考えられる。また，「割合のグラフ」では，全体の量(合計)は示されているが，２つ以上の部分を扱っており，各部分の意味を理解するためには，「部分－全体」の関係を意識しなければならない内容となっている。したがって，調査問題で用いたような３つの部分の提示を経験することで，割合の単元における「割合」や「百分率」の学習と「割合のグラフ」の学習のつながりをスムーズにすることができると考えられる。

4)比例的方略と着目の仕方

２つの項目において，一方の項目内の１つの要素と他方の項目内の１つの要素に着目した考察をする Between 方略と，２つの項目において, それぞれの項目内の２つの要素に着目した考察をする Within 方略という２つの比例的方略の観点から，着目の仕方を分析したとき，児童の用いる比例的方略に１つの傾向があるように思われる。そこで,「部分－部分」と「部分－全体」に着目した実験群の児童が用いた比例的方略を表 2-18 に示す。表中の( )内は百分率を表す。

表2-18　「部分－部分」と「部分－全体」への着目と比例的方略の関係

	部分－部分		部分－全体	
	Between 方略	Within 方略	Between 方略	Within 方略
問題１	0(0)	6(100)	9(75)	3(25)
問題２	0(0)	8(100)	6(66.7)	3(33.3)
問題３	2(22.2)	7(77.8)	6(85.7)	1(14.3)
問題４	2(20)	8(80)	5(83.3)	1(16.7)
問題５	4(40)	6(60)	4(80)	1(10)

表 2-18 より，３つの部分の提示により，「部分－部分」に着目した児童の多くが，割合の学習で達成すべき Within 関係において関係づけを行っており，「部分－全体」に着目した児童の多くは，Between の関係において関係づけを行っていると考えられる。このことから，Within の関係における割合の考え方の構成には，「部分－部分」が適していると考えられる。

2.4　３組以上の数量関係の比較に関する研究

３組以上の数量関係の比較に関する研究[177]の目的は，確率比較課題において，３組以上の数量関係を比較する場合の割合に関する児童の認識の仕方を明らかにすることを目的とする。そこで，以下に示す３つのくじの当たりやすさの比較に関する調査問題を作成し，「割合」の単元が未習である第５学年の児童 51 名を対象に調査を実施した。

(1) 調査問題

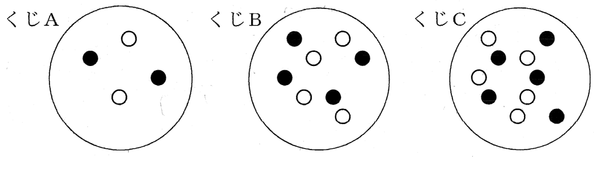
調査問題は，以下の２点を考慮して作成した。

①解答形式に関して，児童の割合の認識の仕方を分析するために，くじ A，B，C の当たりやすさの大小を記号「＜，＞，＝」で記入する形式及びその解答に至った理由を述べる記述形式の２つを使用する。

②３つのくじ A，B，C の当たりやすさを比較するとき，３つのくじの当たりやすさが等しい場合，３つの内２つのくじの当たりやすさが等しい場合，３つのくじの当たりやすさが等しくない場合の３つが考えられる。なお，当たりくじの集合を X，はずれくじの集合を Y，全体集合を S，当たりくじの総数を $n(X)$，はずれくじの総数を $n(Y)$，くじ全体の総数を $n(S)$ と表す。３つのくじそれぞれについて，$n(X) = n(Y)$ の場合あるいは $n(X) \neq n(Y)$ の場合が考えられる。$n(X) = n(Y)$ の場合，$n(X)$ は $n(S)$ の半分(1/2)であり，「部分－全体」に着目しやすくなる。また，$n(X)$ が $n(S)$ の半分であることから，$n(X) \div n(S) = 1/2$ と考え，他のくじについても $n(X) \div n(S)$ と考えることにつながる。そこで，３つのくじの当たりやすさが等しい場合と３つの内２つのくじの当たりやすさが等しい場合，当たりやすさが等しいくじに関して $n(X) = n(Y)$ となる数値を設定する。３つのくじの当たりやすさが等しくない場合，１つのくじにおいて，$n(X) = n(Y)$ となる数値を設定することにより，残りの２つのくじにおいて，それぞれ $n(X) > n(Y)$ と $n(X) < n(Y)$ の２通りが考えられる。ここでは，３つのくじについて，$n(X) < n(Y)$，$n(X) > n(Y)$，$n(X) = n(Y)$ の場合と $n(X) > n(Y)$，$n(X) > n(Y)$，$n(X) = n(Y)$ の場合を設定する。

〔問題１〕

当たりくじ(白玉)とはずれくじ(黒玉)の入った３つのくじ A，B，C が順に並べてあります。



くじを１本ずつ引くとき，「当たりくじ」が出やすい順に左から右へ並べ，くじの記号を順に，□の中に記入しなさい。次に，当たりやすさの大小について(　)の中に＜，＞，＝の記号を記入しなさい。

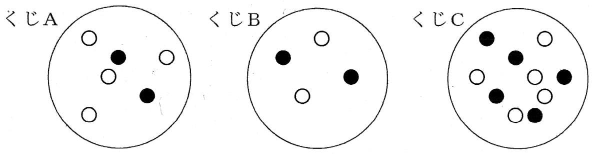
□　(　　　)　□　(　　　)　□

また，３つのくじ A，B，C をならびかえた理由を書きなさい。

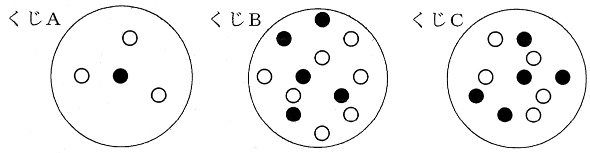
□

なお，問題２～問題４は問題１と同じ問題文であるため，異なる部分のくじ A，B，C の図のみを示す。

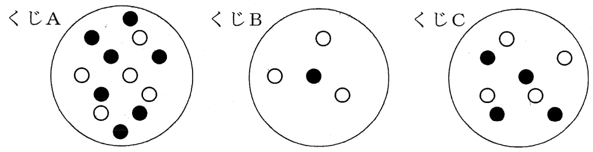
〔問題２〕



〔問題４〕



〔問題３〕



(2) 児童の記述を記号化する基準

1) 事象への着目の仕方

①異なる２つのくじにおける着目の仕方

３つのくじ A，B，C を比較するとき，(A，B)，(B，C)，(C，A)の３通りの組合せが考えられる。任意の１つのくじにおける着目点としては X，Y，S という３つの事象がある。したがって，３つのくじの内，異なる２つのくじにおいて２つの事象に着目する仕方は９通りの組合せが考えられる。くじ A において事象 X に，くじ B において事象 Y に着目することを記号 XY のように表すと，９通りの組合せは，XX，YY，SS，XY，YX，XS，SX，YS，SY と表せる。XY と YX を同じ考え方と見なすと６通りになる。

②１つのくじにおける着目の仕方

任意の１つのくじにおいて，X，Y，S という３つの事象の内，２つの事象に着目する仕方として，３通りの組合せが考えられる。つまり，XY，XS，YS が考えられる。

2) 事象の関係の捉え方

２つの事象の関係の捉え方として，相等，大小，倍(割合)の３通りが考えられる。なお，くじ A, B, C において，当たりくじの集合を順に X_A，X_B，X_C，はずれくじの集合を順に Y_A，Y_B，Y_C，全体集合を順に S_A，S_B，S_C と表す。

相等：２つのくじ A，B において，$n(X_A)=n(X_B)$，あるいは１つのくじ A において，$n(X_A)=n(Y_A)$ というように，相等関係を捉えること。また，２つのくじ A，B において，$n(X_A)-n(X_B)=0$，あるいは１つのくじ A において，$n(X_A)-n(Y_A)=0$ というように差を求め，差が０であると捉えること。

大小：２つのくじ A，B において，$n(X_A)>n(X_B)$，あるいは１つのくじ A において，$n(X_A)>n(Y_A)$

というように，大小関係を捉えること。また，２つのくじ A，B において，$n(X_A) - n(X_B) = 2$，あるいは１つのくじ A において，$n(X_A) - n(Y_A) = 2$ というように差を求め，大小関係を捉えること。

倍(割合)：２つのくじ A，B において，$n(X_A) \div n(X_B) = 2$，あるいは１つのくじ A において，$n(X_A) \div n(Y_A) = 2$ というように，倍関係を捉えること。また，1 つのくじ A において，$n(S_A) \div 2 < n(X_A)$ というように，一方の総数を等分した部分の大きさを考えたり，$n(Y_A) \times 3 = n(S_A)$ というように，一方の部分の倍数を考えたりして，これらと他方の部分や総数との相等関係及び大小関係を捉えること。

3) 割合についての児童の考え方

割合についての児童の考え方として，事象への着目の仕方と事象の関係の捉え方の組合せは，異なる２つのくじについて 18 通り，１つのくじについて９通り，計 27 通りが考えられる。割合についての児童の考え方を表 2-19 に示す。

表2-19　割合についての児童の考え方

異なる２つのくじ間					１つのくじ内				
番号	考え方				番号	考え方			
	事象	関係				事象	関係		
		相等	大小	倍(割合)			相等	大小	倍(割合)
①	XX	○			⑲	XY	○		
②	XX		○		⑳	XY		○	
③	XX			○	㉑	XY			○
④	XY	○			㉒	XS	○		
⑤	XY		○		㉓	XS		○	
⑥	XY			○	㉔	XS			○
⑦	YY	○			㉕	YS	○		
⑧	YY		○		㉖	YS		○	
⑨	YY			○	㉗	YS			○
⑩	SS	○							
⑪	SS		○						
⑫	SS			○					
⑬	XS	○							
⑭	XS		○						
⑮	XS			○					
⑯	YS	○							
⑰	YS		○						
⑱	YS			○					

(3) 調査結果の分析と考察

くじ A，B，C の当たりやすさの大小を「<，>，=」で記入する解答の正答と誤答を次のように定めた。３つの(　)の中に記入する「<，>，=」の記号が，全て正解している完答のものだけを正答とし，１点を付与する。それ以外の解答は誤答とし，０点を付与する。各児童の各問題の得点の合計を合計得点とし，児童の正誤パターンを表 2-20 に示す。表 2-20 において，左から右へ調査問題の正答率が高い問題から低い問題へ，上から下へ合計得点の低得点者から高得点者へと配置する。これにより，解答パターンの違いから区分線を引いた。

表2-20　児童の正誤パターン

児童番号	問題３	問題２	問題１	問題４	合計得点
4	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0
24	0	0	0	0	0
27	0	0	0	0	0
30	0	0	0	0	0
37	0	0	0	0	0
42	0	0	0	0	0
43	0	0	0	0	0
44	0	0	0	0	0
48	0	0	0	0	0
32	0	0	1	0	1
29	0	1	0	0	1
15	1	0	0	0	1
22	1	0	0	0	1
36	1	0	0	0	1
51	1	0	0	0	1
39	1	0	1	0	2
47	1	0	1	0	2
9	1	1	0	0	2
11	1	1	0	0	2
13	1	1	0	0	2
16	1	1	0	0	2
18	1	1	0	0	2
21	1	1	0	0	2
23	1	1	0	0	2
45	1	1	0	0	2
20	1	1	0	1	3
33	1	1	0	1	3
35	1	1	0	1	3
46	1	1	0	1	3
1	1	1	1	0	3
2	1	1	1	0	3
3	1	1	1	0	3
6	1	1	1	0	3
12	1	1	1	0	3
14	1	1	1	0	3
17	1	1	1	0	3
19	1	1	1	0	3
26	1	1	1	0	3
28	1	1	1	0	3
34	1	1	1	0	3
40	1	1	1	0	3
41	1	1	1	0	3
49	1	1	1	0	3

50	1	1	1	0	3
25	1	1	1	1	4
31	1	1	1	1	4
38	1	1	1	1	4
正答率	0.706	0.608	0.412	0.137	

児童の正誤パターンにおける区分線を基に，割合についての児童の認識の仕方を次の５つのCategoryに区分した。

Category1：問題３が誤答である。
Category2：問題３は正答であるが，問題２は誤答である。
Category3：問題３，問題２がともに正答であるが，問題１は誤答である。
Category4：問題３，問題２，問題１がともに正答であるが，問題４は誤答である。
Category5：問題３，問題２，問題１，問題４がともに正答である。

各Categoryに属する児童の典型的なプロトコルを示す。このとき，表2-19に示した割合についての児童の考え方の番号①～㉗をプロトコルに付記する。また，表2-19に示した割合についての児童の考え方の番号を用いて，各問題における児童が記述した理由を再現し，Categoryごとに表2-21～表2-25に示す。なお，表2-21～表2-25を作成するとき，表2-19に示した割合についての児童の考え方をどのように用いるかについて以下に示す。

・「Aは当たりよりはずれの方が多く(⑳)，Bははずれより当たりの方が多く(⑳)，Cは当たりとはずれが同じ(⑲)だから」という記述が考えられる。この児童の割合についての考え方は，⑲⑳の２つである。このような場合は，⑲⑳と表す。
・「くじAは，くじBよりもはずれが少ない(⑧)。くじBとくじCは，はずれが同じ(⑦)。だから，くじAが一番当たりやすい。くじBは，当たりがはずれより多い(⑳)が，くじCは，当たりとはずれが同じ(⑲)。だから，くじBの方がくじCよりも当たりやすい。」という記述が考えられる。この児童の割合についての考え方は，⑦⑧⑲⑳の４つである。⑦⑧の考え方を用いて考え，さらに，はずれくじの数が同じくじについて⑲⑳の考え方を用いている。このような場合は，⑦⑧→⑲⑳と表す。
・「くじAもBもCも当たりとはずれの数が同じ(⑲)。しかし，全体が少ない(⑪)方が当たりやすいと思うから」という記述が考えられる。この児童の割合についての考え方は，⑪⑲の２つである。⑲の考え方を用いて考えているが，最終判断として，⑪の考え方を用いている。このような場合は，児童の思考過程が分かるように，⑲⇒⑪と表す。

〔Category1〕
問題３：「Bは黒玉が少ない(⑧)から，一番当たりやすい。次は，Cが少なくて(⑧)，最後がAで(⑧)，一番当たりにくい。」
問題３：「Bは当たりの方がはずれより多い(⑳)から当たりやすい。AとCはどっちも当たりとはずれが同じくらい(⑲)。」

表2-21　Category1の児童が記述した理由

児童番号	問題３	問題２	問題１	問題４
4	⑲⑳	②	②	⑲⑳
5	⑧	⑦⑧	②	⑧
7	②⑧	②	②	②
8	⑲⑳→⑪	⑲⑳→⑪	⑲⇒⑪	⑲⑳→⑪

10	②⑧	②⑧	②⑧	②⑧
24	⑲⑳	⑲⑳→⑪	⑲⇒⑪	⑲⑳
27	⑧	②⑧	②	②
30	⑲⑳	⑲⑳→⑧	⑧	⑲⑳
37	②	②	②	②⑧
42	⑲⑳	⑲⑳→⑪	⑲⇒⑪	⑲⑳
43	⑲⑳	⑲⑳→⑧	⑲⇒⑧	⑦⑧→②
44	⑪→②	⑦⑧	②⑧	⑪→⑲⑳
48	②	⑦⑧	⑧	⑦⑧
32	②→⑲⑳	⑲⑳→②⑧	⑲	⑲⑳→②
29	⑲⑳	㉑	②⑧	⑪②

Category1 の児童の多くが，問題１～問題４に関して，異なる２つのくじにおいて X という事象同士または Y という事象同士に着目し，相等または大小の捉え方を用いている。また，Category1 の児童は，１つのくじにおいて X，Y という異なる事象に着目することもある。しかし，「どっちも当たりとはずれが同じくらい(⑲)」や「A は当たりがはずれより２本多い(⑳)，B ははずれが当たりより２本多い(⑳)，C は当たりとはずれが同じ(⑲)。でも，どちらも２本多い。」というように，n(X)，n(Y)，n(X)－n(Y)，n(Y)－n(X)に対して曖昧な見方をする傾向があると考えられる。

〔Category2〕

問題３：「A ははずれの方が当たりより多いし(⑳)，B は当たりの方がはずより多いし(⑳)，C は当たりとはずれが同じ(⑲)だから，BCA の順に当たりやすい。」

問題２：「A は当たりの方がはずれより多い(⑳)けど，B と C は当たりとはずれが同じ(⑲)。でも，C の方が，全体の数が多い(⑪)から当たりにくい。」

表2-22　Category2の児童が記述した理由

児童番号	問題３	問題２	問題１	問題４
15	⑲⑳	②	⑪	⑲⑳
22	⑲⑳	⑲⑳→⑪	⑲⇒⑪	⑲⑳
36	⑲⑳	⑲⑳→⑧	⑲⇒⑧	⑲⑳→②
51	⑲⑳	⑲⑳→⑪	⑲⇒⑪	⑲⑳
39	⑲⑳	⑲	⑲	⑲⑳
47	⑲⑳	⑲⑳→⑪	⑲	⑲⑳

Category2 の児童の多くが，問題２に関して，１つのくじにおいて X，Y という異なる事象に着目することから，異なる２つのくじにおいて S という事象同士に着目することへと事象への着目の仕方を変えている。これらの児童は，２つのくじそれぞれにおいて n(X)＝n(Y)となると，問題３で用いた考え方を継続して使用できなくなる。問題１においても，同様の傾向があると考えられる。

〔Category3〕

問題２：「A は当たりの方が２個多い(⑳)から，一番当たりやすい。B と C は当たりとはずれが同じ(⑲)だから，当たりやすさは同じ。」

問題１：「A も B も C も当たりとはずれが同じ(⑲)だけど，全部の数が多い(⑪)方が当たりにくいから，A が一番当たりやすくて，次が B で，最後が C になる。」

表2-23　Category3の児童が記述した理由

児童番号	問題３	問題２	問題１	問題４
9	⑲⑳	⑲⑳	⑲⇒⑧	⑲⑳
11	⑲⑳	⑲⑳	⑲⇒②	⑲⑳
13	⑲⑳	⑲⑳	⑪	⑲⑳
16	⑲⑳	⑲⑳	②	⑲⑳
18	⑲⑳	⑲⑳	⑲⇒⑪	⑲⑳
21	⑲⑳	⑲⑳	⑲⇒⑪	⑲⑳
23	⑲⑳	⑲⑳	⑲⇒⑪	⑲⑳
45	⑲⑳	⑲⑳	⑲⇒⑪	⑲⑳
33	⑲⑳	⑲⑳	⑲⇒⑪	⑲⑳→⑧
35	⑲⑳	⑲⑳	⑲⇒⑪	⑲→⑪
46	⑲⑳	⑲⑳	⑲⇒⑪	⑧→⑲⑳

Category3 の児童の多くが，問題１に関して，１つのくじにおいて X，Y という異なる事象に着目することから，異なる２つのくじにおいて S という事象同士に着目することへと事象への着目の仕方を変えている。つまり，割合についての児童の認識の仕方に関する新しい発見として，これらの児童は，３つのくじそれぞれにおいて $n(X) = n(Y)$ となると，問題２で用いた考え方を継続して使用できなくなる。

〔Category4〕

問題１：「A は２－２＝０だから，当たりとはずれが同じ(⑲)。B は４－４＝０だから，当たりとはずれが同じ(⑲)。C は５－５＝０だから，当たりとはずれが同じ(⑲)。なので，A ＝ B ＝ C になる。」

問題４：「A は３－１＝２だから，当たりの方が２個多い(⑳)。B は７－５＝２だから，当たりの方が２個多い(⑳)。C は５－５＝０だから，当たりとはずれが同じ(⑲)。なので，A ＝ B ＞ C になる。」

表2-24　Category4の児童が記述した理由

児童番号	問題３	問題２	問題１	問題４
1	㉔	㉔	㉔	㉔
2	⑲⑳	⑲⑳	⑲	⑲⑳
3	⑲⑳	⑲⑳	⑲	⑲⑳
6	⑲⑳	⑲⑳	⑲	⑲⑳
12	⑲⑳	⑲⑳	⑲	⑲⑳
14	⑲⑳	⑲⑳	⑲	⑲⑳
17	⑲⑳	⑲⑳	⑲	⑲⑳
19	⑲⑳	⑲⑳	⑲	⑲⑳
26	⑲⑳	⑲⑳	⑲	⑲⑳
28	⑲⑳	⑲⑳	⑲	⑲⑳
34	⑲⑳	⑲⑳	⑲	⑲⑳
40	⑲⑳	⑲⑳	⑲	⑲⑳
41	⑲⑳	⑲⑳	⑲	⑲⑳
49	⑲⑳	⑲⑳	⑲	⑲⑳
50	⑲⑳	⑲⑳	⑲	⑲⑳

Category4 の児童の殆どは，一貫して１つのくじにおいて X，Y という異なる事象に着目し，相等または大小の捉え方を用いている。

〔Category5〕

問題４：「A は３÷１＝３(㉑)で，B は７÷５＝ 1.4（㉑）で，C は５÷５＝１(㉑)だから，数が大きい順に並べた。」

表2-25　Category5の児童が記述した理由

児童番号	問題３	問題２	問題１	問題４
25	⑲⑳	㉑	㉑	㉑
31	⑲⑳	⑲⑳	⑲	㉑
38	⑲⑳	⑲⑳	⑲	㉑

Category5 の児童全員が，問題４において，倍(割合)の捉え方を用いている。問題１～３においては，相等または大小の捉え方を用いている。これらの児童は，問題によって，選択的に相等，大小，倍(割合)の捉え方を使い分けていると考えられる。

表 2-21 ～表 2-25 及び各 Category の児童の典型的なプロトコルを基に，各 Category の特徴を表 2-26 にまとめる。

表2-26　各Categoryの特徴

	事象への着目の仕方		事象の関係の捉え方	人数
	異なる２つのくじについて	１つのくじについて		
Category1	・X という事象同士または Y という事象同士に着目する。	・X，Y という異なる事象に着目する。	・相等，大小の捉え方を用いる。 ・数値に対して，曖昧な見方をする。	15
Category2	・２つまたは３つのくじそれぞれにおいて，n(X) ＝ n(Y)となると S という事象同士に着目する。	・X，Y という異なる事象に着目する。	・相等，大小の捉え方を用いる。	6
Category3	・３つのくじそれぞれにおいて n(X)＝ n(Y)となると S という事象同士に着目する。	・X，Y という異なる事象に着目する。	・相等，大小の捉え方を用いる。	12
Category4		・X，Y という異なる事象に着目する。	・相等，大小の捉え方を用いる。	15
Category5		・X，Y という異なる事象に着目する。	・相等，大小，倍（割合）の捉え方を使い分ける。	3

2.5　２倍・1/2を活用した授業に関する研究

2.5.1　２倍・1/2を活用した類似性に基づいた授業

２倍・1/2 を活用した類似性に基づいた授業に関する研究[178]の目的は，割合の考え方の構成に関して，授業における２倍・1/2 の有効性と活用の仕方を明らかにすることである。そこで，２倍・1/2 の提示の有無や２倍・1/2 の提示順序を変えた A クラス 35 名と B クラス 34 名を対象に，「割合」の単元の導入で，類似性に基づく２倍・1/2 を活用した授業を行った。

(1) 授業の概要

類似性に基づいた授業では，基にするものを最初に提示し，続いて似ているものと似ていないものを例示し，どこが似ているかを考えさせる。そこで，２倍・1/2 を活用した授業では，似ているものと似ていないものを分類をさせることを通して，似ている仲間に共通した「一方が他方の何倍」という類似性を認知させる。また，児童が「部分－部分」に着目する傾向があることを考慮し，基にするものの題材として，「当たり(白玉)とはずれ(黒玉)の入ったくじ」の袋の絵を提示する。当たりとはずれを提示することにより，部分の数を数え上げることができ，「部分－部分」と「部分－全体」のどちらにも着目することができる。さらに，割合の考え方の構成に関して，授業における２倍・1/2 の有効性と活用の仕方を明らかにするために，２クラスにおいて授業展開は同じであるが，「似ていない」の提示内容を，以下のように変化させる。

A クラスと B クラスにおける提示の様子を図 2-3，図 2-4 に示す。なお、図 2-3，図 2-4 における提示①～提示④は，２倍・1/2 を活用した授業の展開における提示の段階に対応する。

A クラス：「部分－部分」に関して 3/2・2/3 の関係である数値を提示する似ているものと類似性のある提示として，似ていないものに「部分－部分」に関して２倍・1/2 の関係である数値を提示する(提示②，提示③)。

B クラス：「部分－部分」に関して 3/2・2/3 の関係である数値を提示する似ているものと類似性のない提示として，似ていないものに差が２になる数値を提示する(提示②，提示③)。また，提示③の後，A クラスと同じ「部分－部分」に関して２倍・1/2 の関係である数値を提示する(提示④)。

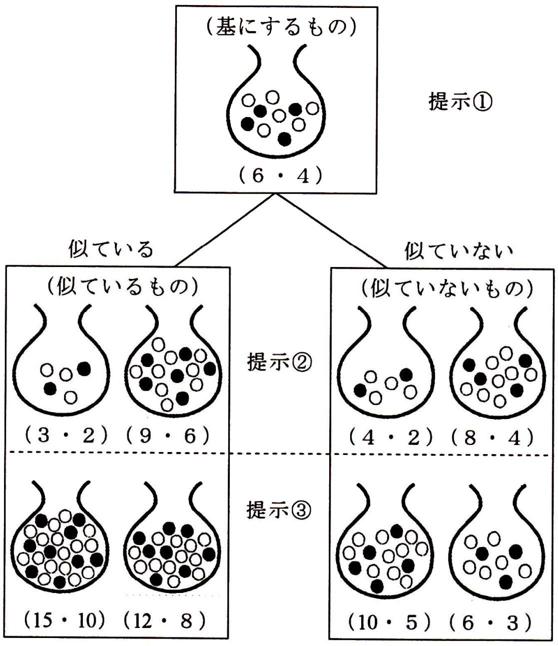


図2-3　Aクラスにおける提示の様子

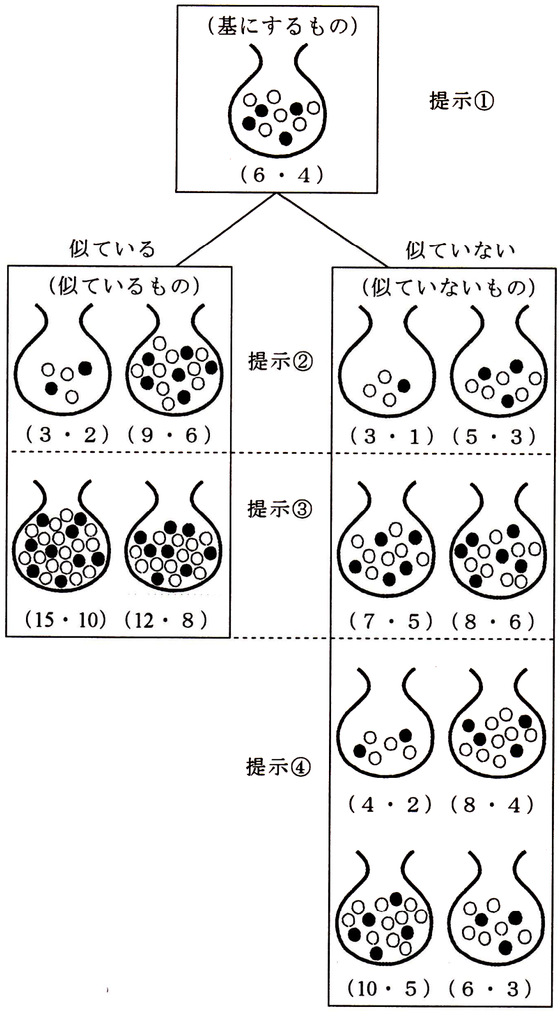


図2-4　Bクラスにおける提示の様子

以下に２倍・1/2 を活用した類似性に基づいた授業の展開の概要を示す。

教師・児童の活動	提示の段階
①類似性に基づいた授業の概説	
○授業のルールを知る。	
基にするものとどこが似ているのかを考えよう。	
②例示と熟考	
○基にするものを提示する。	提示①
○似ているものと似ていないものを同数例示する。	提示②
○どこが似ているのかを考え，似ている理由を解答用紙に記述する。	
③分類と正誤の確認	
○いくつかの図を似ている，似ていないのどちらかに分類する。	提示③
○自分の考えが合っていたか検討する。違っていた場合のみ，似ている理由を再度，解答用紙に記述する。	
○似ているもの，似ていないものを解答用紙に描く。	
（○いくつかの図を似ている，似ていないのどちらかに分類する。	提示④
○自分の考えが合っていたか検討する。違っていた場合のみ，似ている理由を再度，解答用紙に記述する。）	
④類似性の検証	
○似ている理由を発表する。	
・あたりがはずれの 3/2 倍になっている。	
・はずれがあたりの 2/3 倍になっている。	
・あたりがくじ全体の 3/5 倍になっている。	
・はずれがくじ全体の 2/5 倍になっている。	
・あたりが２倍・1/2 倍になると，はずれも２倍・1/2 倍になっている。	
○似ている理由を検証し，類似性を学級全体で共有する。	
○「一方がもう一方の何倍」という割合の考え方を知る。	

また，授業における児童の割合の考え方の変容を調べるために，提示②～提示④の後，各提示ごとに図 2-5 に示す解答用紙の指定した欄に似ている理由を記述させる。記述について，似ている理由がまだ分からないときは分かった段階で書くこと，似ている理由が違っていたときは新しく考えた理由を書くこと，似ている理由がまだ分からないときや似ている理由に変更がない場合は，そのまま空けておくことを指示する。

似ている理由を正しく記述できているとしても，割合の考え方が定着しているとは限らない。そこで，提示③の後，解答用紙の下段にあるくじの袋の絵に，似ているものと似ていないもののくじの絵を描くよう指示する。このような記述により，児童は自分の考え方をまとめたりその変容を確認したりしながら，割合の考え方を自ら構成することができる。また，教師も児童の割合の考え方の変容を確認しながら，授業展開を修正したり変更したりすることができる。

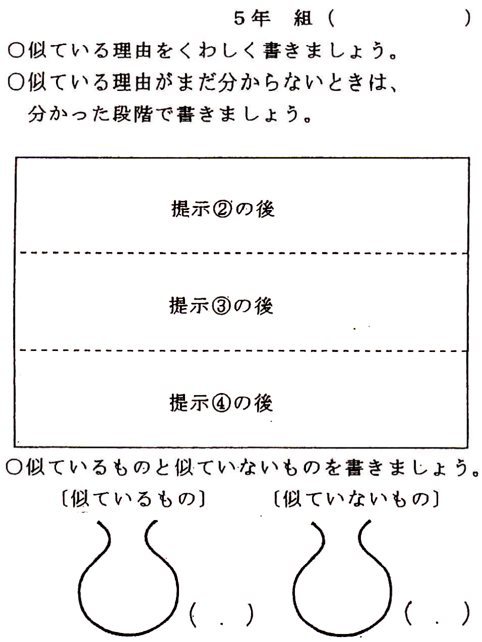


図2-5　解答用紙

(2) 授業結果の分析と考察

1) 似ている理由の分類

２倍・1/2 を活用した類似性に基づいた授業における割合の考え方の構成について調べるために，以下に示す基準を定め，児童の記述した似ている理由を分類し，４つの Category 区分を行った。基準の設定に関して，児童が着目する関係を図 2-6 示す。また，図 2-6 における①～⑤の関係は，各 Category における Within の関係（①と②），Between の関係（③と④），セット間の関係（⑤）に対応する。

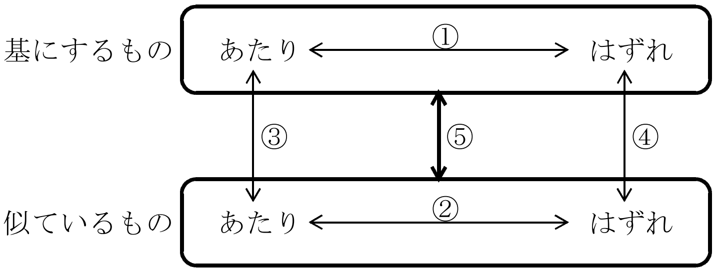


図2-6　児童が着目する関係

Category Ⅰ：「似ているもの」の類似性に気付かない。
- ○ Within の関係（①と②）において，差による関係づけを行っている場合。
- ○ Between の関係（③と④）において，差による関係づけを行っている場合。
- ○（当たり・はずれ）を１セットと考え，セット間（⑤）において，（１・１）方略による関係づけを行っている場合。

Category Ⅱ：Building-up による類似性に気付いている。
- ○ Between の関係（③と④）において，当たりとはずれを別々に考え，結果として Building-up 方略による関係づけと一致している場合。
- ○（当たり・はずれ）を１セットと考え，セット間（⑤）において，Building-up 方略による関係づけを行っている場合。

Category Ⅲ：あたり同士とはずれ同士の倍関係に気付いている。
- ○ Between の関係（③と④）において，割合による関係づけを行っている場合。
- ○（当たり・はずれ）を１セットと考え，セット間（⑤）において，割合による関係づけを行っている場合。

Category Ⅳ：あたりとはずれの倍関係に気付いている。
- ○ Within の関係（①と②）において，割合による関係づけを行っている場合。

2) くじの絵の分類

割合の考え方の定着を調べるために，基にするものと同じ 3/2・2/3 の関係で似ているものを描いているか，２倍・1/2 の関係で似ていないものを描いているかという２つの観点を組み合わせ，児童の描いた似ているものと似ていないものを４つのタイプに分類した。

タイプ１：3/2・2/3 の関係で似ているものを描いていない。また，２倍・1/2 の関係で似ていないものを描いていない。

タイプ２：3/2・2/3 の関係で似ているものを描いていない。しかし，２倍・1/2 の関係で似ていないものを描いている。

タイプ３：3/2・2/3 の関係で似ているものを描いている。しかし，２倍・1/2 の関係で似ていないものを描いていない。

タイプ４：3/2・2/3 の関係で似ているものを描いている。また，２倍・1/2 の関係で似ていないものを描いている。

3) ２倍・1/2の有効性

割合の考え方の構成に関して，A クラスと B クラスの授業における２倍・1/2 の効果を調べるために，A クラスと B クラスの提示③の段階での似ている理由に関する Category 別分布を表 2-27 に示す。また，割合の考え方の定着に関して，A クラスと B クラスの授業における２倍・1/2 の効果を調べるために，提示③の段階において児童の描いた似ているものと似ていないもののくじの絵に関するタイプ別の分布を表 2-28 示す。

表2-27　似ている理由に関するCategory 別分布表

	A クラス	B クラス
Category Ⅰ	2	17
Category Ⅱ	2	4
Category Ⅲ	18	10
Category Ⅳ	13	3

表2-28　くじの絵に関するタイプ別分布表

	A クラス	B クラス
タイプ１	13	26
タイプ２	2	
タイプ３	8	8
タイプ４	12	

表 2-27 より，割合による関係づけを行っている Category Ⅲと Category Ⅳを正答とすると，A クラスの正答者は 31 人(88.6%)，B クラスの正答者は 13 人(38.2%)である。表 2-27 に関して，Category ⅠとⅡ，Category ⅢとⅣを一つにまとめて χ^2 検定を行うと，$\chi^2 = 18.91$ である。有意水準５％において，自由度１の場合，χ^2 の臨界値は 3.84 である。したがって，有意な差がある。このことから，A クラスにおいて，「似ていない」の提示として２倍・1/2 の関係である数値を使用したことが，「似ている」の提示における 3/2・2/3 の関係である数値の理解に有意に作用したと考えられる。一方，B クラスにおいて，「似ていない」の提示として差が２になる数値を使用しても，「似ている」の提示における 3/2・2/3 の関係である数値の理解に有意に作用しなかったと考えられる。割合の考え方の構成に関して，「部分－部分」に関して２倍・1/2 の関係にある数値を提示することは有効である。

表 2-28 より，基にするものと同じ 3/2・2/3 の関係で似ているものを描いているタイプ３とタイプ４を正答とすると，A クラスの正答者は 20 人(57.1%)，Ｂクラスの正答者は８人(23.5%)である。このことから，A クラスにおいて，「似ていない」の提示方法として「部分－部分」に関して２倍・1/2 の関係である数値を提示したことが，割合の考え方を定着させることにつながったと考えられる。したがって，割合の考え方の定着においても，「部分－部分」に関して２倍・1/2 の関係にある数値を提示することは有効であると考えられる。しかし，A クラスの似ている理由に関する正答率と児童の描いた似ているものと似ていないものに関する正答率には，かなりの差がある。そこで，A クラスに関して，割合の考え方の構成と定着の関係を表 2-29 に示す。

表2-29　割合の考え方の構成と定着の関係

割合の考え方の定着		割合の考え方		割合の考え方の定着		割合の考え方	
タイプ１	13	Category Ⅰ	1	タイプ３	8	Category Ⅰ	1
		Category Ⅱ	1			Category Ⅱ	0
		Category Ⅲ	9			Category Ⅲ	5
		Category Ⅳ	2			Category Ⅳ	2
タイプ２	2	Category Ⅰ	0	タイプ４	12	Category Ⅰ	0
		Category Ⅱ	0			Category Ⅱ	1
		Category Ⅲ	1			Category Ⅲ	3
		Category Ⅳ	1			Category Ⅳ	8

表 2-29 より，タイプ１の 13 人のうちの 11 人が、Category Ⅲまたは Category Ⅳに属している。このことが，似ている理由に関する正答率と児童の描いた似ているものと似ていないものに関する正答

率の差の大きな原因である。これらの児童は，割合の考え方を構成しているが，活用できるほど定着していない段階であると考えられる。

5) ２倍・1/2の活用の仕方

A クラスと B クラスにおける割合の考え方の構成に関する２倍・1/2 の提示順序の効果を調べるために，A クラスの提示③の段階と B クラスの提示④の段階での Category 別分布を表 2-30 に示す。

表2-30　Aクラス(提示③の段階)とBクラス(提示④の段階)の似ている理由に関するCategory別分布表

	A クラス	B クラス
Category Ⅰ	2	4
Category Ⅱ	2	4
Category Ⅲ	18	5
Category Ⅳ	13	21

表 2-30 より，割合による関係づけを行っている Category Ⅲと Category Ⅳを正答とすると，A クラスの正答者は 31 人(88.6%)，B クラスの正答者は 26 人(76.5%)である。表 2-30 に関して，Category Ⅰと Ⅱ，Category ⅢとⅣをⅠつにまとめて χ^2 検定を行うと， $\chi^2 = 1.76$ である。したがって，有意水準５%において有意な差がない。「割合」の学習で達成すべき Within の関係における割合による関係づけを行っている Category Ⅳのみを正答とすると，A クラスの正答者は 13 人(37.1%)，B クラスの正答者は 21 人(61.8%)である。表 2-30 に関して，Category Ⅰ～Ⅲを一つにまとめて，同様に χ^2 検定を行うと， $\chi^2 = 4.18$ である。したがって，有意水準５%において有意な差がある。A クラスのように提示の最初から２倍・1/2 の関係である数値を提示するよりも，B クラスのように最後の提示として２倍・1/2 の関係にある数値を提示する方が，Within の関係における割合の考え方の構成に有効であると考えられる。

そこで，A クラスと B クラスにおける割合の考え方の変容を調べるために，A クラスの提示②と提示③の段階での似ている理由に関する Category の変容を表 2-31，B クラスの提示②と提示③の段階での似ている理由に関する Category の変容を表 2-32，B クラスの提示③と提示④の段階での似ている理由に関する Category の変容を表 2-33 に示す。なお，表 2-31 ～表 2-33 は，Category Ⅰ～Ⅲを一つにまとめ，A クラスと B クラスの児童を Category Ⅰ・Ⅱ・Ⅲ→ Category Ⅰ・Ⅱ・Ⅲ，Category Ⅰ・Ⅱ・Ⅲ→ Category Ⅳ，Category Ⅳ→ Category Ⅰ・Ⅱ・Ⅲ，Category Ⅳ→ Category Ⅳという４つのグループに分けた時の各グループの人数を表している。

表2-31　Aクラスの提示②と提示③の段階での似ている理由に関するCategoryの変容

Category Ⅰ・Ⅱ・Ⅲ→ Category Ⅰ・Ⅱ・Ⅲ	22
Category Ⅰ・Ⅱ・Ⅲ→ Category Ⅳ	2
Category Ⅳ→ Category Ⅰ・Ⅱ・Ⅲ	0
Category Ⅳ→ Category Ⅳ	11

表2-32　Bクラスの提示②と提示③の段階での似ている理由に関するCategoryの変容

Category Ⅰ・Ⅱ・Ⅲ→ Category Ⅰ・Ⅱ・Ⅲ	31
Category Ⅰ・Ⅱ・Ⅲ→ Category Ⅳ	2
Category Ⅳ→ Category Ⅰ・Ⅱ・Ⅲ	0
Category Ⅳ→ Category Ⅳ	1

表2-33　Bクラスの提示③と提示④の段階での似ている理由に関するCategory別分布表

Category Ⅰ・Ⅱ・Ⅲ→ Category Ⅰ・Ⅱ・Ⅲ	13
Category Ⅰ・Ⅱ・Ⅲ→ Category Ⅳ	18
Category Ⅳ→ Category Ⅰ・Ⅱ・Ⅲ	0
Category Ⅳ→ Category Ⅳ	3

表 2-31 より，提示②から提示③の段階で，Category Ⅰ・Ⅱ・Ⅲから Within の関係における割合による関係づけを行っている Category Ⅳに変容した児童は２人(5.7%)，Category Ⅳから Category Ⅰ・Ⅱ・Ⅲに変容した児童はいなかった。そこで，表 2-31 に関して，マクニマーの検定[186, pp.189-191]を行うと，z ＝ 0.71 である。有意水準５％において，z の臨界値は 1.96 である。したがって，有意な差がない。つまり，A クラスにおいて提示②と提示③との間で変容がなかったと考えられる。このことから，A クラスは，提示②において，「部分－部分」に関して２倍・1/2 の関係である数値を提示することにより，類似性を認知し，割合の考え方を構成することができたが，提示③において，繰り返し「部分－部分」に関して２倍・1/2 の関係である数値を提示しても，Within の関係における割合の考え方の構成につながらなかったと考えられる。

また，表 2-32 より，提示②から提示③の段階で，Category Ⅰ・Ⅱ・Ⅲから Within の関係における割合による関係づけを行っている Category Ⅳに変容した児童は２人(5.9%)，Category Ⅳから Category Ⅰ・Ⅱ・Ⅲに変容した児童はいなかった。そこで, 表 2-32 に関して, マクニマーの検定を行うと, z ＝ 0.71 である。したがって，有意水準５％において有意な差がない。つまり，B クラスにおいても，提示②と提示③との間で変容がなかったと考えられる。このことから，B クラスは，提示②において，「部分－部分」に関して２倍・1/2 の関係である数値を提示しなかったことにより，類似性を認知することができず，提示③においても，繰り返し「部分－部分」に関して２倍・1/2 の関係である数値を提示しなかったことにより，類似性を認知することができなかった。そのため，Within の関係における割合の考え方を構成することができなかったと考えられる。

しかし，表 2-33 より，提示③から提示④の段階で，Category Ⅰ・Ⅱ・Ⅲから Within の関係における割合による関係づけを行っている Category Ⅳに変容した児童は 18 人(52.9%)，Category Ⅳから Category Ⅰ・Ⅱ・Ⅲに変容した児童はいなかった。そこで，表 2-33 に関して，マクニマーの検定を行うと，z ＝ 4.01 である。したがって，有意水準５％において有意な差がある。つまり，B クラスにおいて提示③と提示④との間で変容があったと考えられる。このことから，B クラスは，提示②と提示③において，「部分－部分」に関して２倍・1/2 の関係である数値を提示しない間も，葛藤を繰り返すことにより，割合の考え方を構成する素地ができつつあり，提示④において，「部分－部分」に関して２倍・1/2 の関係である数値を提示することにより，類似性を認知することができ，Within の関係における割合の考え方を構成することができたと考えられる。

以上のことをことを考慮すると，B クラスのように，いろいろな葛藤を繰り返した後に２倍・1/2 の関係である数値を提示する方が，Within の関係における割合の考え方の構成に有効であると考えられる。

2.5.2　色テープ図を活用した割合の指導

色テープ図を活用した割合の指導に関する研究[179]の目的は，割合に関する概念的知識と手続き的知識を構成する指導として, 色テープ図を活用することの効果を明らかにすることである。そこで, 第５学年の割合の小単元「割合」において，第５学年の児童 32 名を対象に，全５時間の色テープ図を活用した授業行った。

(1)授業の概要

基準量と比較量に関する関係的な概念的知識を構成するために，色テープ図において，常に基準量を青テープ，比較量を赤テープに統一し，色を強調した指導を行う。また，青テープと赤テープに書き込んだ数量と割合から比例関係を捉え，立式させる指導を行う。さらに，量的な概念的知識を構成するために，比較量となる赤テープを切る作業を取り入れる。

色テープ図から立式への手続き的知識を構成するために，児童が直観的に判断できる「２倍・0.5 倍(半分)」の関係である数量(基準量：20cm，比較量：40cm，10cm)と割合を書き込んだ３本の色テープ図を見本の色テープ図として提示する。見本の色テープ図を図 2-7 に示す。

割合，比較量，基準量の３つの関係を相互に関連づけて理解できるように，第１時・第２時にお

いて，見本の色テープ図をもとに，割合，比較量，基準量の全ての求め方を扱い，第３時以降は，毎時間，割合，比較量，基準量を求める問題を順不同に各１題ずつ解決するという授業を展開する。

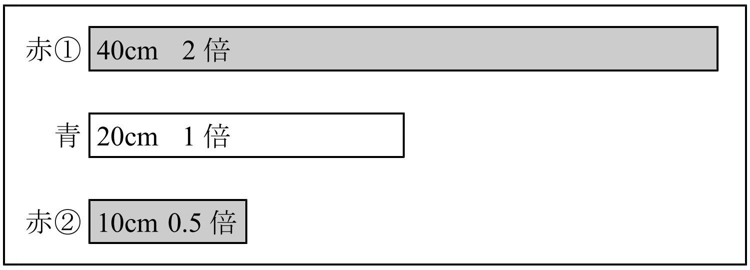


図2-7　見本の色テープ図

以下に色テープ図を活用した割合の授業の展開の概要を示す。

〔第１時の概要〕

青テープ（基準量）と赤テープ（比較量）に書かれた数量をもとに，２倍・0.5 倍（半分）の関係を見通して，割合を求める手続きを導き出す。

教師・児童の活動

１．長さの表示のない３種類の赤テープの比較

〇赤テープ間の関係について考える。

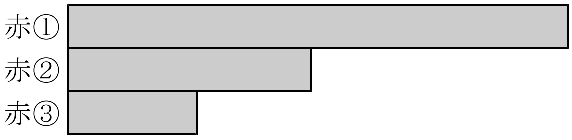
・赤①は赤②の２倍ぐらい。

・赤②は赤①の半分くらい。

・赤②は赤③の２倍ぐらい。

・赤③は赤②の半分くらい。

・赤①は赤③の４倍ぐらい。



２．長さを表示した青テープと３種類の赤テープの比較

〇青テープを基にした時の青テープと赤テープ間の関係について考え，式で説明する。

・赤①は青の２倍。

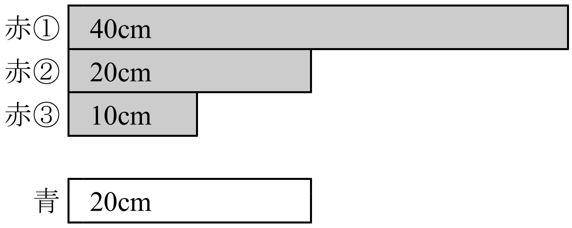
（式）40（赤①）÷ 20（青）＝２　　<u>２倍</u>

・赤③は青の半分。

（式）10（赤③）÷ 20（青）＝ 0.5　　<u>0.5 倍</u>

・赤②は青と同じ。

（式）20（赤②）÷ 20（青）＝１　　<u>１倍</u>



３．割合についての理解

〇割合の意味と求め方について理解する。

「２倍や 0.5 倍というのは，青テープをもとにした時に，
赤テープが青テープの何倍にあたるかを表しています。
この何倍にあたるかを表した数を割合といいます。」

赤 は 青 の 何倍
割合

４．赤テープの長さと割合の関係の理解

〇赤テープの長さと割合の関係について考える。

・赤テープが青テープより長い時は，割合は１倍より大きくなる。

・赤テープが青テープより短い時は，割合は１倍より小さくなる。

〔第２時の概要〕

色テープ図(赤テープ：比較量，青テープ：基準量)に書かれた数量と割合から比例関係を捉え，色テープ図から割合，比較量，基準量を求める手続きを導き出すと共に，他の問題場面において青テープ(基準量)を判断する。

教師・児童の活動

１．色テープ図の条件の確認

○もとにする色テープとその割合について，前時の確認をする。

・もとにする色テープは青テープで１倍。

赤① 40cm　２倍

青 20cm　１倍

赤② 10cm 0.5 倍

２．色テープ図から，割合，比較量，基準量を求める手続きの理解

○３本の色テープ図から分かる割合，比較量，基準量の間の関係について考え，式で表す。

《割合を求める場合》

・40 ÷ 20 ＝ 2

・10 ÷ 20 ＝ 0.5

《赤テープの長さを求める場合》

・20 × 2 ＝ 40

・20 × 0.5 ＝ 10

《青テープの長さを求める場合》

・40 ÷ 2 ＝ 20

・10 ÷ 0.5 ＝ 20

赤 ÷ 青 ＝ 割合
くらべる量　もとにする量

青 × 割合 ＝ 赤
もとにする量　くらべる量

赤 ÷ 割合 ＝ 青
くらべる量　もとにする量

３．色テープ図から割合，比較量，基準量を求める手続きの意味の検討

《赤テープの長さを求める場合》

○割合をかける意味について考える。

・赤①の割合は青の割合に×２をするから, 長さも×２をする。

・赤②の割合は青の割合に× 0.5 をするから，長さも× 0.5 をする。

《青テープの長さを求める場合》

○割合でわる意味について考える。

・青の割合は赤①の割合を÷２するから，長さも÷２をする。

・青の割合は赤②の割合を÷ 0.5 するから，長さも÷ 0.5 倍をする。

40cm　２倍
(×２) ↑　↑ (×２)
20cm　１倍
(× 0.5) ↓　↓ (× 0.5)
10cm　0.5 倍

40cm　２倍
(÷２) ↓　↓ (÷２)
20cm　１倍
(÷ 0.5) ↑　↑ (÷ 0.5)
10cm　0.5 倍

４．青テープ（基準量）の判断

○何が青テープになるかを考える。

〈問題①〉私は 500 円，姉は 600 円持っています。姉は，私の何倍のお金を持っていますか。

私の持っている 500 円

〈問題②〉ぼくの体重は 36kg で，お父さんの体重はぼくの体重の 1.8 倍です。お父さんの体重は何 kg ですか。　ぼくの体重の 36kg

〈問題③〉男の子は 18 人で，女の子の 0.9 倍です。女の子は何人いるでしょう。　女の子

○青テープの見つけ方について考える。

・割合の前の「の」の前に書いてある。

〔第３時の概要〕

個人用の青テープと赤テープを用意し，青テープの数量や割合との関係から，青テープ(基準量)の長さを一定とし，問題場面に合ったおよその長さに赤テープ(比較量)を相対的に切ることにより問題場面を把握する。また，見本の３本の色テープ図を提示することにより，青テープと赤テープに書かれた数量と割合から比例関係を捉えて立式するヒントとし，割合，比較量，基準量の順に問題を各１題ずつ解く。さらに，第３時では，授業の導入場面において，以下の問題解決の手順を確認する。

①青テープ(もとにする量)と赤テープ(くらべる量)を決め，青テープを描く。
②青テープに数量と割合を書き込む。(未知の場合は□を書く。)
③青テープの数量や割合との関係から赤テープのおよその長さを決め，それを切る。
④赤テープに数量と割合を書き込む。(未知の場合は□を書く。)
⑤式を書いて答え(□)を求める。
※分からない時は，見本の色テープ図にかかれた数量と割合の関係を思い出して式を書く。

〔第４時・第５時の概要〕

自分で青テープ(基準量)を描き，青テープの数量や割合との関係から，問題場面に合った長さに赤テープ(比較量)を描くことにより，問題場面を把握する。第４時は，見本の色テープ図を提示し，比較量，基準量，割合の順に問題を各１題ずつ解く。第５時は，見本の色テープ図を提示せず，基準量，割合，比較量の順に問題を各１題ずつ解く。第４時・第５時では，授業の導入場面において，第３時に提示した問題解決の手順③の「それを切る」を「赤テープを描く」に変更した手順を確認する。

(2) 調査問題

色テープ図を活用した授業の効果を調べるために，事後調査と保持調査の２回の調査を行った。調査では，以下に示す割合，比較量，基準量を求める問題を各１題ずつ出題した調査問題を使用した。また，事後調査と保持調査において同一問題を使用したが，事後調査は全５時間の授業の１週間後，保持調査は約２ヶ月後に実施するため，同一問題の使用による学習の効果はないと考えられる。なお，問題を解決した思考過程を分析するために，事後調査と保持調査のどちらにおいても，「枠の中に授業中に習った図を描きなさい。」という注意事項を付け加え，式，答，図という解答形式を使用した。

〔調査問題〕
問題①：私は 1500 円持っています。弟は 900 円持っています。弟は私の何倍持っていますか。
問題②：お母さんの身長は 160cm で，私の身長はお母さんの身長の 0.9 倍です。
私の身長はどれだけですか。
問題③：姉の体重は 36kg で，姉の体重は私の体重の 1.2 倍です。私の体重はどれだけですか。

(3) 調査結果の分析と考察

1) 事後調査と保持調査の比較

事後調査と保持調査における正答数と完答数を表 2-34 に示す。事後調査と保持調査ともに，式と答が正解している場合を正答とし，さらに，授業中に習った図を用いて，正しく数量の関係を表している場合を完答とした。また，表中の( )内は百分率を表す。

表2-34　事後調査と保持調査の結果の比較

	問題①		問題②		問題③	
	正答	完答	正答	完答	正答	完答
事後調査	29(90.6)	28(87.5)	30(93.8)	30(93.8)	31(96.6)	29(90.6)
保持調査	31(96.9)	30(93.8)	31(96.9)	30(93.8)	30(93.8)	28(87.5)

表 2-34 より，事後調査と保持調査のどちらも 90 %前後の正答率と完答率である。このことから，かなり高い通過率であることだけでなく，２ヶ月が経過した後も，かなり高い割合で色テープ図を活用した解法が保持されていると考えられる。そこで，事後調査と保持調査における有意差を調べるために，問題ごとに完答を２点，正答を１点，誤答を０点とし，事後調査と保持調査に関する児童の得点の分布を表 2-35 に示す。

表2-35　児童の得点分布表

児童	事後調査				保持調査			
	問題①	問題②	問題③	合計	問題①	問題②	問題③	合計
1	0	2	2	4	2	2	2	6
2	2	2	2	6	2	2	2	6
3	2	2	2	6	2	2	2	6
4	2	2	2	6	2	2	2	6
5	2	2	2	6	2	2	2	6
6	2	2	2	6	2	2	2	6
7	2	2	2	6	2	2	2	6
8	2	2	2	6	2	2	2	6
9	2	2	2	6	2	2	2	6
10	2	2	2	6	2	2	2	6
11	2	2	2	6	2	2	2	6
12	2	2	2	6	2	2	2	6
13	2	2	2	6	2	2	2	6
14	2	0	2	4	2	2	2	6
15	2	2	0	4	2	2	2	6
16	1	2	2	5	2	2	1	5
17	2	2	2	6	2	2	2	6
18	2	2	2	6	2	2	2	6
19	2	2	2	6	2	2	2	6
20	2	2	2	6	2	2	2	6
21	0	2	2	4	2	2	2	6
22	2	2	2	6	2	2	0	4
23	2	2	2	6	2	2	2	6
24	0	2	1	3	0	2	0	2
25	2	2	2	6	1	1	1	3
26	2	2	2	6	2	2	2	6
27	2	0	1	3	2	0	2	4
28	2	2	2	6	2	2	2	6
29	2	2	2	6	2	2	2	6
30	2	2	2	6	2	2	2	6
31	2	2	2	6	2	2	2	6
32	2	2	2	6	2	2	2	6

表 2-35 を基に，事後調査と保持調査に関して t 検定を行うと，問題①に関して $t = 1.26$，問題②に関して $t = 0.43$，問題③に関して $t = 0.56$，合計に関して $t = 0.56$ である。有意水準５％において，自由度 30 の場合，t の臨界値は 2.04 である。したがって，事後調査と保持調査の平均間に有意な差がない。このことから，割合に関する概念的知識と手続き的知識の構成ついて，基準量の判断，立式，記憶の保持という視点から，次のことが考えられる。

常に基準量を青テープ，比較量を赤テープに固定し，色テープ図の色を強調した指導を行うと共に，青テープの数量や割合との関係から，赤テープのおよその長さを決め，実際に赤テープを切って操作したり赤テープを描いたりすることにより，赤テープの長さを青テープの長さと相対的に表したことが，割合に関する概念的知識の構成に影響を与え，基準量の正しい判断に結びついたと考えられる。また，２倍・0.5 倍の関係にある見本の３本の色テープ図を用いて，割合，比較量，基準量を求める手続きを，相互に関連づけて理解したことが，割合に関する手続き的知識の構成に影響を与え，図における関係を想起しやすくし，比例関係をもとにした正しい立式へと導いたと考えられる。さらに，割合の単元を通して，色テープ図を活用することにより，一連の問題解決の手順にしたがって，割合に関する概念的知識と手続き的知識が，無理なく結びついたことが，記憶の保持につながったと考えられる。

授業実践を通して分かった色テープ図を活用した指導とその効果についてまとめると，次の通りである。色テープ図の活用の仕方としては２種類あり，その活用の場面が異なる。比較量と基準量を求める問題場面に関しては，青テープと赤テープに書かれた数量と割合から比例関係を捉えて立式する。割合を求める問題場面に関しては，２倍・0.5 倍の関係にある見本の色テープ図を想起し，「赤÷青」の色を意識して立式する。このような場面の違いを意識し，色テープ図における色と比例関係のどちらを活用する方がよいかを選択できる能力の育成には，毎時間，割合，比較量，基準量を求める問題を順不同に各１題ずつ解決するという授業展開が効果的であった。全ての問題場面において，「赤÷青」のように色を強調することで，「もとにする量」や「くらべる量」という用語を使用する必要がなくなり，児童の用語への抵抗がなくなった。また，見本の３本の色テープ図では，全ての数量と割合が示されているために，×２，× 0.5，÷２，÷ 0.5 のいずれを使っても関係を表せるが，児童は×２と÷２を好む。しかし，問題によっては，×２と÷２が，青テープではなく赤テープをもとにした場合に成り立つ関係である場合がある。したがって，何が青テープ(もとにする量)なのかを意識して関係を把握させるために，色テープ図から割合，比較量，基準量を求める手続きの意味を検討したことが，正しい立式につながった。さらに，青テープの数量や割合との関係から，青テープの長さを一定とし，問題場面に合ったおよその長さに赤テープを実際に切る活動を通して，自分で色テープ図を描く場合にも，青テープの数量や割合に応じて，赤テープの長さを調節し，答の大きさの見通しを持って問題解決をすることができた。そして，この色テープ図は，授業実践を行った「割合(全５時間)」だけでなく，その後に続く「百分率」，「割合のグラフ」，「割合を使って」の問題解決にも活用することができ，単元を通して活用できるという意味でも，価値があると考えられる。

以上のことから，事後調査と保持調査の両調査における高い正答率と，色テープ図を活用した指導の効果は，色テープ図を活用した授業が，割合に関する概念的知識と手続き的知識を構成する１つの効果的な指導であることを示唆している。

第３章　割合の概念形成過程における重層的構造

第１章における先行研究を踏まえると，児童の問題解決における処理過程は，仮定としての条件がインプットされ，結論としての解答がアウトプットされるプロダクションシステムに基づいた論理的な思考過程であると考えることができる。また，第２章における研究の成果をさらに発展させるためには，論理学の観点から，児童の思考過程を詳細に分析する必要がある。

割合に関する概念的知識と手続き的知識を区別した調査問題の開発にあたり，数値を含まないため主として概念的知識に基づいたアプローチが必要な問題を概念的知識に関する問題，数値を含み主として手続き的知識に基づいたアプローチが可能な問題を手続き的知識に関する問題とする。また，確率について未習の児童は，割合を用いることにより確率に関する場面にアプローチできること及び確率比較課題は論理数学的認識としての割合の概念を表出させることを考慮し，割合に関する概念的知識と手続き的知識に共通する問題場面として，確率に関する比較場面を用いる。

調査問題の開発において，確率という観点から，問題文に含まれる条件を仮定とし，正しい結論が導出される推論過程を証明することは必要である。また，調査結果の分析において，児童の推論過程における児童固有の論理を数学的に説明することも重要である。ここでは，田村三郎，荒金憲一，平井崇晴[180]，戸田山和久[181]の見解を参考に，命題論理と述語論理を用いてこれらの推論過程の証明及び分析を行う。そのために，本研究において使用する記号，推論規則及び推論法則をまとめる。

3.1　命題論理及び述語論理による推論過程の記号化

(1)推論規則及び推論法則

x，y，z，a，b，c，d は０以上の値をとる変数である。また，$f(x)$は，x ＝ y，x ＞ y，x ＜ y のいずれかである。この変数 x を含む $f(x)$を式と呼ぶ。ここでは，児童の思考過程に焦点を当てるため，変数の演算を認め，その演算規則は推論規則に適用できるものとする。そこで，変数の演算に関する単位元，零元，反射律，対称律，推移律を表 3-1，推論規則を表 3-2，推論法則を表 3-3 に示す。

表3-1　変数の演算に関する単位元，零元，反射律，対称律，推移律

単位元	x × y ＝ y × x ＝ x が成り立つとき，y を単位元とする。また，y ＝ 1 と記す。
零元	x ＋ y ＝ y ＋ x ＝ x が成り立つとき，y を零元とする。また，y ＝ 0 と記す。
反射律	x ＝ x
対称律	$\dfrac{x = y}{y = x}$
推移律	$\dfrac{x = y \quad y = z}{x = z}$　$\dfrac{x > y \quad y > z}{x > z}$　$\dfrac{x < y \quad y < z}{x < z}$ $\dfrac{x > y \quad y = z}{x > z}$　$\dfrac{x = y \quad y > z}{x > z}$　$\dfrac{x < y \quad y = z}{x < z}$　$\dfrac{x = y \quad y < z}{x < z}$

表3-2　変数の演算に関する推論規則

規則名	推論規則
演推	a ∗ b ＝ c のとき，　$\dfrac{f(a * b)}{f(c)}$　$\dfrac{f(c)}{f(a * b)}$　を認める。
＝＝	$\dfrac{a = b \quad c = d}{a * c = b * d}$　∗：＋，－，×，÷のいずれか
＞＝1	$\dfrac{a > b \quad c = d}{a * c > b * d}$　$\dfrac{a < b \quad c = d}{a * c < b * d}$　∗：＋，－，×，÷のいずれか

	$\dfrac{a=b \quad c>d}{a*c>b*d}$ $\dfrac{a=b \quad c<d}{a*c<b*d}$ ＊：＋，×のいずれか
＞＝2	$\dfrac{a=b \quad c>d}{a*c<b*d}$ $\dfrac{a=b \quad c<d}{a*c>b*d}$ ＊：－，÷のいずれか
＞＞1	$\dfrac{a>b \quad c>d}{a*c>b*d}$ $\dfrac{a<b \quad c<d}{a*c<b*d}$ ＊：＋，×のいずれか
＞＞2	$\dfrac{a>b \quad c>d}{a*d>b*c}$ $\dfrac{a<b \quad c<d}{a*d<b*c}$ ＊：－，÷のいずれか
＜＞	$\dfrac{a>b}{b<a}$ $\dfrac{a<b}{b>a}$

（上記の演算において，c ≠ 0，d ≠ 0 の場合に÷を適用する。）

「演推」の規則における $a * b = c$ に当たる演算規則として，次の規則を認める。

①$x \times 1 = 1 \times x = x$

②$x \times 1/x = 1/x \times x = x \div x = x/x = 1$

③$x + 0 = 0 + x = x$

④$x - x = 0$

⑤$x * y = y * x$ （＊：＋，×のいずれか）【交換律】

⑥$(x * y) * z = x * (y * z)$ （＊：＋，×のいずれか）【結合律】

⑦$x \times (y * z) = x \times y * x \times z$ （＊：＋，－のいずれか）【分配律】

⑧$(y * z) \div x = y \div x * z \div x$ （＊：＋，－のいずれか）【分配律】

「演推」の規則における $a * b = c$ に当たる演算の例として，次の計算を認める。

①$x \times 1/y = x \div y = x/y$

②$a \div b = (a \times c) \div (b \times c)$

③$(a/b \times bd) \div (c/d \times bd) = (a \times d) \div (b \times c)$

表3-3　変数の演算に関する推論法則

<table>
<tr><th>法則名</th><th>推論法則</th></tr>
<tr><td>＝代入</td><td>$\dfrac{f(a_1, a_2, \cdots, a_n) \quad a_1 = b_1, a_2 = b_2, \cdots, a_n = b_n}{f(b_1, b_2, \cdots, b_n)}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">

$f(a)$ が a = b のとき

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{a=b}{b=a}(\text{対称律}) \quad a=c}{b=c}(\text{推移律})}{c=b}(\text{対称律})$$

$f(a)$ が a ＞ b のとき

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{a>b}{b<a}(<>) \quad a=c}{b<c}(\text{推移律})}{c>b}(<>)$$

$f(a)$ が a ＜ b のとき

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{a<b}{b>a}(<>) \quad a=c}{b>c}(\text{推移律})}{c<b}(<>)$$

n = 1 $\dfrac{f(a_1) \quad a_1 = b_1}{f(b_1)}$ 　 n = k $\dfrac{f(a_1, a_2, \cdots, a_k) \quad a_1 = b_1, a_2 = b_2, \cdots, a_k = b_k}{f(b_1, b_2, \cdots, b_k)}$

n = k + 1 $$\dfrac{\dfrac{f(a_1, a_2, \cdots, a_k, a_{k+1}) \quad a_1 = b_1, a_2 = b_2, \cdots, a_k = b_k}{f(b_1, b_2, \cdots, b_k, a_{k+1})} \quad a_{k+1} = b_{k+1}}{f(b_1, b_2, \cdots, b_k, b_{k+1})}$$

</td></tr>
</table>

命題論理に関する推論規則を表 3-4，推論法則を表 3-5 にまとめる。また，述語論理に関する推論規則を表 3-6，推論法則を表 3-7 にまとめる。$F(X)$ は命題変数 X を含む論理式である。

表3-4　命題論理に関する推論規則

規則名	推論規則	規則名	推論規則
→入	(k) $[\mathrm{A}]$ $\underline{\quad \mathrm{B} \quad}$ (k) $\mathrm{A} \to \mathrm{B}$	∨除	$\qquad\qquad (k) \qquad (k)$ $\qquad\qquad [\mathrm{A}] \qquad [\mathrm{B}]$ $\underline{\mathrm{A} \lor \mathrm{B} \qquad \mathrm{C} \qquad \mathrm{C}}$ (k) $\qquad\qquad \mathrm{C}$
→除	$\underline{\mathrm{A} \quad \mathrm{A} \to \mathrm{B}}$ $\qquad \mathrm{B}$	¬除	$\underline{\mathrm{A} \quad \neg \mathrm{A}}$ $\quad \bot$
推移	$\underline{\mathrm{A} \to \mathrm{B} \quad \mathrm{B} \to \mathrm{C}}$ $\qquad \mathrm{A} \to \mathrm{C}$	¬入	$[\mathrm{A}]$ $\underline{\quad \bot \quad}$ $\neg \mathrm{A}$
∧入	$\underline{\mathrm{A} \quad \mathrm{B}}$ $\mathrm{A} \land \mathrm{B}$		
∧除	$\underline{\mathrm{A} \land \mathrm{B}} \qquad \underline{\mathrm{A} \land \mathrm{B}}$ $\quad \mathrm{A} \qquad\qquad\quad \mathrm{B}$	¬¬除	$\underline{\neg\neg \mathrm{A}}$ $\quad \mathrm{A}$
∨入	$\underline{\quad \mathrm{A} \quad}$ $\mathrm{A} \lor \mathrm{B}$		

表3-5　命題論理に関する推論法則

法則名	推論法則
≡除	$\underline{\mathrm{A} \equiv \mathrm{B}} \qquad \underline{\mathrm{A} \equiv \mathrm{B}}$ $\mathrm{A} \to \mathrm{B} \qquad \mathrm{B} \to \mathrm{A}$
(A → B)∧(B → A)をA ≡ Bと略記する。　$\underline{\mathrm{A} \equiv \mathrm{B} : (\mathrm{A} \to \mathrm{B}) \land (\mathrm{B} \to \mathrm{A})}$ (∧除) $\qquad\qquad \mathrm{A} \to \mathrm{B}$	
∧∧入	$\underline{\mathrm{A}_1 \quad \mathrm{A}_2 \quad \mathrm{A}_3 \quad \cdots \quad \mathrm{A}_n}$ $\mathrm{A}_1 \land \mathrm{A}_2 \land \mathrm{A}_3 \land \cdots \land \mathrm{A}_n$
$\underline{\mathrm{A}_1 \quad \mathrm{A}_2}$ (∧入) $\underline{\mathrm{A}_1 \land \mathrm{A}_2 \qquad \mathrm{A}_3}$ (∧入) $\underline{\mathrm{A}_1 \land \mathrm{A}_2 \land \mathrm{A}_3 \qquad \mathrm{A}_4}$ (∧入) $\vdots$ $\underline{\mathrm{A}_1 \land \mathrm{A}_2 \land \mathrm{A}_3 \land \cdots \land \mathrm{A}_{n-1} \quad \mathrm{A}_n}$ (∧入) $\mathrm{A}_1 \land \mathrm{A}_2 \land \mathrm{A}_3 \land \cdots \land \mathrm{A}_{n-1} \land \mathrm{A}_n$	
¬¬入	$\underline{\quad \mathrm{A} \quad}$ $\neg\neg \mathrm{A}$
$\underline{\mathrm{A} \quad \neg \mathrm{A}}$ (¬除) $\underline{\quad \bot \quad}$ (¬入) $\neg\neg \mathrm{A}$	
対偶	$\underline{\quad \mathrm{A} \to \mathrm{B} \quad}$ $\neg \mathrm{B} \to \neg \mathrm{A}$
$\qquad \underline{\mathrm{A} \quad \mathrm{A} \to \mathrm{B}}$ (→除) $\underline{\neg \mathrm{B} \qquad\qquad \mathrm{B}}$ (¬除) $\quad \underline{\quad \bot \quad}$ (¬除) $\underline{\qquad \neg \mathrm{A} \qquad}$ (→入) $\neg \mathrm{B} \to \neg \mathrm{A}$	
≡代入	$\underline{F(\mathrm{A}) \quad \mathrm{A} \equiv \mathrm{B}}$ $\quad F(\mathrm{B})$

F(A)が A，¬A，A ∧ C，A ∨ C，A → C の５つの場合が考えられる。

F(A)が A のとき

$$\dfrac{A \quad \dfrac{A \equiv B}{A \rightarrow B}\,(\equiv\text{除})}{B}\,(\rightarrow\text{除})$$

F(A)が¬A のとき

$$\dfrac{\neg A \quad \dfrac{\dfrac{A \equiv B}{B \rightarrow A}\,(\equiv\text{除})}{\neg A \rightarrow \neg B}\,(\text{対偶})}{\neg B}\,(\rightarrow\text{除})$$

F(A)が A ∧ C のとき

$$\dfrac{\dfrac{A \wedge C}{C}\,(\wedge\text{除}) \quad \dfrac{\dfrac{A \wedge C}{A}\,(\wedge\text{除}) \quad \dfrac{A \equiv B}{A \rightarrow B}\,(\equiv\text{除})}{B}\,(\rightarrow\text{除})}{C \wedge B}\,(\wedge\text{入})$$

F(A)が A ∨ C のとき

$$\dfrac{A \vee C \quad \dfrac{\dfrac{A \quad \dfrac{A \equiv B}{A \rightarrow B}\,(\equiv\text{除})}{B}\,(\rightarrow\text{除})}{B \vee C}\,(\vee\text{入}) \quad \dfrac{C}{B \vee C}\,(\vee\text{入})}{B \vee C}\,(\vee\text{除})$$

F(A)が A → C のとき

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{B \quad \dfrac{A \equiv B}{B \rightarrow A}\,(\equiv\text{除})}{A}\,(\rightarrow\text{除}) \quad A \rightarrow C}{C}\,(\rightarrow\text{除})}{B \rightarrow C}\,(\rightarrow\text{入})$$

$\underline{\vee} \rightarrow \vee$	$\dfrac{A \underline{\vee} B}{A \vee B}$

(A ∧¬B)∨(¬A ∧ B)を A $\underline{\vee}$ B と略記する。

$$\dfrac{A \underline{\vee} B : (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B) \quad \dfrac{\dfrac{A \wedge \neg B}{A}\,(\wedge\text{除})}{A \vee B}\,(\vee\text{入}) \quad \dfrac{\dfrac{\neg A \wedge B}{B}\,(\wedge\text{除})}{A \vee B}\,(\vee\text{入})}{A \vee B}\,(\vee\text{除})$$

移入	$\dfrac{A \rightarrow (B \rightarrow C)}{A \wedge B \rightarrow C}$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \wedge B}{B}\,(\wedge\text{除}) \quad \dfrac{\dfrac{A \wedge B}{A}\,(\wedge\text{除}) \quad A \rightarrow (B \rightarrow C)}{B \rightarrow C}\,(\rightarrow\text{除})}{C}\,(\rightarrow\text{除})}{A \wedge B \rightarrow C}\,(\rightarrow\text{入})$$

表3-6　述語論理に関する推論規則

規則名	推論規則
∀除	$\dfrac{\forall x\,[P(x)]}{P(a_i)}$
∃入	$\dfrac{P(a_i)}{\exists x\,[P(x)]}$
∀入	$\dfrac{P(a_1)\quad P(a_2)\cdots P(a_n)}{\forall x\,[P(x)]}$

∃除	$\dfrac{\exists x\,[P(x)] \qquad \dfrac{[P(a_1)]}{C} \qquad \dfrac{[P(a_2)]}{C} \;\cdots\; \dfrac{[P(a_n)]}{C}}{C}$

表3-7　述語論理に関する推論法則

法則名	推論法則
∃∃入	$\dfrac{P_1(a_{1_{i1}}) \qquad P_2(a_{2_{i2}}) \qquad \cdots \qquad P_n(a_{n_{in}})}{\exists x_1 \,\exists x_2 \cdots \exists x_n \,[P_1(x_1) \land P_2(x_2) \land \cdots \land P_n(x_n)]}$

$$\begin{array}{ll}
P_1(a_{1_{i1}}) \quad P_2(a_{2_{i2}}) \quad \cdots \quad P_n(a_{n_{in}}) & \\ \cline{1-1}
P_1(a_{1_{i1}}) \land P_2(a_{2_{i2}}) \land \cdots \land P_n(a_{n_{in}}) & (\land\land\text{入}) \\ \cline{1-1}
\exists x_n \,[P_1(a_{1_{i1}}) \land P_2(a_{2_{i2}}) \land \cdots \land P_n(x_n)] & (\exists\text{入}) \\ \cline{1-1}
\vdots & (\exists\text{入}) \\ \cline{1-1}
\exists x_2 \cdots \exists x_n \,[P_1(a_{1_{i1}}) \land P_2(x_2) \land \cdots \land P_n(x_n)] & (\exists\text{入}) \\ \cline{1-1}
\exists x_1 \,\exists x_2 \cdots \exists x_n \,[P_1(x_1) \land P_2(x_2) \land \cdots \land P_n(x_n)] & (\exists\text{入})
\end{array}$$

(2) くじを１本引くという試行に関する記号化

「当たりくじ」と「はずれくじ」の入ったくじからくじを１本引くという試行及び２つのくじ A，B からくじを１本ずつ引くという各試行における事象，この試行における根元事象の個数，確率に関する記号を表 3-8 に示す。なお，上述の変数 x は n(X)，n(Y)，n(S)，P(X)，P(Y)のいずれか及びそれらから構成されるものとする。

表3-8　くじを１本引くという試行における事象，根元事象の個数，確率

くじを１本引くという試行における事象	X	当たりくじが出る事象
	X_A	くじ A において当たりくじが出る事象
	X_B	くじ B において当たりくじが出る事象
	Y	はずれくじが出る事象
	Y_A	くじ A においてはずれくじが出る事象
	Y_B	くじ B においてはずれくじが出る事象
	S	全事象
	S_A	くじ A に関する全事象
	S_B	くじ B に関する全事象
くじを１本引くという試行における根元事象の個数	$n(X)$	当たりくじの本数
	$n(X_A)$	くじ A の当たりくじの本数
	$n(X_B)$	くじ B の当たりくじの本数
	$n(Y)$	はずれくじの本数
	$n(Y_A)$	くじ A のはずれくじの本数
	$n(Y_B)$	くじ B のはずれくじの本数
	$n(S)$	くじの総数
	$n(S_A)$	くじ A の総数
	$n(S_B)$	くじ B の総数
くじを１本引くという試行における確率	$P(X)$	当たる確率
	$P(X_A)$	くじ A において当たる確率
	$P(X_B)$	くじ B において当たる確率
	$P(Y)$	はずれる確率

	$P(Y_A)$	くじAにおいてはずれる確率
	$P(Y_B)$	くじBにおいてはずれる確率
	$P(S)$	全事象の確率
	$P(S_A)$	くじAに関する全事象の確率
	$P(S_B)$	くじBに関する全事象の確率

確率に関する比較場面におけるくじの総数，当たりくじの本数，はずれくじの本数，当たる確率，はずれる確率について条件を記号化し，表3-9に示す。なお，$(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$を$A \veebar B$と略記する。$\veebar$は排他的論理和を意味する。

表3-9　確率に関する比較場面における条件

	条件	記号化
くじの総数	くじAとBのくじの総数が同じ。	$A_1 : n(S_A) = n(S_B)$
※ $A_1 \veebar A_2 \veebar A_3$ より，	くじAの方がくじの総数が多い。	$A_2 : n(S_A) > n(S_B)$
$\neg A_1 \equiv A_2 \veebar A_3$ が	くじBの方がくじの総数が多い。	$A_3 : n(S_A) < n(S_B)$
成立する。	くじAとBのくじの総数が異なる。	$\neg A_1 : \neg(n(S_A) = n(S_B))$
当たりくじの本数	くじAとBの当たりくじの本数が同じ。	$B_1 : n(X_A) = n(X_B)$
※ $B_1 \veebar B_2 \veebar B_3$ より，	くじAの方が当たりくじの本数が多い。	$B_2 : n(X_A) > n(X_B)$
$\neg B_1 \equiv B_2 \veebar B_3$ が	くじBの方が当たりくじの本数が多い。	$B_3 : n(X_A) < n(X_B)$
成立する。	くじAとBの当たりくじの本数が異なる。	$\neg B_1 : \neg(n(X_A) = n(X_B))$
はずれくじの本数	くじAとBのはずれくじの本数が同じ。	$C_1 : n(Y_A) = n(Y_B)$
※ $C_1 \veebar C_2 \veebar C_3$ より，	くじAの方がはずれくじの本数が多い。	$C_2 : n(Y_A) > n(Y_B)$
$\neg C_1 \equiv C_2 \veebar C_3$ が	くじBの方がはずれくじの本数が多い。	$C_3 : n(Y_A) < n(Y_B)$
成立する。	くじAとBのはずれくじの本数が異なる。	$\neg C_1 : \neg(n(Y_A) = n(Y_B))$
当たる確率	くじAとBの当たりやすさが同じ。	$D_1 : P(X_A) = P(X_B)$
※ $D_1 \veebar D_2 \veebar D_3$ より，	くじAの方が当たりやすい。	$D_2 : P(X_A) > P(X_B)$
$\neg D_1 \equiv D_2 \veebar D_3$ が	くじBの方が当たりやすい。	$D_3 : P(X_A) < P(X_B)$
成立する。	くじAとBの当たりやすさが異なる。	$\neg D_1 : \neg(P(X_A) = P(X_B))$
はずれる確率	くじAとBのはずれやすさが同じ。	$E_1 : P(Y_A) = P(Y_B)$
※ $E_1 \veebar E_2 \veebar E_3$ より，	くじAの方がはずれやすい。	$E_2 : P(Y_A) > P(Y_B)$
$\neg E_1 \equiv E_2 \veebar E_3$ が	くじBの方がはずれやすい。	$E_3 : P(Y_A) < P(Y_B)$
成立する。	くじAとBのはずれやすさが異なる。	$\neg E_1 : \neg(P(Y_A) = P(Y_B))$

くじの総数，当たりくじの本数，はずれくじの本数，当たる確率の各々において成立する排他的関係について，$\neg A_1 \equiv A_2 \veebar A_3$を例に証明する。他の場合についても，同様に証明が可能である。

A_1をA，$A_2 \veebar A_3$をBとすると，$A_1 \veebar A_2 \veebar A_3$より，$A \veebar B$である。

$\neg A \wedge (A \veebar B)$	$B \wedge (A \veebar B)$
$\equiv \neg A \wedge ((A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B))$	$\equiv B \wedge ((A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B))$
$\equiv (\bot \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$	$\equiv (A \wedge \bot) \vee (\neg A \wedge B)$
$\equiv \bot \vee (\neg A \wedge B)$	$\equiv \bot \vee (\neg A \wedge B)$
$\equiv \neg A \wedge B \qquad \therefore \neg A \rightarrow B$	$\equiv \neg A \wedge B \qquad \therefore B \rightarrow \neg A$

したがって，$\neg A \equiv B$であり，$\neg A_1 \equiv A_2 \veebar A_3$となる。

(3) くじを１本引くという試行に関する公理，定義，定理

くじを１本引くという試行に関する公理，定義，定理を表 3-10 に示し，定理について証明を行う。なお，確率という観点から，推論規則の下式に，n(X)÷n(Y)，n(Y)÷n(X)は表れない。

表3-10　くじを１本引くという試行に関する公理，定義，定理

<table>
<tr><td>公理１</td><td>$P(S)=1$，$P(\phi)=0$</td></tr>
<tr><td>公理２</td><td>$P(S)=P(X)+P(Y)$</td></tr>
<tr><td>公理３</td><td>$0\leqq P(X)\leqq 1$，$0\leqq P(Y)\leqq 1$　　$(X\subseteq S,\ Y\subseteq S)$</td></tr>
<tr><td>定義</td><td>$P(Z)=n(Z)\div n(S)$　　$(Z:X,\ Y)$</td></tr>
<tr><td>定理１</td><td>$P(Y)=1-P(X)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">

$$\dfrac{\dfrac{\text{公理２：}P(S)=P(X)+P(Y)}{P(X)+P(Y)=P(S)}\,(\text{対称律})\qquad \text{公理１：}P(S)=1}{P(X)+P(Y)=1}\,(=\text{代入})$$

$$\dfrac{\dfrac{P(X)+P(Y)=1\qquad \text{反射律：}P(X)=P(X)}{P(X)+P(Y)-P(X)=1-P(X)}\,(==)}{P(Y)=1-P(X)}\,(\text{演推})※$$

$$\boxed{\begin{aligned}※\ P(X)+P(Y)-P(X)&=P(Y)+P(X)-P(X)\\&=P(Y)+0\\&=P(Y)\end{aligned}}$$

</td></tr>
<tr><td>定理２</td><td>$P(X)=1-P(Y)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">

$$\dfrac{\dfrac{\text{公理２：}P(S)=P(X)+P(Y)}{P(X)+P(Y)=P(S)}\,(\text{対称律})\qquad \text{公理１：}P(S)=1}{P(X)+P(Y)=1}\,(=\text{代入})$$

$$\dfrac{\dfrac{P(X)+P(Y)=1\qquad \text{反射律：}P(Y)=P(Y)}{P(X)+P(Y)-P(Y)=1-P(Y)}\,(==)}{P(X)=1-P(Y)}\,(\text{演推})※$$

$$\boxed{\begin{aligned}※\ P(X)+P(Y)-P(Y)&=P(X)+0\\&=P(X)\end{aligned}}$$

</td></tr>
<tr><td>定理３</td><td>$n(Z)=n(S)\times P(Z)$　　$(Z:X,\ Y)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{反射律：}n(S)=n(S)\qquad \text{定義：}P(Z)=n(Z)\div n(S)}{n(S)\times P(Z)=n(S)\times n(Z)\div n(S)}\,(==)}{n(S)\times P(Z)=n(Z)}\,(\text{演推})※}{n(Z)=n(S)\times P(Z)}\,(\text{対称律})$$

$$\boxed{\begin{aligned}※\ n(S)\times n(Z)\div n(S)&=n(Z)\times n(S)\div n(S)\\&=n(Z)\times 1=n(Z)\end{aligned}}$$

</td></tr>
<tr><td>定理４</td><td>$n(S)=n(Z)\div P(Z)$　　$(Z:X,\ Y)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{定理３：}n(Z)=n(S)\times P(Z)\qquad \text{反射律：}P(Z)=P(Z)}{n(Z)\div P(Z)=n(S)\times P(Z)\div P(Z)}\,(==)}{n(Z)\div P(Z)=n(S)}\,(\text{演推})※}{n(S)=n(Z)\div P(Z)}\,(\text{対称律})$$

$$\boxed{\begin{aligned}※\ n(S)\times P(Z)\div P(Z)&=n(S)\times 1\\&=n(S)\end{aligned}}$$

</td></tr>
<tr><td>定理５</td><td>$n(S)=n(X)+n(Y)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{反射律：}n(S)=n(S)\qquad \dfrac{\text{公理２：}P(S)=P(X)+P(Y)\qquad \text{公理１：}P(S)=1}{1=P(X)+P(Y)}\,(=\text{代入})}{n(S)\times 1=n(S)\times(P(X)+P(Y))}\,(==)}{n(S)\times 1=n(S)\times P(X)+n(S)\times P(Y)}\,(\text{演推})}{n(S)=n(S)\times P(X)+n(S)\times P(Y)}\,(\text{演推})$$

</td></tr>
</table>

$$\dfrac{\dfrac{\text{定理３：}n(Z)=n(S)\times P(Z)}{n(S)\times P(Z)=n(Z)}\text{(対称律)}\qquad n(Z)=n(X)\quad P(Z)=P(X)}{n(S)\times P(X)=n(X)}\text{(＝代入)}$$

$$\dfrac{\dfrac{\text{定理３：}n(Z)=n(S)\times P(Z)}{n(S)\times P(Z)=n(Z)}\text{(対称律)}\qquad n(Z)=n(Y)\quad P(Z)=P(Y)}{n(S)\times P(Y)=n(Y)}\text{(＝代入)}$$

$$\dfrac{n(S)=n(S)\times P(X)+n(S)\times P(Y)\qquad n(S)\times P(X)=n(X)\quad n(S)\times P(Y)=n(Y)}{n(S)=n(X)+n(Y)}\text{(＝代入)}$$

定理６	$n(Y)=n(S)-n(X)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{定理５：}n(S)=n(X)+n(Y)\qquad\text{反射律：}n(X)=n(X)}{n(S)-n(X)=n(X)+n(Y)-n(X)}\text{(＝＝)}}{n(S)-n(X)=n(Y)}\text{(演推)※}}{n(Y)=n(S)-n(X)}\text{(対称律)}$$

※ $n(X)+n(Y)-n(X)=n(Y)+n(X)-n(X)$
$=n(Y)+0=n(Y)$

定理７	$n(X)=n(S)-n(Y)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{定理５：}n(S)=n(X)+n(Y)\qquad\text{反射律：}n(Y)=n(Y)}{n(S)-n(Y)=n(X)+n(Y)-n(Y)}\text{(＝＝)}}{n(S)-n(Y)=n(X)}\text{(演推)※}}{n(X)=n(S)-n(Y)}\text{(対称律)}$$

※ $n(X)+n(Y)-n(Y)=n(X)+0$
$=n(X)$

3.2　割合に関する概念的知識についての調査問題及び調査結果の分析と考察

当たりやすさという確率に関する問題においては，くじの総数を基準量とする必要がある。しかし，概念的知識に関する調査問題は数値を含まないため，児童にとって考えにくい問題である。また，児童は「部分－全体」よりも「部分－部分」に着目しやすい[175]ことを考慮すると，児童は当たりくじの本数を比較量，はずれくじの本数を基準量とした「部分－部分」における割合を用いて，当たりやすさという確率に関する問題にアプローチできる。したがって，確率という観点から俯瞰的に児童の思考過程を分析するために，割合についての概念的知識に関する調査問題は，割合(当たりやすさ)に関する状況，比較量(当たりくじ)に関する状況，基準量(はずれくじ)に関する状況の３つの状況から構成される。

3.2.1　割合に関する状況

(1)調査問題

割合に関する概念的知識の「割合に関する状況」の調査問題は，以下の問題例のように仮定の候補及び結論からなる。仮定の候補となる３つの条件の内，いくつかの条件を仮定すると結論としての条件を導くことができる。この意味において候補である。仮定の候補には，比較量(当たりくじ)に関する条件と基準量(はずれくじ)に関する条件が含まれる。児童は，「部分－部分」から「部分－全体」を構成する[176]ことを考慮して，「部分－全体」の視点からもアプローチできるように，もう１つの条件はくじ全体に関する条件を設定する。

〔問題例〕

くじ引きで，「当たりくじの数」と「はずれくじの数」を合わせたくじの数を「全体のくじの数」とします。くじ引きで，「当たりくじ」が出やすいことを「当たりやすい」と言います。

「当たりくじ」と「はずれくじ」の入った２つのくじ A，B があります。

くじ A とくじ B の「全体のくじの数」は同じです。 くじ A は，くじ B より「当たりくじ」が多く入っています。 くじ B は，くじ A より「はずれくじ」が多く入っています。	【仮定の候補】

くじを１本ずつ引くとき，くじ A とくじ B では，どちらが「当たりやすい」ですか。または，くじ A もくじ B も同じだけ「当たりやすい」ですか。正しいと思う□の中に○をつけなさい。ただし，問題の中には，全ての□に○をつける問題もあります。

□	□	□	
くじ A の方が 「当たりやすい」	くじ A も B も同じ だけ「当たりやすい」	くじ B の方が 「当たりやすい」	【結論】

割合に関する概念的知識の「割合に関する状況」の調査問題は，６つの問題から構成されている。その内，５つの問題(問題１，問題２，問題３，問題５，問題６)は正答が１つに定まる問題である。もう１つの問題(問題４)は正答が１つに定まらない問題である。そこで，正答が１つに定まる問題に関して，仮定の候補に矛盾した条件が含まれていないことを確認するために，２つの条件を仮定すると定理としてもう１つの条件が導かれることを命題論理により証明する。また，仮定の候補の内，いくつかの条件を仮定し，命題論理により結論として証明される条件を示す。ここでは，問題１の証明を行う。問題１には(Ⅰ)，(Ⅱ)の２つの考え方があるが，(Ⅰ)の考え方について示す。問題１の(Ⅱ)の考え方，問題２，問題３，問題５，問題６の詳細な証明は付録１に掲載。

【問題１】

仮定の候補	定理	結論
A_1 B_2 C_3	（Ⅰ）$A_1 \wedge B_2 \to C_3$ （Ⅱ）$A_1 \wedge C_3 \to B_2$	D_2

証明

（Ⅰ）

$$\frac{A_1 : n(S_A) = n(S_B) \qquad B_2 : n(X_A) > n(X_B)}{n(S_A) - n(X_A) < n(S_B) - n(X_B)}\ \text{（＞＝２）}$$

$$\cfrac{\cfrac{\text{定理６}: n(Y) = n(S) - n(X) \qquad n(X) = n(X_A) \quad n(Y) = n(Y_A) \quad n(S) = n(S_A)}{n(Y_A) = n(S_A) - n(X_A)}\ \text{（＝代入）}}{n(S_A) - n(X_A) = n(Y_A)}\ \text{（対称律）}$$

$$\cfrac{\cfrac{\text{定理６}: n(Y) = n(S) - n(X) \qquad n(X) = n(X_B) \quad n(Y) = n(Y_B) \quad n(S) = n(S_B)}{n(Y_B) = n(S_B) - n(X_B)}\ \text{（＝代入）}}{n(S_B) - n(X_B) = n(Y_B)}\ \text{（対称律）}$$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{n(S_A) - n(X_A) < n(S_B) - n(X_B) \qquad n(S_A) - n(X_A) = n(Y_A) \quad n(S_B) - n(X_B) = n(Y_B)}{C_3 : n(Y_A) < n(Y_B)}\ \text{（＝代入）}}{B_2 \to C_3}\ \text{（→入）}}{A_1 \to (B_2 \to C_3)}\ \text{（→入）}}{A_1 \wedge B_2 \to C_3}\ \text{（移入）}$$

仮定の候補の内，矛盾した条件はない。A_1 と B_2 を仮定する場合，C_3 は仮定として必要ない。

（Ⅰ）

$$\frac{B_2 : n(X_A) > n(X_B) \qquad A_1 : n(S_A) = n(S_B)}{n(X_A) \div n(S_A) > n(X_B) \div n(S_B)}\ \text{（＞＝１）}$$

$$\cfrac{\cfrac{\text{定義}: P(Z) = n(Z) \div n(S) \qquad n(Z) = n(X_A) \quad n(S) = n(S_A) \quad P(Z) = P(X_A)}{P(X_A) = n(X_A) \div n(S_A)}\ \text{（＝代入）}}{n(X_A) \div n(S_A) = P(X_A)}\ \text{（対称律）}$$

$$\cfrac{\cfrac{\text{定義}: P(Z) = n(Z) \div n(S) \qquad n(Z) = n(X_B) \quad n(S) = n(S_B) \quad P(Z) = P(X_B)}{P(X_B) = n(X_B) \div n(S_B)}\ \text{（＝代入）}}{n(X_B) \div n(S_B) = P(X_B)}\ \text{（対称律）}$$

$$\frac{n(X_A) \div n(S_A) > n(X_B) \div n(S_B) \qquad n(X_A) \div n(S_A) = P(X_A) \quad n(X_B) \div n(S_B) = P(X_B)}{D_2 : P(X_A) > P(X_B)}\ \text{（＝代入）}$$

A_1 と B_2 を仮定し，結論として証明されるのは，D_2 である。

正答が１つに定まらない問題に関して，仮定の候補に矛盾した条件が含まれていないことを命題論理により証明する。また，仮定の候補を満たす具体的な数値を仮定し，述語論理により結論として証明される条件を示す。具体的な数値を決定する過程を示した考え方の例は付録２に掲載。

【問題４】

仮定の候補	定理
$\neg A_1$ B_2 C_2	$B_2 \wedge C_2 \to \neg A_1$

結論

$$\begin{aligned}
&(\exists x \exists y \exists z \exists w\ [n(X_A) = x \wedge n(X_B) = y \wedge x > y \\
&\qquad \wedge n(S_A) = z \wedge n(S_B) = w \wedge z > w \\
&\qquad \wedge n(Y_A) = z - x \wedge n(Y_B) = w - y \wedge z - x > w - y \\
&\qquad \wedge P(X_A) = x/z \wedge P(X_B) = y/w \wedge x/z = y/w]\ ) \\
&\wedge (\exists x' \exists y' \exists z' \exists w'\ [n(X_A) = x' \wedge n(X_B) = y' \wedge x' > y' \\
&\qquad \wedge n(S_A) = z' \wedge n(S_B) = w' \wedge z' > w' \\
&\qquad \wedge n(Y_A) = z' - x' \wedge n(Y_B) = w' - y' \wedge z' - x' > w' - y' \\
&\qquad \wedge P(X_A) = x'/z' \wedge P(X_B) = y'/w' \wedge x'/z' > y'/w']\ ) \\
&\wedge (\exists x'' \exists y'' \exists z'' \exists w''\ [n(X_A) = x'' \wedge n(X_B) = y'' \wedge x'' > y'' \\
&\qquad \wedge n(S_A) = z'' \wedge n(S_B) = w'' \wedge z'' > w'' \\
&\qquad \wedge n(Y_A) = z'' - x'' \wedge n(Y_B) = w'' - y'' \wedge z'' - x'' > w'' - y'' \\
&\qquad \wedge P(X_A) = x''/z'' \wedge P(X_B) = y''/w'' \wedge x''/z'' < y''/w'']\ )
\end{aligned}$$

証明

$$\dfrac{B_2 : n(X_A) > n(X_B) \qquad C_2 : n(Y_A) > n(Y_B)}{n(X_A) + n(Y_A) > n(X_B) + n(Y_B)}\ (>>1)$$

$$\dfrac{\dfrac{\text{定理５}: n(S) = n(X) + n(Y) \qquad n(X) = n(X_A) \quad n(Y) = n(Y_A) \quad n(S) = n(S_A)}{n(S_A) = n(X_A) + n(Y_A)}\ (=\text{代入})}{n(X_A) + n(Y_A) = n(S_A)}\ (\text{対称律})$$

$$\dfrac{\dfrac{\text{定理５}: n(S) = n(X) + n(Y) \qquad n(X) = n(X_B) \quad n(Y) = n(Y_B) \quad n(S) = n(S_B)}{n(S_B) = n(X_B) + n(Y_B)}\ (=\text{代入})}{n(X_B) + n(Y_B) = n(S_B)}\ (\text{対称律})$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{n(X_A) + n(Y_A) > n(X_B) + n(Y_B) \qquad n(X_A) + n(Y_A) = n(S_A) \quad n(X_B) + n(Y_B) = n(S_B)}{A_2 : n(S_A) > n(S_B)}\ (=\text{代入})}{C_2 \to A_2}\ (\to\text{入})}{B_2 \to (C_2 \to A_2)}\ (\to\text{入})}{B_2 \wedge C_2 \to A_2}\ (\text{移入})}{B_2 \wedge C_2 \to A_2 \vee A_3}\ (\vee\text{入}) \qquad \dfrac{\dfrac{\neg A_1 \equiv A_2 \underline{\vee} A_3}{\neg A_1 \equiv A_2 \vee A_3}\ (\underline{\vee} \to \vee)}{A_2 \vee A_3 \to \neg A_1}\ (\equiv\text{除})}{B_2 \wedge C_2 \to \neg A_1}\ (\text{推移})$$

仮定の候補の内，矛盾した条件はない。B_2 と C_2 を仮定する場合，$\neg A_1$ は仮定として必要ない。

$$\dfrac{n(X_A) = 2 \quad n(X_B) = 1 \quad n(S_A) = 4 \quad n(S_B) = 2 \quad 2 > 1 \quad 4 > 2 \quad 4\text{-}2 > 2\text{-}1 \quad 2/4 = 1/2}{\begin{aligned}
&\exists x \exists y \exists z \exists w\ [n(X_A) = x \wedge n(X_B) = y \wedge x > y \\
&\qquad \wedge n(S_A) = z \wedge n(S_B) = w \wedge z > w \\
&\qquad \wedge n(Y_A) = z - x \wedge n(Y_B) = w - y \wedge z - x > w - y \\
&\qquad \wedge P(X_A) = x/z \wedge P(X_B) = y/w \wedge x/z = y/w]\ \cdots ⓐ
\end{aligned}}\ (\exists\exists\text{入})$$

$$\underline{n(X_A)=3 \quad n(X_B)=1 \quad n(S_A)=5 \quad n(S_B)=2 \quad 3>1 \quad 5>2 \quad 5\text{-}3>2\text{-}1 \quad 3/5>1/2} \ (\exists\exists\text{入})$$

$$\begin{aligned}\exists x'\exists y'\exists z'\exists w'\,[&n(X_A)=x' \wedge n(X_B)=y' \wedge x'>y'\\ &\wedge n(S_A)=z' \wedge n(S_B)=w' \wedge z'>w'\\ &\wedge n(Y_A)=z'-x' \wedge n(Y_B)=w'-y' \wedge z'-x'>w'-y'\\ &\wedge P(X_A)=x'/z' \wedge P(X_B)=y'/w' \wedge x'/z'>y'/w']\ \cdots ⓑ\end{aligned}$$

$$\underline{n(X_A)=2 \quad n(X_B)=1 \quad n(S_A)=5 \quad n(S_B)=2 \quad 2>1 \quad 5>2 \quad 5\text{-}2>2\text{-}1 \quad 2/5<1/2} \ (\exists\exists\text{入})$$

$$\begin{aligned}\exists x''\exists y''\exists z''\exists w''\,[&n(X_A)=x'' \wedge n(X_B)=y'' \wedge x''>y''\\ &\wedge n(S_A)=z'' \wedge n(S_B)=w'' \wedge z''>w''\\ &\wedge n(Y_A)=z''-x'' \wedge n(Y_B)=w''-y'' \wedge z''-x''>w''-y''\\ &\wedge P(X_A)=x''/z'' \wedge P(X_B)=y''/w'' \wedge x''/z''<y''/w'']\ \cdots ⓒ\end{aligned}$$

$$\underline{\qquad\qquad ⓐ \qquad ⓑ \qquad ⓒ \qquad\qquad} \ (\wedge\wedge\text{入})$$

$$\begin{aligned}(\exists x\exists y\exists z\exists w\,[&n(X_A)=x \wedge n(X_B)=y \wedge x>y\\ &\wedge n(S_A)=z \wedge n(S_B)=w \wedge z>w\\ &\wedge n(Y_A)=z-x \wedge n(Y_B)=w-y \wedge z-x>w-y\\ &\wedge P(X_A)=x/z \wedge P(X_B)=y/w \wedge x/z=y/w])\\ \wedge(\exists x'\exists y'\exists z'\exists w'\,[&n(X_A)=x' \wedge n(X_B)=y' \wedge x'>y'\\ &\wedge n(S_A)=z' \wedge n(S_B)=w' \wedge z'>w'\\ &\wedge n(Y_A)=z'-x' \wedge n(Y_B)=w'-y' \wedge z'-x'>w'-y'\\ &\wedge P(X_A)=x'/z' \wedge P(X_B)=y'/w' \wedge x'/z'>y'/w'])\\ \wedge(\exists x''\exists y''\exists z''\exists w''\,[&n(X_A)=x'' \wedge n(X_B)=y'' \wedge x''>y''\\ &\wedge n(S_A)=z'' \wedge n(S_B)=w'' \wedge z''>w''\\ &\wedge n(Y_A)=z''-x'' \wedge n(Y_B)=w''-y'' \wedge z''-x''>w''-y''\\ &\wedge P(X_A)=x''/z'' \wedge P(X_B)=y''/w'' \wedge x''/z''<y''/w''])\end{aligned}$$

結論として，$\neg A_1$，B_2，C_2 及び D_1，$\neg A_1$，B_2，C_2 及び D_2，$\neg A_1$，B_2，C_2 及び D_3 のそれぞれを満たす $n(X_A)$，$n(X_B)$，$n(S_A)$，$n(S_B)$が存在することが証明される。

(2) 調査対象

第５学年の児童 125 名，第６学年の児童 129 名，計 254 名の児童を対象に調査を実施した。第５学年の児童は「割合」の単元が未習であり，第６学年の児童は「割合」の単元が既習である。

(3) 調査結果の分析と考察

1) 水準区分と段階区分

調査問題が妥当であるかどうかを調べるために，スケログラム分析を行った[182，pp.81-87]。解答の正答と誤答を次のように定めた。正答が１つに定まる問題に関して，正解を１つだけ選択しているものを正答とし，１点を付与する。それ以外の解答は誤答とし，０点を付与する。正答が１つに定まらない問題に関して，正解である３つ全てを選択している完答のものを正答とし，１点を付与する。それ以外の解答は誤答とし，０点を付与する。各児童の各問題の得点の合計を合計得点とする。スケログラムは，左から右へ調査問題の正答率が高い問題から低い問題へ，上から下へ合計得点の低得点者から高得点者へと配置する。区分線を引いた児童の正誤パターンの一部及び合計得点，エラー，各問題の正答数，誤答数，正答数と誤答数の合計，正答率，誤答率を表 3-11 に示す。表中のエラーは，区分線より左を正答，右を誤答としたとき，本来，正答であるべきところに誤答がくる場合と誤答であるべきところに正答がくる場合の個数を表す。

表3-11　割合に関する概念的知識の「割合に関する状況」の児童の正誤パターン

児童番号	問題２	問題１	問題３	問題５	問題６	問題４	合計得点	エラー
5009	0	0	0	0	0	0	0	0
5017	0	0	0	0	0	0	0	0
5018	0	0	0	0	0	0	0	0
5007	0	1	0	0	0	0	1	1
5021	0	1	0	0	0	0	1	1
6003	0	1	0	0	0	0	1	1
5019	1	0	0	0	0	0	1	0
5024	1	0	0	0	0	0	1	0
5036	1	0	0	0	0	0	1	0
5101	1	0	1	0	0	0	2	1
6010	1	0	1	0	0	0	2	1
6070	1	0	1	0	0	0	2	1
5022	1	1	0	0	0	0	2	0
5033	1	1	0	0	0	0	2	0
5047	1	1	0	0	0	0	2	0
6108	1	1	0	0	0	0	2	0
6127	1	1	0	0	0	0	2	0
5079	0	1	0	1	0	0	2	2
5023	0	1	1	0	1	0	3	2
6005	1	0	1	0	1	0	3	2
5002	1	1	1	0	0	0	3	0
6116	1	1	1	0	0	0	3	0
6122	1	1	1	0	0	0	3	0
6124	1	1	1	0	0	0	3	0
6014	0	0	1	1	1	0	3	3
5107	0	1	0	1	1	0	3	3
5026	1	0	1	1	0	0	3	1
6115	1	1	1	1	0	0	4	0
6117	1	1	1	1	0	0	4	0
6125	1	1	1	1	0	0	4	0
5028	1	1	0	1	1	0	4	1
5031	1	1	0	1	1	0	4	1
5034	1	1	0	1	1	0	4	1
6091	1	1	1	1	1	0	5	0
6092	1	1	1	1	1	0	5	0
6093	1	1	1	1	1	0	5	0
5003	1	0	1	1	1	1	5	1
6112	1	0	1	1	1	1	5	1
5004	1	1	0	1	1	1	5	1
6126	1	1	1	1	1	1	6	0
6128	1	1	1	1	1	1	6	0
6129	1	1	1	1	1	1	6	0
正答数	230	215	204	188	152	27		

誤答数	24	39	50	66	102	227	エラー数の合計：69
合計	254	254	254	254	254	254	
正答率	0.906	0.846	0.803	0.740	0.598	0.106	
誤答率	0.094	0.154	0.197	0.260	0.402	0.894	

表 3-11 を基に，再現性係数（CR），最小限界再現性係数（MMR），正比率（PPR）を算出し，調査問題の妥当性を検証した［182，pp.81-87］，［183，pp.54-76］。再現性係数は，エラーの総数を E，児童の総数を S，調査項目数を N と表すと，次式により求められる。CR ＞ 0.9 の場合，調査問題の妥当性が高いとされている。

$$CR = 1 - \frac{E}{SN}$$

今回の調査の場合，

$$CR = 1 - \frac{69}{254 \times 6} = 0.955$$

最小限界再現性係数は，問題 i（i ＝ 1，2，…，N）における正答数を p_i，誤答数を q_i と表すと，次式により求められる。max（p_i,q_i）は，ある問題において，正答率＞誤答率の場合，正答数を選択し，誤答率＞正答率の場合，誤答数を選択する。MMR ＜ 0.8 の場合，調査問題の困難さのレベルは適当であるとされている。

$$MMR = \frac{\sum_{i=1}^{N} \max(p_i, q_i)}{SN}$$

今回の調査の場合，

$$MMR = \frac{230 + 215 + 204 + 188 + 152 + 227}{254 \times 6} = 0.798$$

PPR は，次式により求められる。PPR ＞ 0.7 の場合，調査問題の妥当性が高いとされている。

$$PPR = \frac{CR - MMR}{1 - MMR}$$

今回の調査の場合，

$$PPR = \frac{0.955 - 0.798}{1 - 0.798} = 0.776$$

CR ＞ 0.9，MMR ＜ 0.8，PPR ＞ 0.7 であるので，調査問題の妥当性は保証された。さらに，表 3-11 を基に，Kuder-Richardson の信頼性係数 α_{20} を算出し，調査問題の信頼性を検証した［184，p.438］。Kuder-Richardson の信頼性係数 α_{20} は，問題 i における正答率を P_i，誤答率を Q_i，合計得点を X，合計得点の分散を $\sigma^2(X)$ と表すと，次式により求められる。

$$\alpha_{20} = \frac{N}{N-1}\left(1 - \frac{\sum_{i=1}^{N} P_i Q_i}{\sigma^2(X)}\right)$$

今回の調査の場合，

$$\alpha_{20} = \frac{6}{5} \times \left(1 - \frac{0.086 + 0.130 + 0.158 + 0.192 + 0.240 + 0.095}{2.174}\right) = 0.703$$

α 係数は，学力検査の場合，$\alpha > 0.8$，性格や態度などの心理特性を測ろうとする場合は，$\alpha > 0.7$ であることが要求される[185, p.104]。$\alpha_{20} > 0.7$ であるので，調査問題の信頼性は保証された。そこで，各問題における児童の考え方に関してプロトコル分析を行った結果，表 3-11 における児童番号 5009 から児童番号 6003，児童番号 5019 から児童番号 6125，児童番号 5028 から児童番号 6093，児童番号 5003 から児童番号 6129 に属する児童の考え方には，それぞれ特徴があった。児童の考え方の構造的変化としての水準及び水準内における児童の考え方の質的変化としての段階という観点から，表 3-12 に示す水準及び段階の区分を行った。また，各水準及び段階における典型的なプロトコルを示す。

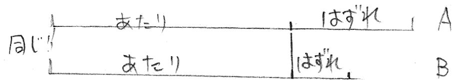
【水準区分】
水準０：比較に関する考えの欠如
水準１：２つのくじ間における相等または大小に基づいた加法的な考えによる比較
水準２：１つのくじ内における割合に基づいた乗法的な考えによる比較
【水準１内における段階区分】
段階 1A：当たりくじの本数に着目
段階 1B：当たりくじの本数とはずれくじの本数に着目

表3-12　割合に関する概念的知識の「割合に関する状況」の水準区分と段階区分

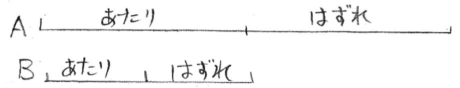
水準	段階	調査問題	仮定	正答	正答数
0					
1	1A	問題２	A_1，B_1，C_1	D_1	230
		問題１	A_1，B_2，C_3	D_2	215
		問題３	$\neg A_1$，B_2，C_3	D_2	204
		問題５	$\neg A_1$，B_2，C_1	D_2	188
	1B	問題６	$\neg A_1$，B_1，C_2	D_3	152
2		問題４	$\neg A_1$，B_2，C_2	D_1，D_2，D_3	27

①水準０
〔５年児童 NS 〕
問題２：「何となく。」【誤答】
②水準１(段階1A)
〔５年児童 KA 〕
問題２：「くじ全体の数が同じで，当たりくじが同じだから，当たりやすさは同じ。」【正答】
問題１：「くじ全体の数が同じで，当たりくじが多いと当たりやすいから，くじ A の方が当たりやすい。」【正答】
問題３：「当たりくじが多いくじ A の方が当たりやすい。」【正答】
問題５：「当たりくじが多いくじ A の方が当たりやすい。」【正答】
問題６：「当たりくじが同じだから，当たりやすさは同じ。」【誤答】
③水準１(段階1B)
〔６年児童 HT 〕

問題６：「当たりくじが同じだから，はずれくじの少ないくじ B の方が当たりやすい。」【正答】



問題４：「当たりくじが多いくじ A の方が当たりやすい。」【誤答】



④水準２

〔６年児童 AU〕

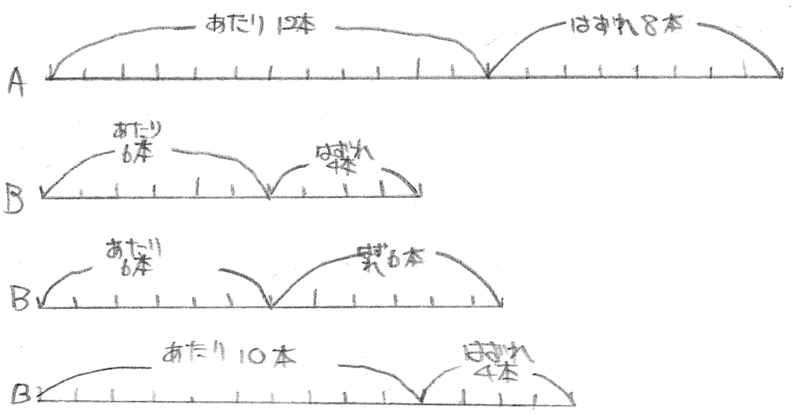
問題４：「くじＡは，くじＢより当たりくじとはずれくじが多いだけで，くじの中で，当たりくじがはずれくじよりも多いかもしれないし，同じかもしれないし，少ないかもしれない。だから，くじ A の当たりくじがはずれくじよりも多くて，くじ B の当たりくじがはずれくじよりも少なかったら，くじＡの方が当たりやすい。でも，くじＡの当たりくじとはずれくじが同じで，くじ B の当たりくじとはずれくじが同じだったら，同じだけ当たりやすい。逆に，くじ A の当たりくじがはずれくじよりも少なくて，くじ B の当たりくじがはずれくじよりも多かったら，くじＢの方が当たりやすい。」【正答】

〔５年児童 HK〕

問題４：「くじＡの当たりが３ではずれが３，くじＢの当たりが２ではずれが２なら，どっちも当たりがはずれの１倍だから当たりやすさは同じ。くじ A の当たりが６ではずれが３，くじ B の当たりが２ではずれが２なら，くじ A は当たりがはずれの２倍で，くじ B は当たりがはずれの１倍だから，くじ A の方が当たりやすい。くじ A の当たりが６ではずれが６，くじＢの当たりが４ではずれが２なら，くじ A は当たりがはずれの１倍で，くじ B は当たりがはずれの２倍だから，くじＢの方が当たりやすい。」【正答】

〔６年児童 RN〕

問題４：「くじ全体の中の当たりくじの割合が，くじＡの方が大きいと，くじＡの方が当たりやすい。当たりくじとはずれくじの割合が同じだと，同じだけ当たりやすい。当たりくじの割合が，くじ A の方が小さいと，くじ B の方が当たりやすい。」【正答】



2)典型的なプロトコルの記号化

表 3-13 に示す 1/2 を基準とした判断に関する記号を加え，各水準及び段階に属する児童が行った推論の記号化を行う。また，各水準及び段階の典型的なプロトコルにおける児童固有の考えについて考察した内容を示す。児童固有の考えは，推論図式において強調表示している。水準２には(Ⅰ)，(Ⅱ)，(Ⅲ)の３つの考え方があるが，ここでは(Ⅰ)の考え方について示す。(Ⅱ)，(Ⅲ)の考え方は付録３に掲載。

表3-13　1/2を基準とした判断

$W(z)$	$P(z) > 1/2$
$L(z)$	$P(z) < 1/2$
$H(z)$	$P(z) = 1/2$

①水準０

調査問題	仮定の候補	正答	結論	正誤
問題２	A_1 B_1 C_1	D_1	D_3	誤答
児童の考え方				

水準０の児童は，２つのくじの当たりやすさの関係を判断するために，２つのくじの総数，当たりくじの本数，はずれくじの本数のいずれにも着目していない。これは，くじを引くという場面及び当たりやすさに関する理解が不足していることに起因すると考えられる。

②水準１（段階1A）

調査問題	仮定の候補	正答	結論	正誤
問題２	A_1 B_1 C_1	D_1	D_1	正答
児童の考え方				
B_1 : $n(X_A) = n(X_B)$　　$n(X_A)=n(X_B) \rightarrow P(X_A)=P(X_B)$ (→除) D_1 : $P(X_A) = P(X_B)$				
調査問題	仮定の候補	正答	結論	正誤
問題１	A_1 B_2 C_3	D_2	D_2	正答
児童の考え方				
B_2 : $n(X_A) > n(X_B)$　　$n(X_A)>n(X_B) \rightarrow P(X_A)>P(X_B)$ (→除) D_2 : $P(X_A) > P(X_B)$				
調査問題	仮定の候補	正答	結論	正誤
問題３	$\neg A_1$ B_2 C_3	D_2	D_2	正答
児童の考え方				
B_2 : $n(X_A) > n(X_B)$　　$n(X_A)>n(X_B) \rightarrow P(X_A)>P(X_B)$ (→除) D_2 : $P(X_A) > P(X_B)$				
調査問題	仮定の候補	正答	結論	正誤
問題５	$\neg A_1$ B_2 C_1	D_2	D_2	正答
児童の考え方				

$$\dfrac{B_2 : \mathrm{n}(X_A) > \mathrm{n}(X_B) \qquad \mathbf{n(X_A)>n(X_B) \to P(X_A)>P(X_B)}}{D_2 : \mathrm{P}(X_A) > \mathrm{P}(X_B)} \ (\to 除)$$

調査問題	仮定の候補	正答	結論	
問題６	$\neg A_1$ B_1 C_2	D_3	D_1	誤答

児童の考え方

$$\dfrac{B_1 : \mathrm{n}(X_A) = \mathrm{n}(X_B) \qquad \mathbf{n(X_A)=n(X_B) \to P(X_A)=P(X_B)}}{D_1 : \mathrm{P}(X_A) = \mathrm{P}(X_B)} \ (\to 除)$$

水準１(段階 1A)の児童は，２つのくじの総数について記述しているが，２つのくじの当たりくじの本数だけに着目し,「当たりくじの本数が多い方が，当たりやすい」,「当たりくじの本数が同じなら，同じくらい当たる」という考えに基づいて，２つのくじの当たりやすさの関係を判断しており，２つのくじの総数やはずれくじの本数を考慮していない。

③水準１(段階1B)

調査問題	仮定の候補	正答	結論	正誤
問題６	$\neg A_1$ B_1 C_2	D_3	D_3	正答

児童の考え方

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{B_1 \quad C_2}{B_1 \wedge C_2}\ (\wedge入)}{C_2 : \mathrm{n}(Y_A) > \mathrm{n}(Y_B)}\ (\wedge除) \qquad \mathbf{n(Y_A)>n(Y_B) \to P(X_A)<P(X_B)}}{D_3 : \mathrm{P}(X_A) < \mathrm{P}(X_B)} \ (\to 除)$$

調査問題	仮定の候補	結論	正誤
問題４	$\neg A_1$ B_2 C_2	D_2	誤答

正答

$$\begin{aligned}
&(\exists x \exists y \exists z \exists w\ [\mathrm{n}(X_A) = x \wedge \mathrm{n}(X_B) = y \wedge x > y \\
&\qquad \wedge\ \mathrm{n}(S_A) = z \wedge \mathrm{n}(S_B) = w \wedge z > w \\
&\qquad \wedge\ \mathrm{n}(Y_A) = z - x \wedge \mathrm{n}(Y_B) = w - y \wedge z - x > w - y \\
&\qquad \wedge\ \mathrm{P}(X_A) = x/z \wedge \mathrm{P}(X_B) = y/w \wedge x/z = y/w]) \\
&\wedge (\exists x' \exists y' \exists z' \exists w'\ [\mathrm{n}(X_A) = x' \wedge \mathrm{n}(X_B) = y' \wedge x' > y' \\
&\qquad \wedge\ \mathrm{n}(S_A) = z' \wedge \mathrm{n}(S_B) = w' \wedge z' > w' \\
&\qquad \wedge\ \mathrm{n}(Y_A) = z' - x' \wedge \mathrm{n}(Y_B) = w' - y' \wedge z' - x' > w' - y' \\
&\qquad \wedge\ \mathrm{P}(X_A) = x'/z' \wedge \mathrm{P}(X_B) = y'/w' \wedge x'/z' > y'/w']) \\
&\wedge (\exists x'' \exists y'' \exists z'' \exists w''\ [\mathrm{n}(X_A) = x'' \wedge \mathrm{n}(X_B) = y'' \wedge x'' > y'' \\
&\qquad \wedge\ \mathrm{n}(S_A) = z'' \wedge \mathrm{n}(S_B) = w'' \wedge z'' > w'' \\
&\qquad \wedge\ \mathrm{n}(Y_A) = z'' - x'' \wedge \mathrm{n}(Y_B) = w'' - y'' \wedge z'' - x'' > w'' - y'' \\
&\qquad \wedge\ \mathrm{P}(X_A) = x''/z'' \wedge \mathrm{P}(X_B) = y''/w'' \wedge x''/z'' < y''/w''])
\end{aligned}$$

児童の考え方

$$\dfrac{B_2:\mathrm{n}(X_A)>\mathrm{n}(X_B) \qquad \dfrac{\dfrac{B_2 \quad C_2}{B_2\wedge C_2}(\wedge入)}{\mathrm{n}(X_A)>\mathrm{n}(X_B)\to \mathrm{P}(X_A)>\mathrm{P}(X_B)}(\wedge除)}{D_2:\mathrm{P}(X_A)>\mathrm{P}(X_B)}(\to除)$$

水準１(段階 1B)の児童は，２つのくじの当たりくじの本数が等しい場合，２つのくじのはずれくじの本数を考慮し，「はずれくじの本数が少ない方が，当たりやすい」という考えに基づいて，２つのくじの当たりやすさの関係を判断している。つまり，２つのくじ間において，当たりくじの本数とはずれくじの本数のいずれか等しい場合は，当たりくじの本数とはずれくじの本数のいずれか等しくない方を選択し，２つのくじの当たりやすさの関係を判断している。

また，２つのくじ間において，当たりくじの本数とはずれくじの本数のいずれも等しくない場合は，２つのくじの当たりくじの本数を考慮し，「当たりくじの本数が多い方が，当たりやすい」という考えに基づいて，２つのくじの当たりやすさの関係を判断している。

④水準２

調査問題	仮定の候補	正誤
問題４	$\neg A_1$ B_2 C_2	正答

正答

$(\exists x \exists y \exists z \exists w\ [\mathrm{n}(X_A)=x \wedge \mathrm{n}(X_B)=y \wedge x>y$
$\quad \wedge\ \mathrm{n}(S_A)=z \wedge \mathrm{n}(S_B)=w \wedge z>w$
$\quad \wedge\ \mathrm{n}(Y_A)=z-x \wedge \mathrm{n}(Y_B)=w-y \wedge z-x>w-y$
$\quad \wedge\ \mathrm{P}(X_A)=x/z \wedge \mathrm{P}(X_B)=y/w \wedge x/z=y/w])$
$\wedge (\exists x' \exists y' \exists z' \exists w'\ [\mathrm{n}(X_A)=x' \wedge \mathrm{n}(X_B)=y' \wedge x'>y'$
$\quad \wedge\ \mathrm{n}(S_A)=z' \wedge \mathrm{n}(S_B)=w' \wedge z'>w'$
$\quad \wedge\ \mathrm{n}(Y_A)=z'-x' \wedge \mathrm{n}(Y_B)=w'-y' \wedge z'-x'>w'-y'$
$\quad \wedge\ \mathrm{P}(X_A)=x'/z' \wedge \mathrm{P}(X_B)=y'/w' \wedge x'/z'>y'/w'])$
$\wedge (\exists x'' \exists y'' \exists z'' \exists w''\ [\mathrm{n}(X_A)=x'' \wedge \mathrm{n}(X_B)=y'' \wedge x''>y''$
$\quad \wedge\ \mathrm{n}(S_A)=z'' \wedge \mathrm{n}(S_B)=w'' \wedge z''>w''$
$\quad \wedge\ \mathrm{n}(Y_A)=z''-x'' \wedge \mathrm{n}(Y_B)=w''-y'' \wedge z''-x''>w''-y''$
$\quad \wedge\ \mathrm{P}(X_A)=x''/z'' \wedge \mathrm{P}(X_B)=y''/w'' \wedge x''/z''<y''/w''])$

結論

(Ⅰ)　$(\exists x \exists y \exists z \exists w\ [\mathrm{n}(X_A)=x \wedge \mathrm{n}(X_B)=y \wedge x>y$
$\quad \wedge\ \mathrm{n}(Y_A)=z \wedge \mathrm{n}(Y_B)=w \wedge z>w$
$\quad \wedge\ \mathrm{P}(X_A)=x/(x+z) \wedge \mathrm{P}(X_B)=y/(y+w) \wedge x/(x+z)=y/(y+w)])$
$\wedge (\exists x' \exists y' \exists z' \exists w'\ [\mathrm{n}(X_A)=x' \wedge \mathrm{n}(X_B)=y' \wedge x'>y'$
$\quad \wedge\ \mathrm{n}(Y_A)=z' \wedge \mathrm{n}(Y_B)=w' \wedge z'>w'$
$\quad \wedge\ \mathrm{P}(X_A)=x'/(x'+z') \wedge \mathrm{P}(X_B)=y'/(y'+w') \wedge x'/(x'+z')>y'/(y'+w')])$
$\wedge (\exists x'' \exists y'' \exists z'' \exists w''\ [\mathrm{n}(X_A)=x'' \wedge \mathrm{n}(X_B)=y'' \wedge x''>y''$
$\quad \wedge\ \mathrm{n}(Y_A)=z'' \wedge \mathrm{n}(Y_B)=w'' \wedge z''>w''$
$\quad \wedge\ \mathrm{P}(X_A)=x''/(x''+z'') \wedge \mathrm{P}(X_B)=y''/(y''+w'') \wedge x''/(x''+z'')<y''/(y''+w'')])$

児童の考え方

(Ⅰ)　$\mathrm{n}(X_A)=3$，$\mathrm{n}(X_B)=2$，$\mathrm{n}(Y_A)=3$，$\mathrm{n}(Y_B)=2$…①

①の「,」を除いて列記したものを$\boxed{1}$とする。

$$\dfrac{\boxed{1}\qquad 3>2\qquad 3>2\qquad 3/(3+3)=2/(2+2)}{\begin{array}{l}\exists x\,\exists y\,\exists z\,\exists w\,[n(X_A)=x\wedge n(X_B)=y\wedge x>y\\ \qquad\qquad\wedge\, n(Y_A)=z\wedge n(Y_B)=w\wedge z>w\\ \qquad\qquad\wedge\, P(X_A)=x/(x+z)\wedge P(X_B)=y/(y+w)\wedge x/(x+z)=y/(y+w)]\ \cdots ⓐ\end{array}}\ (\exists\exists\text{入})$$

$n(X_A)=6$，$n(X_B)=2$，$n(Y_A)=3$，$n(Y_B)=2$…②

②の「,」を除いて列記したものを$\boxed{2}$とする。

$$\dfrac{\boxed{2}\qquad 6>2\qquad 3>2\qquad 6/(6+3)>2/(2+2)}{\begin{array}{l}\exists x'\,\exists y'\,\exists z'\,\exists w'\,[n(X_A)=x'\wedge n(X_B)=y'\wedge x'>y'\\ \qquad\qquad\wedge\, n(Y_A)=z'\wedge n(Y_B)=w'\wedge z'>w'\\ \qquad\qquad\wedge\, P(X_A)=x'/(x'+z')\wedge P(X_B)=y'/(y'+w')\wedge x'/(x'+z')>y'/(y'+w')]\ \cdots ⓑ\end{array}}\ (\exists\exists\text{入})$$

$n(X_A)=6$，$n(X_B)=4$，$n(Y_A)=6$，$n(Y_B)=2$…③

③の「,」を除いて列記したものを$\boxed{3}$とする。

$$\dfrac{\boxed{3}\qquad 6>4\qquad 6>2\qquad 6/(6+6)<4/(4+2)}{\begin{array}{l}\exists x''\,\exists y''\,\exists z''\,\exists w''\,[n(X_A)=x''\wedge n(X_B)=y''\wedge x''>y''\\ \qquad\qquad\wedge\, n(Y_A)=z''\wedge n(Y_B)=w''\wedge z''>w''\\ \qquad\qquad\wedge\, P(X_A)=x''/(x''+z'')\wedge P(X_B)=y''/(y''+w'')\wedge x''/(x''+z'')<y''/(y''+w'')]\ \cdots ⓒ\end{array}}\ (\exists\exists\text{入})$$

$$\dfrac{ⓐ\qquad ⓑ\qquad ⓒ}{\begin{array}{l}(\exists x\,\exists y\,\exists z\,\exists w\,[n(X_A)=x\wedge n(X_B)=y\wedge x>y\\ \qquad\qquad\wedge\, n(Y_A)=z\wedge n(Y_B)=w\wedge z>w\\ \qquad\qquad\wedge\, P(X_A)=x/(x+z)\wedge P(X_B)=y/(y+w)\wedge x/(x+z)=y/(y+w)])\\ \wedge(\exists x'\,\exists y'\,\exists z'\,\exists w'\,[n(X_A)=x'\wedge n(X_B)=y'\wedge x'>y'\\ \qquad\qquad\wedge\, n(Y_A)=z'\wedge n(Y_B)=w'\wedge z'>w'\\ \qquad\qquad\wedge\, P(X_A)=x'/(x'+z')\wedge P(X_B)=y'/(y'+w')\wedge x'/(x'+z')>y'/(y'+w')])\\ \wedge(\exists x''\,\exists y''\,\exists z''\,\exists w''\,[n(X_A)=x''\wedge n(X_B)=y''\wedge x''>y''\\ \qquad\qquad\wedge\, n(Y_A)=z''\wedge n(Y_B)=w''\wedge z''>w''\\ \qquad\qquad\wedge\, P(X_A)=x''/(x''+z'')\wedge P(X_B)=y''/(y''+w'')\wedge x''/(x''+z'')<y''/(y''+w'')])\end{array}}\ (\wedge\wedge\text{入})$$

「当たりくじの本数がはずれくじの本数より多いくじは，当たりくじの方が出やすい」，「はずれくじの本数が当たりくじの本数より多いくじは，はずれくじの方が出やすい」，「当たりくじの本数とはずれくじの本数が同じくじは，当たりくじとはずれくじが同じくらい出る」という考えに基づいて，以下のように，$P(X_A)$と$P(X_B)$の大小関係及び相等関係を判断することができると考えている。B_2 と C_2 の条件を満たすように，$n(X_A)=2$，$n(X_B)=2$，$n(Y_A)=2$，$n(Y_B)=2$の条件を基に，$n(X_A)$と$n(Y_A)$の２項にそれぞれ＋１している。

(1) $n(X_A)=3$，$n(X_B)=2$，$n(Y_A)=3$，$n(Y_B)=2$

$$\dfrac{\dfrac{n(X_A)=3 \qquad 3>2}{n(X_A)>2}\text{（推移律）} \qquad \dfrac{n(X_B)=2}{2=n(X_B)}\text{（対称律）}}{B_2 : n(X_A)>n(X_B)}\text{（推移律）}$$

$$\dfrac{\dfrac{n(Y_A)=3 \qquad 3>2}{n(Y_A)>2}\text{（推移律）} \qquad \dfrac{n(Y_B)=2}{2=n(Y_B)}\text{（対称律）}}{C_2 : n(Y_A)>n(Y_B)}\text{（推移律）}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{n(X_A)=3 \qquad n(Y_A)=3}{n(X_A)\div n(Y_A)=3\div 3}\text{（==）}}{n(X_A)\div n(Y_A)=1}\text{（演推）} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{n(X_B)=2 \qquad n(Y_B)=2}{n(X_B)\div n(Y_B)=2\div 2}\text{（==）}}{n(X_B)\div n(Y_B)=1}\text{（演推）}}{1=n(X_B)\div n(Y_B)}\text{（対称律）}}{n(X_A)\div n(Y_A)=n(X_B)\div n(Y_B)}\text{（推移律）}$$

$$\dfrac{n(X_A)\div n(Y_A)=n(X_B)\div n(Y_B) \qquad \mathbf{n(X_A)\div n(Y_A)=n(X_B)\div n(Y_B)\rightarrow P(X_A)=P(X_B)}}{D_1 : P(X_A)=P(X_B)}\text{（→除）}$$

$n(X_A)=3$，$n(X_B)=2$，$n(Y_A)=3$，$n(Y_B)=2$ の条件から，$n(Y_A)$ に対する $n(X_A)$ の割合 3/3 と $n(Y_B)$ に対する $n(X_B)$ の割合 2/2 を基に，$n(S_A)$ に対する $n(X_A)$ の割合 $3/(3+3)$ と $n(S_B)$ に対する $n(X_B)$ の割合 $2/(2+2)$ を求めることにより，D_1 が導かれる。

$$\dfrac{\dfrac{1=1 \qquad \dfrac{\dfrac{n(X_A)=3 \qquad n(Y_A)=3}{n(X_A)\div n(Y_A)=3\div 3}\text{（==）}}{n(X_A)\div n(Y_A)=1}\text{（演推）}}{1\div(n(X_A)\div n(Y_A))=1\div 1}\text{（==）}}{\dfrac{1\div(n(X_A)\div n(Y_A))=1}{n(Y_A)\div n(X_A)=1}\text{（演推）※1}}\text{（演推）}$$

※1
$1\div(n(X_A)\div n(Y_A))$
$=1\times n(Y_A)\div(n(X_A)\div n(Y_A)\times n(Y_A))$
$=n(Y_A)\div n(X_A)$

$$\dfrac{\dfrac{1=1 \qquad n(Y_A)\div n(X_A)=1}{1+n(Y_A)\div n(X_A)=1+1}\text{（==）}}{(n(X_A)+n(Y_A))\div n(X_A)=1+1}\text{（演推）※2}$$

※2
$1+n(Y_A)\div n(X_A)$
$=n(X_A)\div n(X_A)+n(Y_A)\div n(X_A)$
$=(n(X_A)+n(Y_A))\div n(X_A)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{n(X_A)=3 \qquad (n(X_A)+n(Y_A))\div n(X_A)=1+1}{n(X_A)\times(n(X_A)+n(Y_A))\div n(X_A)=3\times(1+1)}\text{（==）}}{n(X_A)\times(n(X_A)+n(Y_A))\div n(X_A)=3+3}\text{（演推）}}{n(X_A)+n(Y_A)=3+3}\text{（演推）※3}$$

※3
$n(X_A)\times(n(X_A)+n(Y_A))\div n(X_A)$
$=(n(X_A)+n(Y_A))\times n(X_A)\div n(X_A)$
$=(n(X_A)+n(Y_A))\times 1$
$=n(X_A)+n(Y_A)$

$$\dfrac{\text{定理５}:n(S)=n(X)+n(Y) \qquad n(X)=n(X_A) \quad n(Y)=n(Y_A) \quad n(S)=n(S_A)}{n(S_A)=n(X_A)+n(Y_A)}\text{（=代入）}$$

$$\dfrac{n(X_A)=3 \qquad \dfrac{n(X_A)+n(Y_A)=3+3 \qquad \dfrac{n(S_A)=n(X_A)+n(Y_A)}{n(X_A)+n(Y_A)=n(S_A)}\text{（対称律）}}{n(S_A)=3+3}\text{（=代入）}}{n(X_A)\div n(S_A)=3\div(3+3)}\text{（==）}$$

$$\dfrac{\text{定義}:P(Z)=n(Z)\div n(S)\qquad n(Z)=n(X_A)\quad n(S)=n(S_A)\quad P(Z)=P(X_A)}{P(X_A)=n(X_A)\div n(S_A)}\ (=\text{代入})$$

$$\dfrac{\dfrac{n(X_A)\div n(S_A)=3\div(3+3)\qquad \dfrac{P(X_A)=n(X_A)\div n(S_A)}{n(X_A)\div n(S_A)=P(X_A)}\ (\text{対称律})}{P(X_A)=3\div(3+3)}\ (=\text{代入})}{P(X_A)=1/2}\ (\text{演推})$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{1=1\qquad \dfrac{\dfrac{n(X_B)=2\qquad n(Y_B)=2}{n(X_B)\div n(Y_B)=2\div 2}\ (==)}{n(X_B)\div n(Y_B)=1}\ (\text{演推})}{1\div(n(X_B)\div n(Y_B))=1\div 1}\ (==)}{1\div(n(X_B)\div n(Y_B))=1}\ (\text{演推})}{n(Y_B)\div n(X_B)=1}\ (\text{演推})※1$$

※1
$1\div(n(X_B)\div n(Y_B))$
$=1\times n(Y_B)\div(n(X_B)\div n(Y_B)\times n(Y_B))$
$=n(Y_B)\div n(X_B)$

※2
$1+n(Y_B)\div n(X_B)$
$=n(X_B)\div n(X_B)+n(Y_B)\div n(X_B)$
$=(n(X_B)+n(Y_B))\div n(X_B)$

$$\dfrac{\dfrac{1=1\qquad n(Y_B)\div n(X_B)=1}{1+n(Y_B)\div n(X_B)=1+1}\ (==)}{(n(X_B)+n(Y_B))\div n(X_B)=1+1}\ (\text{演推})※2$$

※3
$n(X_B)\times(n(X_B)+n(Y_B))\div n(X_B)$
$=(n(X_B)+n(Y_B))\times n(X_B)\div n(X_B)$
$=(n(X_B)+n(Y_B))\times 1$
$=n(X_B)+n(Y_B)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{n(X_B)=2\qquad (n(X_B)+n(Y_B))\div n(X_B)=1+1}{n(X_B)\times(n(X_B)+n(Y_B))\div n(X_B)=2\times(1+1)}\ (==)}{n(X_B)\times(n(X_B)+n(Y_B))\div n(X_B)=2+2}\ (\text{演推})}{n(X_B)+n(Y_B)=2+2}\ (\text{演推})※3$$

$$\dfrac{\text{定理5}:n(S)=n(X)+n(Y)\qquad n(X)=n(X_B)\quad n(Y)=n(Y_B)\quad n(S)=n(S_B)}{n(S_B)=n(X_B)+n(Y_B)}\ (=\text{代入})$$

$$\dfrac{n(X_B)=2\qquad \dfrac{n(X_B)+n(Y_B)=2+2\qquad \dfrac{n(S_B)=n(X_B)+n(Y_B)}{n(X_B)+n(Y_B)=n(S_B)}\ (\text{対称律})}{n(S_B)=2+2}\ (=\text{代入})}{n(X_B)\div n(S_B)=2\div(2+2)}\ (==)$$

$$\dfrac{\text{定義}:P(Z)=n(Z)\div n(S)\qquad n(Z)=n(X_B)\quad n(S)=n(S_B)\quad P(Z)=P(X_B)}{P(X_B)=n(X_B)\div n(S_B)}\ (=\text{代入})$$

$$\dfrac{\dfrac{n(X_B)\div n(S_B)=2\div(2+2)\qquad \dfrac{P(X_B)=n(X_B)\div n(S_B)}{n(X_B)\div n(S_B)=P(X_B)}\ (\text{対称律})}{P(X_B)=2\div(2+2)}\ (=\text{代入})}{P(X_B)=1/2}\ (\text{演推})$$

$$\dfrac{P(X_A)=1/2\qquad \dfrac{P(X_B)=1/2}{1/2=P(X_B)}\ (\text{対称律})}{D_1:P(X_A)=P(X_B)}\ (\text{推移律})$$

D_2 の条件を満たすように，D_1 となる $n(X_A)=3$，$n(X_B)=2$，$n(Y_A)=3$，$n(Y_B)=2$ の条件を

基に，$n(X_A)$ の項に×２している。

(2) $n(X_A)=6$，$n(X_B)=2$，$n(Y_A)=3$，$n(Y_B)=2$

$$\dfrac{\dfrac{n(X_A)=6 \qquad 6>2}{n(X_A)>2}\,(\text{推移律}) \qquad \dfrac{n(X_B)=2}{2=n(X_B)}\,(\text{対称律})}{B_2 : n(X_A)>n(X_B)}\,(\text{推移律})$$

$$\dfrac{\dfrac{n(Y_A)=3 \qquad 3>2}{n(Y_A)>2}\,(\text{推移律}) \qquad \dfrac{n(Y_B)=2}{2=n(Y_B)}\,(\text{対称律})}{C_2 : n(Y_A)>n(Y_B)}\,(\text{推移律})$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{n(X_A)=6 \qquad n(Y_A)=3}{n(X_A)\div n(Y_A)=6\div 3}\,(==)}{n(X_A)\div n(Y_A)=2}\,(\text{演推}) \qquad 2>1}{n(X_A)\div n(Y_A)>1}\,(\text{推移律}) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{n(X_B)=2 \qquad n(Y_B)=2}{n(X_B)\div n(Y_B)=2\div 2}\,(==)}{n(X_B)\div n(Y_B)=1}\,(\text{演推})}{1=n(X_B)\div n(Y_B)}\,(\text{対称律})}{n(X_A)\div n(Y_A)>n(X_B)\div n(Y_B)}\,(\text{推移律})$$

$$\dfrac{n(X_A)\div n(Y_A)>n(X_B)\div n(Y_B) \qquad \mathbf{n(X_A)\div n(Y_A)>n(X_B)\div n(Y_B)\rightarrow P(X_A)>P(X_B)}}{D_2 : P(X_A)>P(X_B)}\,(\rightarrow\text{除})$$

$n(X_A)=6$，$n(X_B)=2$，$n(Y_A)=3$，$n(Y_B)=2$ の条件から，$n(Y_A)$ に対する $n(X_A)$ の割合 6/3 と $n(Y_B)$ に対する $n(X_B)$ の割合 2/2 を基に，$n(S_A)$ に対する $n(X_A)$ の割合 $6/(6+3)$ と $n(S_B)$ に対する $n(X_B)$ の割合 $2/(2+2)$ を求めることにより，D_2 が導かれる。

$$\dfrac{\dfrac{n(X_A)=6 \qquad \dfrac{\dfrac{1=1 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{1=1 \qquad \dfrac{\dfrac{n(X_A)=6 \qquad n(Y_A)=3}{n(X_A)\div n(Y_A)=6\div 3}\,(==)}{n(X_A)\div n(Y_A)=2}\,(\text{演推})}{1\div(n(X_A)\div n(Y_A))=1\div 2}\,(==)}{1\div(n(X_A)\div n(Y_A))=1/2}\,(\text{演推})}{n(Y_A)\div n(X_A)=1/2}\,(\text{演推})※1}{1+n(Y_A)\div n(X_A)=1+1/2}\,(==)}{(n(X_A)+n(Y_A))\div n(X_A)=1+1/2}\,(\text{演推})※2}{n(X_A)\times(n(X_A)+n(Y_A))\div n(X_A)=6\times(1+1/2)}\,(==)}{\dfrac{n(X_A)\times(n(X_A)+n(Y_A))\div n(X_A)=6+3}{n(X_A)+n(Y_A)=6+3}\,(\text{演推})※3}\,(\text{演推})$$

$$\dfrac{\text{定理５}: n(S)=n(X)+n(Y) \qquad n(X)=n(X_A) \quad n(Y)=n(Y_A) \quad n(S)=n(S_A)}{n(S_A)=n(X_A)+n(Y_A)}\,(=\text{代入})$$

$$\dfrac{n(X_A)=6 \qquad \dfrac{n(X_A)+n(Y_A)=6+3 \qquad \dfrac{n(S_A)=n(X_A)+n(Y_A)}{n(X_A)+n(Y_A)=n(S_A)}\,(\text{対称律})}{n(S_A)=6+3}\,(=\text{代入})}{n(X_A)\div n(S_A)=6\div(6+3)}\,(==)$$

$$\dfrac{\text{定義：}P(Z)=n(Z)\div n(S) \qquad n(Z)=n(X_A) \quad n(S)=n(S_A) \quad P(Z)=P(X_A)}{P(X_A)=n(X_A)\div n(S_A)}\text{（＝代入）}$$

$$\dfrac{\dfrac{n(X_A)\div n(S_A)=6\div(6+3) \qquad \dfrac{P(X_A)=n(X_A)\div n(S_A)}{n(X_A)\div n(S_A)=P(X_A)}\text{（対称律）}}{P(X_A)=6\div(6+3)}\text{（＝代入）}}{P(X_A)=2/3}\text{（演推）}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{n(X_B)=2 \qquad \dfrac{\dfrac{1=1 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{1=1 \qquad \dfrac{\dfrac{n(X_B)=2 \qquad n(Y_B)=2}{n(X_B)\div n(Y_B)=2\div 2}\text{（＝＝）}}{n(X_B)\div n(Y_B)=1}\text{（演推）}}{1\div(n(X_B)\div n(Y_B))=1\div 1}\text{（＝＝）}}{1\div(n(X_B)\div n(Y_B))=1}\text{（演推）}}{n(Y_B)\div n(X_B)=1}\text{（演推）※１}}{1+n(Y_B)\div n(X_B)=1+1}\text{（＝＝）}}{(n(X_B)+n(Y_B))\div n(X_B)=1+1}\text{（演推）※２}}{n(X_B)\times(n(X_B)+n(Y_B))\div n(X_B)=2\times(1+1)}\text{（＝＝）}}{n(X_B)\times(n(X_B)+n(Y_B))\div n(X_B)=2+2}\text{（演推）}}{n(X_B)+n(Y_B)=2+2}\text{（演推）※３}$$

$$\dfrac{\text{定理５：}n(S)=n(X)+n(Y) \qquad n(X)=n(X_B) \quad n(Y)=n(Y_B) \quad n(S)=n(S_B)}{n(S_B)=n(X_B)+n(Y_B)}\text{（＝代入）}$$

$$\dfrac{n(X_B)=2 \qquad \dfrac{n(X_B)+n(Y_B)=2+2 \qquad \dfrac{n(S_B)=n(X_B)+n(Y_B)}{n(X_B)+n(Y_B)=n(S_B)}\text{（対称律）}}{n(S_B)=2+2}\text{（＝代入）}}{n(X_B)\div n(S_B)=2\div(2+2)}\text{（＝＝）}$$

$$\dfrac{\text{定義：}P(Z)=n(Z)\div n(S) \qquad n(Z)=n(X_B) \quad n(S)=n(S_B) \quad P(Z)=P(X_B)}{P(X_B)=n(X_B)\div n(S_B)}\text{（＝代入）}$$

$$\dfrac{\dfrac{n(X_B)\div n(S_B)=2\div(2+2) \qquad \dfrac{P(X_B)=n(X_B)\div n(S_B)}{n(X_B)\div n(S_B)=P(X_B)}\text{（対称律）}}{P(X_B)=2\div(2+2)}\text{（＝代入）}}{P(X_B)=1/2}\text{（演推）}$$

$$\dfrac{\dfrac{P(X_A)=2/3 \qquad 2/3>1/2}{P(X_A)>1/2}\text{（推移律）} \qquad \dfrac{P(X_B)=1/2}{1/2=P(X_B)}\text{（対称律）}}{D_2: P(X_A)>P(X_B)}\text{（推移律）}$$

D_3 の条件を満たすように，D_2 となる $n(X_A)=6$，$n(X_B)=2$，$n(Y_A)=3$，$n(Y_B)=2$ の条件を基に，$n(X_B)$の項に×２すると，$n(X_A)=6$，$n(X_B)=4$，$n(Y_A)=3$，$n(Y_B)=2$ となる。しかし，この条件では D_1 となる。D_3 の条件を満たすように，D_1 となる $n(X_A)=6$，$n(X_B)=4$，$n(Y_A)=3$，$n(Y_B)=2$ の条件を基に，$n(Y_A)$の項に×２している。

(3) $n(X_A)=6$，$n(X_B)=4$，$n(Y_A)=6$，$n(Y_B)=2$

$$\dfrac{\dfrac{n(X_A)=6 \qquad 6>4}{n(X_A)>4}\text{(推移律)} \qquad \dfrac{n(X_B)=4}{4=n(X_B)}\text{(対称律)}}{B_2: n(X_A)>n(X_B)}\text{(推移律)}$$

$$\dfrac{\dfrac{n(Y_A)=6 \qquad 6>2}{n(Y_A)>2}\text{(推移律)} \qquad \dfrac{n(Y_B)=2}{2=n(Y_B)}\text{(対称律)}}{C_2: n(Y_A)>n(Y_B)}\text{(推移律)}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{n(X_A)=6 \qquad n(Y_A)=6}{n(X_A)\div n(Y_A)=6\div 6}\text{(==)}}{n(X_A)\div n(Y_A)=1}\text{(演推)} \qquad 1<2}{n(X_A)\div n(Y_A)<2}\text{(推移律)} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{n(X_B)=4 \qquad n(Y_B)=2}{n(X_B)\div n(Y_B)=4\div 2}\text{(==)}}{n(X_B)\div n(Y_B)=2}\text{(演推)}}{2=n(X_B)\div n(Y_B)}\text{(対称律)}}{n(X_A)\div n(Y_A)<n(X_B)\div n(Y_B)}\text{(推移律)}$$

$$\dfrac{n(X_A)\div n(Y_A)<n(X_B)\div n(Y_B) \qquad \mathbf{n(X_A)\div n(Y_A)<n(X_B)\div n(Y_B)\rightarrow P(X_A)<P(X_B)}}{D_3: P(X_A)<P(X_B)}\text{(→除)}$$

$n(X_A)=6$，$n(X_B)=4$，$n(Y_A)=6$，$n(Y_B)=2$ の条件から，$n(Y_A)$ に対する $n(X_A)$ の割合 6/6 と $n(Y_B)$ に対する $n(X_B)$ の割合 4/2 を基に，$n(S_A)$ に対する $n(X_A)$ の割合 6/(6 + 6) と $n(S_B)$ に対する $n(X_B)$ の割合 4/(4 + 2) を求めることにより，D_3 が導かれる。

$$\dfrac{\dfrac{n(X_A)=6 \qquad \dfrac{\dfrac{1=1 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{1=1 \qquad \dfrac{\dfrac{n(X_A)=6 \qquad n(Y_A)=6}{n(X_A)\div n(Y_A)=6\div 6}\text{(==)}}{n(X_A)\div n(Y_A)=1}\text{(演推)}}{1\div(n(X_A)\div n(Y_A))=1\div 1}\text{(==)}}{1\div(n(X_A)\div n(Y_A))=1}\text{(演推)}}{n(Y_A)\div n(X_A)=1}\text{(演推)※1}}{1+n(Y_A)\div n(X_A)=1+1}\text{(==)}}{(n(X_A)+n(Y_A))\div n(X_A)=1+1}\text{(演推)※2}}{n(X_A)\times(n(X_A)+n(Y_A))\div n(X_A)=6\times(1+1)}\text{(==)}}{\dfrac{n(X_A)\times(n(X_A)+n(Y_A))\div n(X_A)=6+6}{n(X_A)+n(Y_A)=6+6}\text{(演推)※3}}\text{(演推)}$$

$$\dfrac{\text{定理５}: n(S)=n(X)+n(Y) \qquad n(X)=n(X_A) \quad n(Y)=n(Y_A) \quad n(S)=n(S_A)}{n(S_A)=n(X_A)+n(Y_A)}\text{(=代入)}$$

$$\dfrac{n(X_A)=6 \qquad \dfrac{n(X_A)+n(Y_A)=6+6 \qquad \dfrac{n(S_A)=n(X_A)+n(Y_A)}{n(X_A)+n(Y_A)=n(S_A)}\text{(対称律)}}{n(S_A)=6+6}\text{(=代入)}}{n(X_A)\div n(S_A)=6\div(6+6)}\text{(==)}$$

$$\dfrac{\text{定義}: P(Z)=n(Z)\div n(S) \qquad n(Z)=n(X_A) \quad n(S)=n(S_A) \quad P(Z)=P(X_A)}{P(X_A)=n(X_A)\div n(S_A)}\text{(=代入)}$$

$$\dfrac{\dfrac{n(X_A)\div n(S_A)=6\div(6+6) \qquad \dfrac{P(X_A)=n(X_A)\div n(S_A)}{n(X_A)\div n(S_A)=P(X_A)}\text{(対称律)}}{P(X_A)=6\div(6+6)}\text{(＝代入)}}{P(X_A)=1/2}\text{(演推)}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{n(X_B)=4 \qquad \dfrac{\dfrac{1=1 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{1=1 \qquad \dfrac{\dfrac{n(X_B)=4 \quad n(Y_B)=2}{n(X_B)\div n(Y_B)=4\div 2}\text{(==)}}{n(X_B)\div n(Y_B)=2}\text{(演推)}}{1\div(n(X_B)\div n(Y_B))=1\div 2}\text{(==)}}{1\div(n(X_B)\div n(Y_B))=1/2}\text{(演推)}}{n(Y_B)\div n(X_B)=1/2}\text{(演推)※1}}{1+n(Y_B)\div n(X_B)=1+1/2}\text{(==)}}{(n(X_B)+n(Y_B))\div n(X_B)=1+1/2}\text{(演推)※2}}{n(X_B)\times(n(X_B)+n(Y_B))\div n(X_B)=4\times(1+1/2)}\text{(==)}}{n(X_B)\times(n(X_B)+n(Y_B))\div n(X_B)=4+2}\text{(演推)}}{n(X_B)+n(Y_B)=4+2}\text{(演推)※3}$$

$$\dfrac{\text{定理5：}n(S)=n(X)+n(Y) \qquad n(X)=n(X_B) \quad n(Y)=n(Y_B) \quad n(S)=n(S_B)}{n(S_B)=n(X_B)+n(Y_B)}\text{(＝代入)}$$

$$\dfrac{n(X_B)=4 \qquad \dfrac{n(X_B)+n(Y_B)=4+2 \qquad \dfrac{n(S_B)=n(X_B)+n(Y_B)}{n(X_B)+n(Y_B)=n(S_B)}\text{(対称律)}}{n(S_B)=4+2}\text{(＝代入)}}{n(X_B)\div n(S_B)=4\div(4+2)}\text{(==)}$$

$$\dfrac{\text{定義：}P(Z)=n(Z)\div n(S) \qquad n(Z)=n(X_B) \quad n(S)=n(S_B) \quad P(Z)=P(X_B)}{P(X_B)=n(X_B)\div n(S_B)}\text{(＝代入)}$$

$$\dfrac{\dfrac{n(X_B)\div n(S_B)=4\div(4+2) \qquad \dfrac{P(X_B)=n(X_B)\div n(S_B)}{n(X_B)\div n(S_B)=P(X_B)}\text{(対称律)}}{P(X_B)=4\div(4+2)}\text{(＝代入)}}{P(X_B)=2/3}\text{(演推)}$$

$$\dfrac{\dfrac{P(X_A)=1/2 \quad 1/2<2/3}{P(X_A)<2/3}\text{(推移律)} \qquad \dfrac{P(X_B)=2/3}{2/3=P(X_B)}\text{(対称律)}}{D_3：P(X_A)<P(X_B)}\text{(推移律)}$$

水準２の児童は，１つのくじ内において，当たりくじの本数とはずれくじの本数に着目することにより，当たりくじの本数とはずれくじの本数の差を考え，２つのくじの当たりやすさの関係を判断している。また，はずれくじの本数に対する当たりくじの本数の割合やくじの総数に対する当たりくじの本数の割合を考え，２つのくじの当たりやすさの関係を判断している。特に，各くじの当たりくじの本数とはずれくじの本数の具体的な数値を自ら設定することにより，２つのくじの当たりやすさの関係を判断している場合は，概念的知識と手続き的知識が同時活性化していると考えられる。

3.2.2　比較量に関する状況

(1)調査問題

割合に関する概念的知識の「比較量に関する状況」の調査問題は，以下の問題例のように仮定の候補及び結論からなる。仮定の候補には，基準量(はずれくじ)に関する条件，割合(当たりやすさ)に関する条件，くじ全体に関する条件が含まれる。

〔問題例〕

くじ引きで，「当たりくじの数」と「はずれくじの数」を合わせたくじの数を「全体のくじの数」とします。くじ引きで，「当たりくじ」が出やすいことを「当たりやすい」と言います。

「当たりくじ」と「はずれくじ」の入った２つのくじ A，B があります。

くじ A とくじ B の「全体のくじの数」は同じです。
くじ B は，くじ A より「はずれくじ」が多く入っています。　【仮定の候補】
くじを１本ずつ引くとき，くじ A を引く方がくじ B を引くより「当たりやすい」です。

くじ A とくじ B のどちらのくじの方が「当たりくじ」が多く入っていますか。または，くじ A もくじ B も「当たりくじ」が同じだけ入っていますか。正しいと思う□の中に○をつけなさい。ただし，問題の中には，全ての□に○をつける問題もあります。

□	□	□	
くじ A の方が「当たりくじ」が多く入っている	くじ A も B も「当たりくじ」が同じだけ入っている	くじ B の方が「当たりくじ」が多く入っている	【結論】

割合に関する概念的知識の「比較量に関する状況」の調査問題は，６つの問題から構成されている。その内，５つの問題(問題１，問題２，問題４，問題５，問題６)は正答が１つに定まる問題である。もう１つの問題(問題３)は正答が１つに定まらない問題である。そこで，正答が１つに定まる問題に関して，仮定の候補から命題論理により証明されるれる定理と結論としての条件を示す。ここでは，問題１の証明を行う。問題１には(Ⅰ)，(Ⅱ)の２つの考え方があるが，(Ⅰ)の考え方について示す。問題１の(Ⅱ)の考え方，問題２，問題４，問題５，問題６の詳細な証明は付録４に掲載。

【問題１】

仮定の候補	定理	結論
A_1 C_3 D_2	(Ⅰ)$A_1 \wedge D_2 \rightarrow C_3$ (Ⅱ)$A_1 \wedge C_3 \rightarrow D_2$	B_2
証明		
(Ⅰ)　$\dfrac{A_1 : \mathrm{n}(\mathrm{S_A}) = \mathrm{n}(\mathrm{S_B}) \qquad D_2 : \mathrm{P}(\mathrm{X_A}) > \mathrm{P}(\mathrm{X_B})}{\mathrm{n}(\mathrm{S_A}) \times \mathrm{P}(\mathrm{X_A}) > \mathrm{n}(\mathrm{S_B}) \times \mathrm{P}(\mathrm{X_B})}$ (＞＝１)		

$$\dfrac{\dfrac{\text{定理３：}n(Z)=n(S)\times P(Z)\qquad n(Z)=n(X_A)\quad n(S)=n(S_A)\quad P(Z)=P(X_A)}{n(X_A)=n(S_A)\times P(X_A)}\text{（＝代入）}}{n(S_A)\times P(X_A)=n(X_A)}\text{（対称律）}$$

$$\dfrac{\dfrac{\text{定理３：}n(Z)=n(S)\times P(Z)\qquad n(Z)=n(X_B)\quad n(S)=n(S_B)\quad P(Z)=P(X_B)}{n(X_B)=n(S_B)\times P(X_B)}\text{（＝代入）}}{n(S_B)\times P(X_B)=n(X_B)}\text{（対称律）}$$

$$\dfrac{n(S_A)\times P(X_A)>n(S_B)\times P(X_B)\qquad n(S_A)\times P(X_A)=n(X_A)\quad n(S_B)\times P(X_B)=n(X_B)}{B_2:n(X_A)>n(X_B)}\text{（＝代入）}$$

$$\dfrac{A_1:n(S_A)=n(S_B)\qquad B_2:n(X_A)>n(X_B)}{n(S_A)-n(X_A)<n(S_B)-n(X_B)}\text{（＞＝２）}$$

$$\dfrac{\dfrac{\text{定理６：}n(Y)=n(S)-n(X)\qquad n(X)=n(X_A)\quad n(Y)=n(Y_A)\quad n(S)=n(S_A)}{n(Y_A)=n(S_A)-n(X_A)}\text{（＝代入）}}{n(S_A)-n(X_A)=n(Y_A)}\text{（対称律）}$$

$$\dfrac{\dfrac{\text{定理６：}n(Y)=n(S)-n(X)\qquad n(X)=n(X_B)\quad n(Y)=n(Y_B)\quad n(S)=n(S_B)}{n(Y_B)=n(S_B)-n(X_B)}\text{（＝代入）}}{n(S_B)-n(X_B)=n(Y_B)}\text{（対称律）}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{n(S_A)-n(X_A)<n(S_B)-n(X_B)\qquad n(S_A)-n(X_A)=n(Y_A)\quad n(S_B)-n(X_B)=n(Y_B)}{C_3:n(Y_A)<n(Y_B)}\text{（＝代入）}}{D_2\rightarrow C_3}\text{（→入）}}{A_1\rightarrow(D_2\rightarrow C_3)}\text{（→入）}}{A_1\wedge D_2\rightarrow C_3}\text{（移入）}$$

仮定の候補の内，矛盾した条件はない。A_1 と D_2 を仮定する場合，C_3 は仮定として必要ない。

（Ｉ）

$$\dfrac{A_1:n(S_A)=n(S_B)\qquad D_2:P(X_A)>P(X_B)}{n(S_A)\times P(X_A)>n(S_B)\times P(X_B)}\text{（＞＝１）}$$

$$\dfrac{\dfrac{\text{定理３：}n(Z)=n(S)\times P(Z)\qquad n(Z)=n(X_A)\quad n(S)=n(S_A)\quad P(Z)=P(X_A)}{n(X_A)=n(S_A)\times P(X_A)}\text{（＝代入）}}{n(S_A)\times P(X_A)=n(X_A)}\text{（対称律）}$$

$$\dfrac{\dfrac{\text{定理３：}n(Z)=n(S)\times P(Z)\qquad n(Z)=n(X_B)\quad n(S)=n(S_B)\quad P(Z)=P(X_B)}{n(X_B)=n(S_B)\times P(X_B)}\text{（＝代入）}}{n(S_B)\times P(X_B)=n(X_B)}\text{（対称律）}$$

$$\dfrac{n(S_A)\times P(X_A)>n(S_B)\times P(X_B)\qquad n(S_A)\times P(X_A)=n(X_A)\quad n(S_B)\times P(X_B)=n(X_B)}{B_2:n(X_A)>n(X_B)}\text{（＝代入）}$$

A_1 と D_2 を仮定し，結論として証明されるのは，B_2 である。

正答が１つに定まらない問題に関して，「割合に関する状況」と同様に，仮定の候補を満たす具体的な数値を仮定し，述語論理により結論として証明される条件を示す。具体的な数値を決定する過程を示した考え方の例は付録５に掲載。

【問題３】

仮定の候補	定理
$\neg A_1$ C_2 D_3	

結論

$$
\begin{aligned}
&(\exists x \exists y \exists z \exists w\ [n(Y_A) = x \land n(Y_B) = y \land x > y \\
&\qquad \land n(S_A) = z \land n(S_B) = w \land z > w \\
&\qquad \land P(X_A) = (z - x)/z \land P(X_B) = (w - y)/w \land (z - x)/z < (w - y)/w \\
&\qquad \land n(X_A) = z - x \land n(X_B) = w - y \land z - x = w - y]) \\
&\land (\exists x' \exists y' \exists z' \exists w'\ [n(Y_A) = x' \land n(Y_B) = y' \land x' > y' \\
&\qquad \land n(S_A) = z' \land n(S_B) = w' \land z' > w' \\
&\qquad \land P(X_A) = (z' - x')/z' \land P(X_B) = (w' - y')/w' \land (z' - x')/z' < (w' - y')/w' \\
&\qquad \land n(X_A) = z' - x' \land n(X_B) = w' - y' \land z' - x' > w' - y']) \\
&\land (\exists x'' \exists y'' \exists z'' \exists w''\ [n(Y_A) = x'' \land n(Y_B) = y'' \land x'' > y'' \\
&\qquad \land n(S_A) = z'' \land n(S_B) = w'' \land z'' > w'' \\
&\qquad \land P(X_A) = (z'' - x'')/z'' \land P(X_B) = (w'' - y'')/w'' \land (z'' - x'')/z'' < (w'' - y'')/w'' \\
&\qquad \land n(X_A) = z'' - x'' \land n(X_B) = w'' - y'' \land z'' - x'' < w'' - y''])
\end{aligned}
$$

証明

$$\dfrac{\neg A_1 \qquad \dfrac{\dfrac{\neg A_1 \equiv A_2 \underline{\lor} A_3}{\neg A_1 \equiv A_2 \lor A_3}\,(\underline{\lor} \to \lor)}{\neg A_1 \to A_2 \lor A_3}\,(\equiv\text{除})}{A_2 \lor A_3}\,(\to\text{除})$$

A_2 と A_3 の２つの場合に分けて考える。

A_2の場合

$$\dfrac{1 = 1 \qquad D_3 : P(X_A) < P(X_B)}{1 - P(X_A) > 1 - P(X_B)}\,(> = 2)$$

$$\dfrac{\text{定理１}: P(Y) = 1 - P(X) \qquad P(X) = P(X_A) \quad P(Y) = P(Y_A)}{\dfrac{P(Y_A) = 1 - P(X_A)}{1 - P(X_A) = P(Y_A)}\,(\text{対称律})}\,(=\text{代入})$$

$$\dfrac{\text{定理１}: P(Y) = 1 - P(X) \qquad P(X) = P(X_B) \quad P(Y) = P(Y_B)}{\dfrac{P(Y_B) = 1 - P(X_B)}{1 - P(X_B) = P(Y_B)}\,(\text{対称律})}\,(=\text{代入})$$

$$\dfrac{1 - P(X_A) > 1 - P(X_B) \qquad 1 - P(X_A) = P(Y_A) \quad 1 - P(X_B) = P(Y_B)}{E_2 : P(Y_A) > P(Y_B)}\,(=\text{代入})$$

$$\frac{A_2 : \mathrm{n}(\mathrm{S_A}) > \mathrm{n}(\mathrm{S_B}) \qquad E_2 : \mathrm{P}(\mathrm{Y_A}) > \mathrm{P}(\mathrm{Y_B})}{\mathrm{n}(\mathrm{S_A}) \times \mathrm{P}(\mathrm{Y_A}) > \mathrm{n}(\mathrm{S_B}) \times \mathrm{P}(\mathrm{Y_B})}\ (>>1)$$

$$\dfrac{\dfrac{\text{定理３：}\mathrm{n}(\mathrm{Z}) = \mathrm{n}(\mathrm{S}) \times \mathrm{P}(\mathrm{Z}) \qquad \mathrm{n}(\mathrm{Z}) = \mathrm{n}(\mathrm{Y_A}) \quad \mathrm{n}(\mathrm{S}) = \mathrm{n}(\mathrm{S_A}) \quad \mathrm{P}(\mathrm{Z}) = \mathrm{P}(\mathrm{Y_A})}{\mathrm{n}(\mathrm{Y_A}) = \mathrm{n}(\mathrm{S_A}) \times \mathrm{P}(\mathrm{Y_A})}\ (\text{＝代入})}{\mathrm{n}(\mathrm{S_A}) \times \mathrm{P}(\mathrm{Y_A}) = \mathrm{n}(\mathrm{Y_A})}\ (\text{対称律})$$

$$\dfrac{\dfrac{\text{定理３：}\mathrm{n}(\mathrm{Z}) = \mathrm{n}(\mathrm{S}) \times \mathrm{P}(\mathrm{Z}) \qquad \mathrm{n}(\mathrm{Z}) = \mathrm{n}(\mathrm{Y_B}) \quad \mathrm{n}(\mathrm{S}) = \mathrm{n}(\mathrm{S_B}) \quad \mathrm{P}(\mathrm{Z}) = \mathrm{P}(\mathrm{Y_B})}{\mathrm{n}(\mathrm{Y_B}) = \mathrm{n}(\mathrm{S_B}) \times \mathrm{P}(\mathrm{Y_B})}\ (\text{＝代入})}{\mathrm{n}(\mathrm{S_B}) \times \mathrm{P}(\mathrm{Y_B}) = \mathrm{n}(\mathrm{Y_B})}\ (\text{対称律})$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathrm{n}(\mathrm{S_A}) \times \mathrm{P}(\mathrm{Y_A}) > \mathrm{n}(\mathrm{S_B}) \times \mathrm{P}(\mathrm{Y_B}) \qquad \mathrm{n}(\mathrm{S_A}) \times \mathrm{P}(\mathrm{Y_A}) = \mathrm{n}(\mathrm{Y_A}) \quad \mathrm{n}(\mathrm{S_B}) \times \mathrm{P}(\mathrm{Y_B}) = \mathrm{n}(\mathrm{Y_B})}{C_2 : \mathrm{n}(\mathrm{Y_A}) > \mathrm{n}(\mathrm{Y_B})}\ (\text{＝代入})}{D_3 \to C_2}\ (\to\text{入})}{A_2 \to (D_3 \to C_2)}\ (\to\text{入})}{A_2 \wedge D_3 \to C_2}\ (\text{移入})$$

A_3の場合

$$\dfrac{C_2 : \mathrm{n}(\mathrm{Y_A}) > \mathrm{n}(\mathrm{Y_B}) \qquad \dfrac{A_3 : \mathrm{n}(\mathrm{S_A}) < \mathrm{n}(\mathrm{S_B})}{\mathrm{n}(\mathrm{S_B}) > \mathrm{n}(\mathrm{S_A})}\ (<>)}{\mathrm{n}(\mathrm{Y_A}) \div \mathrm{n}(\mathrm{S_A}) > \mathrm{n}(\mathrm{Y_B}) \div \mathrm{n}(\mathrm{S_B})}\ (>>2)$$

$$\dfrac{\dfrac{\text{定義：}\mathrm{P}(\mathrm{Z}) = \mathrm{n}(\mathrm{Z}) \div \mathrm{n}(\mathrm{S}) \qquad \mathrm{n}(\mathrm{Z}) = \mathrm{n}(\mathrm{Y_A}) \quad \mathrm{n}(\mathrm{S}) = \mathrm{n}(\mathrm{S_A}) \quad \mathrm{P}(\mathrm{Z}) = \mathrm{P}(\mathrm{Y_A})}{\mathrm{P}(\mathrm{Y_A}) = \mathrm{n}(\mathrm{Y_A}) \div \mathrm{n}(\mathrm{S_A})}\ (\text{＝代入})}{\mathrm{n}(\mathrm{Y_A}) \div \mathrm{n}(\mathrm{S_A}) = \mathrm{P}(\mathrm{Y_A})}\ (\text{対称律})$$

$$\dfrac{\dfrac{\text{定義：}\mathrm{P}(\mathrm{Z}) = \mathrm{n}(\mathrm{Z}) \div \mathrm{n}(\mathrm{S}) \qquad \mathrm{n}(\mathrm{Z}) = \mathrm{n}(\mathrm{Y_B}) \quad \mathrm{n}(\mathrm{S}) = \mathrm{n}(\mathrm{S_B}) \quad \mathrm{P}(\mathrm{Z}) = \mathrm{P}(\mathrm{Y_B})}{\mathrm{P}(\mathrm{Y_B}) = \mathrm{n}(\mathrm{Y_B}) \div \mathrm{n}(\mathrm{S_B})}\ (\text{＝代入})}{\mathrm{n}(\mathrm{Y_B}) \div \mathrm{n}(\mathrm{S_B}) = \mathrm{P}(\mathrm{Y_B})}\ (\text{対称律})$$

$$\frac{\mathrm{n}(\mathrm{Y_A}) \div \mathrm{n}(\mathrm{S_A}) > \mathrm{n}(\mathrm{Y_B}) \div \mathrm{n}(\mathrm{S_B}) \qquad \mathrm{n}(\mathrm{Y_A}) \div \mathrm{n}(\mathrm{S_A}) = \mathrm{P}(\mathrm{Y_A}) \quad \mathrm{n}(\mathrm{Y_B}) \div \mathrm{n}(\mathrm{S_B}) = \mathrm{P}(\mathrm{Y_B})}{E_2 : \mathrm{P}(\mathrm{Y_A}) > \mathrm{P}(\mathrm{Y_B})}\ (\text{＝代入})$$

$$\frac{1 = 1 \qquad E_2 : \mathrm{P}(\mathrm{Y_A}) > \mathrm{P}(\mathrm{Y_B})}{1 - \mathrm{P}(\mathrm{Y_A}) < 1 - \mathrm{P}(\mathrm{Y_B})}\ (>=2)$$

$$\dfrac{\dfrac{\text{定理２：}\mathrm{P}(\mathrm{X}) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{Y}) \qquad \mathrm{P}(\mathrm{X}) = \mathrm{P}(\mathrm{X_A}) \quad \mathrm{P}(\mathrm{Y}) = \mathrm{P}(\mathrm{Y_A})}{\mathrm{P}(\mathrm{X_A}) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{Y_A})}\ (\text{＝代入})}{1 - \mathrm{P}(\mathrm{Y_A}) = \mathrm{P}(\mathrm{X_A})}\ (\text{対称律})$$

$$\dfrac{\dfrac{\text{定理２：}\mathrm{P}(\mathrm{X}) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{Y}) \qquad \mathrm{P}(\mathrm{X}) = \mathrm{P}(\mathrm{X_B}) \quad \mathrm{P}(\mathrm{Y}) = \mathrm{P}(\mathrm{Y_B})}{\mathrm{P}(\mathrm{X_B}) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{Y_B})}\ (\text{＝代入})}{1 - \mathrm{P}(\mathrm{Y_B}) = \mathrm{P}(\mathrm{X_B})}\ (\text{対称律})$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{1-P(Y_A)<1-P(Y_B) \qquad 1-P(Y_A)=P(X_A) \qquad 1-P(Y_B)=P(X_B)}{D_3:P(X_A)<P(X_B)}\ (=\text{代入})}{C_2\to D_3}\ (\to\text{入})}{A_3\to(C_2\to D_3)}\ (\to\text{入})}{A_3\wedge C_2\to D_3}\ (\text{移入})$$

仮定の候補の内，矛盾した条件はない。

$$\dfrac{n(Y_A)=2 \quad n(Y_B)=1 \quad n(S_A)=3 \quad n(S_B)=2 \quad 2>1 \quad 3>2 \quad (3\text{-}2)/3<(2\text{-}1)/2 \quad 3\text{-}2=2\text{-}1}{\begin{aligned}\exists x\exists y\exists z\exists w\ [&n(Y_A)=x\wedge n(Y_B)=y\wedge x>y\\ &\wedge n(S_A)=z\wedge n(S_B)=w\wedge z>w\\ &\wedge P(X_A)=(z-x)/z\wedge P(X_B)=(w-y)/w\wedge(z-x)/z<(w-y)/w\\ &\wedge n(X_A)=z-x\wedge n(X_B)=w-y\wedge z-x=w-y]\ \cdots ⓐ\end{aligned}}\ (\exists\exists\text{入})$$

$$\dfrac{n(Y_A)=3 \quad n(Y_B)=1 \quad n(S_A)=5 \quad n(S_B)=2 \quad 3>1 \quad 5>2 \quad (5\text{-}3)/5<(2\text{-}1)/2 \quad 5\text{-}3>2\text{-}1}{\begin{aligned}\exists x'\exists y'\exists z'\exists w'\ [&n(Y_A)=x'\wedge n(Y_B)=y'\wedge x'>y'\\ &\wedge n(S_A)=z'\wedge n(S_B)=w'\wedge z'>w'\\ &\wedge P(X_A)=(z'-x')/z'\wedge P(X_B)=(w'-y')/w'\wedge(z'-x')/z'<(w'-y')/w'\\ &\wedge n(X_A)=z'-x'\wedge n(X_B)=w'-y'\wedge z'-x'>w'-y']\ \cdots ⓑ\end{aligned}}\ (\exists\exists\text{入})$$

$$\dfrac{n(Y_A)=3 \quad n(Y_B)=1 \quad n(S_A)=4 \quad n(S_B)=3 \quad 3>1 \quad 4>3 \quad (4\text{-}3)/4<(3\text{-}1)/3 \quad 4\text{-}3<3\text{-}1}{\begin{aligned}\exists x''\exists y''\exists z''\exists w''\ [&n(Y_A)=x''\wedge n(Y_B)=y''\wedge x''>y''\\ &\wedge n(S_A)=z''\wedge n(S_B)=w''\wedge z''>w''\\ &\wedge P(X_A)=(z''-x'')/z''\wedge P(X_B)=(w''-y'')/w''\wedge(z''-x'')/z''<(w''-y'')/w''\\ &\wedge n(X_A)=z''-x''\wedge n(X_B)=w''-y''\wedge z''-x''<w''-y'']\ \cdots ⓒ\end{aligned}}\ (\exists\exists\text{入})$$

$$\dfrac{ⓐ \qquad ⓑ \qquad ⓒ}{\begin{aligned}&(\exists x\exists y\exists z\exists w\ [n(Y_A)=x\wedge n(Y_B)=y\wedge x>y\\ &\qquad\wedge n(S_A)=z\wedge n(S_B)=w\wedge z>w\\ &\qquad\wedge P(X_A)=(z-x)/z\wedge P(X_B)=(w-y)/w\wedge(z-x)/z<(w-y)/w\\ &\qquad\wedge n(X_A)=z-x\wedge n(X_B)=w-y\wedge z-x=w-y])\\ &\wedge(\exists x'\exists y'\exists z'\exists w'\ [n(Y_A)=x'\wedge n(Y_B)=y'\wedge x'>y'\\ &\qquad\wedge n(S_A)=z'\wedge n(S_B)=w'\wedge z'>w'\\ &\qquad\wedge P(X_A)=(z'-x')/z'\wedge P(X_B)=(w'-y')/w'\wedge(z'-x')/z'<(w'-y')/w'\\ &\qquad\wedge n(X_A)=z'-x'\wedge n(X_B)=w'-y'\wedge z'-x'>w'-y'])\\ &\wedge(\exists x''\exists y''\exists z''\exists w''\ [n(Y_A)=x''\wedge n(Y_B)=y''\wedge x''>y''\\ &\qquad\wedge n(S_A)=z''\wedge n(S_B)=w''\wedge z''>w''\\ &\qquad\wedge P(X_A)=(z''-x'')/z''\wedge P(X_B)=(w''-y'')/w''\wedge(z''-x'')/z''<(w''-y'')/w''\\ &\qquad\wedge n(X_A)=z''-x''\wedge n(X_B)=w''-y''\wedge z''-x''<w''-y''])\end{aligned}}\ (\wedge\wedge\text{入})$$

結論として，$\neg A_1$，C_2，D_3 及び B_1，$\neg A_1$，C_2，D_3 及び B_2，$\neg A_1$，C_2，D_3 及び B_3 のそれぞれを満たす $n(Y_A)$，$n(Y_B)$，$n(S_A)$，$n(S_B)$ が存在することが証明される。

(2) 調査対象

第５学年の児童 117 名，第６学年の児童 114 名，計 231 名の児童を対象に調査を実施した。第５学年の児童は「割合」の単元が未習であり，第６学年の児童は「割合」の単元が既習である。

(3) 調査結果の分析と考察

1) 水準区分と段階区分

調査問題が妥当であるかどうかを調べるために，スケログラム分析を行った。区分線を引いた児童の正誤パターンの一部及び合計得点，エラー，各問題の正答数，誤答数，正答数と誤答数の合計，正答率，誤答率を表 3-14 に示す。

表3-14　割合に関する概念的知識の「比較量に関する状況」の児童の正誤パターン

児童番号	問題２	問題１	問題６	問題４	問題５	問題３	合計得点	エラー
5002	0	0	0	0	0	0	0	0
5046	0	0	0	0	0	0	0	0
5057	0	0	0	0	0	0	0	0
5006	0	1	0	0	0	0	1	1
5043	0	1	0	0	0	0	1	1
6089	0	1	0	0	0	0	1	1
5005	1	0	0	0	0	0	1	0
5013	1	0	0	0	0	0	1	0
5021	1	0	0	0	0	0	1	0
6009	1	0	1	0	0	0	2	1
6044	1	0	1	0	0	0	2	1
6049	1	0	1	0	0	0	2	1
5054	0	1	0	1	0	0	2	2
6048	0	1	0	1	0	0	2	2
5004	1	1	0	0	0	0	2	0
5101	1	1	0	0	1	0	3	1
5102	1	1	0	0	1	0	3	1
6064	1	1	0	0	1	0	3	1
5077	1	1	1	0	0	0	3	0
5079	1	1	1	0	0	0	3	0
5091	1	1	1	0	0	0	3	0
6034	1	1	1	0	0	0	3	0
6035	1	1	1	0	0	0	3	0
6039	1	1	1	0	0	0	3	0
5012	0	1	1	1	0	0	3	1
6052	0	1	0	1	1	0	3	3
5023	1	0	1	1	0	0	3	1
6065	1	1	1	1	0	0	4	0
6066	1	1	1	1	0	0	4	0
6067	1	1	1	1	0	0	4	0
5001	1	0	1	1	1	0	4	1
6020	1	0	1	1	1	0	4	1
5019	1	1	0	1	1	0	4	1
6112	1	1	1	1	1	0	5	0
6113	1	1	1	1	1	0	5	0
6114	1	1	1	1	1	0	5	0
6037	1	0	1	1	1	1	5	1

6103	1	0	1	1	1	1	5	1
6094	1	1	1	1	0	1	5	1
6095	1	1	1	1	1	1	6	0
6096	1	1	1	1	1	1	6	0
6097	1	1	1	1	1	1	6	0
正答数	204	180	164	139	79	18	エラー数の合計：61	
誤答数	27	51	67	92	152	213		
合計	231	231	231	231	231	231		
正答率	0.883	0.779	0.710	0.602	0.342	0.078		
誤答率	0.117	0.221	0.290	0.398	0.658	0.992		

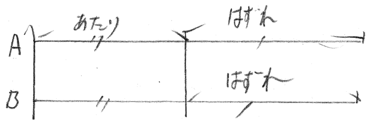
表 3-14 を基に，再現性係数(CR)，最小限界再現性係数(MMR)，正比率(PPR)を算出すると，CR ＝ 0.956，MMR ＝ 0.759，PPR ＝ 0.817 であった。CR ＞ 0.9，MMR ＜ 0.8，PPR ＞ 0.7 であるので，調査問題の妥当性は保証された。さらに，表 3-14 を基に，Kuder-Richardson の信頼性係数 α_{20} を算出すると，α_{20} ＝ 0.701 であった。α_{20} ＞ 0.7 であるので，調査問題の信頼性は保証された。そこで，各問題における児童の考え方に関してプロトコル分析を行った結果，表 3-14 における児童番号 5002 から児童番号 6089, 児童番号 5005 から児童番号 6064, 児童番号 5077 から児童番号 6067, 児童番号 5001 から児童番号 6097 に属する児童の考え方には，それぞれ特徴があった。児童の考え方の構造的変化としての水準及び水準内における児童の考え方の質的変化としての段階という観点から，表 3-15 に示す水準及び段階の区分を行った。また，各水準及び段階における典型的なプロトコルを示す。

【水準区分】
水準０：比較に関する考えの欠如
水準１：２つのくじ間における相等または大小に基づいた加法的な考えによる比較
水準２：１つのくじ内における割合に基づいた乗法的な考えによる比較
【水準１内における段階区分】
段階 1A：はずれくじの本数に着目
段階 1B：はずれくじの本数と当たりやすさに着目

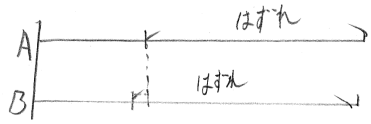
表3-15　割合に関する概念的知識の「比較量に関する状況」の水準区分と段階区分

水準	段階	調査問題	仮定	正答	正答数
0					
1	1A	問題２	A_1，C_1，D_1	B_1	204
		問題１	A_1，C_3，D_2	B_2	180
	1B	問題６	$\neg A_1$，C_1，D_2	B_2	164
		問題４	$\neg A_1$，C_2，D_2	B_2	139
2		問題５	$\neg A_1$，C_2，D_1	B_2	79
		問題３	$\neg A_1$，C_2，D_3	B_1，B_2，B_3	18

①水準０
〔５年児童 KH 〕
問題２：「何となく。」【誤答】
②水準１(段階1A)
〔５年児童 YS 〕
問題２：「くじ全体の数が同じで，はずれくじが同じだから，当たりくじも同じ。」【正答】



問題１：「くじ全体の数が同じだけど，はずれくじが少ないくじ A の方が当たりくじが多い。」【正答】

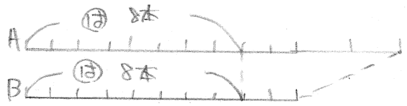


問題６：「はずれくじが同じだから，当たりくじも同じ。」【誤答】

③水準１(段階1B)

〔６年児童 HT 〕

問題６：「はずれくじが同じだから，当たりやすいくじ A の方が当たりくじが多い。」【正答】



問題４：「くじ A の方が当たりやすいから，当たりくじが多い。」【正答】

問題５：「当たりやすさが同じだから，はずれくじの少ないくじ B の方が当たりくじが多い。」【誤答】

④水準２

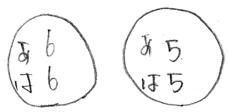
〔６年児童 TS 〕

問題５：「くじ A ははずれくじが多いから，同じだけ当たりやすくなるためには，当たりくじも多くなっていればいい。」【正答】

問題３：「くじ A の方がはずれくじが多いから，くじ B の方が当たりやすくなるためには，くじ B の方が当たりくじが多いか，当たりくじが同じでもいい。くじ A の方が当たりくじもはずれくじも多くて，くじ B の方が当たりくじもはずれくじも少なくても，くじ B の方が当たりやすいから，くじ A は当たりくじがはずれくじより少なくなっていればいいし，くじ B は当たりくじがはずれくじより多くなっていればいい。」【正答】

〔６年児童 MH 〕

問題５：「同じだけ当たりやすいから，くじ A のはずれくじが多い分，当たりくじも多くなる。どっちも，当たりくじの割合が１倍。」【正答】



問題３：「当たりくじがはずれくじより多く入ってると当たりやすいから，くじ A の当たりが４本ではずれが６本，くじ B の当たりが４本ではずれが２本なら，くじ A の方がはずれくじが多いし，くじ B の方が当たりやすくなる。くじ A の当たりが４本ではずれが６本，くじ B の当たりが３本ではずれが２本でも，くじ A の方がはずれくじが多いし，くじ B の方が当たりやすくなる。くじ A の当たりが４本ではずれが６本，くじ B の当たりが５本ではずれが２本でも，くじ A の方がはずれくじが多いし，くじ B の方が当たりやすくなる。だから，当たりくじが同じときもあるし，くじ A の方が多いときもあるし，くじ B の方が多いときもある。」【正答】

〔６年児童 KK 〕

問題５：「同じだけ当たりやすいから，くじ全体の中の当たりくじの割合が同じだし，くじ全体の中のはずれくじの割合が同じ。くじ A の方がはずれくじが多いから，当たりくじも多い。」【正答】

問題３：「もし，当たりくじが 10 本と 10 本で同じだったら，くじ B のはずれくじが少ないから，10 本と５本とすると，くじ B が当たりやすくなる。もし，当たりくじが 10 本と 20 本でくじ A が少なかったら，くじ B のはずれくじが少ないから，10 本と５本とすると，くじ B が当たりやすくなる。もし，当たりくじ 15 本と 10 本でくじ A が多かったら，くじ B のはずれくじが少ないから，10 本と５本とすると，くじ B が当たりやすくなる。くじ全体の中の当たりくじ

の割合が高いくじＢが当たりやすくなる。」【正答】

2)典型的なプロトコルの記号化

各水準及び段階に属する児童が行った推論の記号化を行う。また，各水準及び段階の典型的なプロトコルにおける児童固有の考えについて考察した内容を示す。児童固有の考えは，推論図式において強調表示している。水準２には（Ⅰ），（Ⅱ），（Ⅲ）の３つの考え方があるが，ここでは（Ⅰ）の考え方について示す。（Ⅱ），（Ⅲ）の考え方は付録６に掲載。

①水準０

<table>
<tr><td>調査問題</td><td>仮定の候補</td><td>正答</td><td>結論</td><td>正誤</td></tr>
<tr><td>問題２</td><td>A_1
C_1
D_1</td><td>B_1</td><td>B_2</td><td>誤答</td></tr>
<tr><td colspan="5">児童の考え方</td></tr>
<tr><td colspan="5"></td></tr>
</table>

水準０の児童は，２つのくじの当たりくじの本数の関係を判断するために，２つのくじの総数，はずれくじの本数，当たりやすさのいずれにも着目していない。これは，くじを引くという場面及び当たりやすさに関する理解が不足していることに起因すると考えられる。

②水準１（段階1A）

<table>
<tr><td>調査問題</td><td>仮定の候補</td><td>正答</td><td>結論</td><td>正誤</td></tr>
<tr><td>問題２</td><td>A_1
C_1
D_1</td><td>B_1</td><td>B_1</td><td>正答</td></tr>
<tr><td colspan="5">児童の考え方</td></tr>
<tr><td colspan="5">$$\frac{C_1 : \mathrm{n}(Y_A)=\mathrm{n}(Y_B) \qquad \mathbf{n(Y_A)=n(Y_B)\to n(X_A)=n(X_B)}}{B_1 : \mathrm{n}(X_A)=\mathrm{n}(X_B)}\ (\to除)$$</td></tr>
<tr><td>調査問題</td><td>仮定</td><td>正答</td><td>結論</td><td>正誤</td></tr>
<tr><td>問題１</td><td>A_1
C_3
D_2</td><td>B_2</td><td>B_2</td><td>正答</td></tr>
<tr><td colspan="5">児童の考え方</td></tr>
<tr><td colspan="5">$$\frac{C_3 : \mathrm{n}(Y_A)<\mathrm{n}(Y_B) \qquad \mathbf{n(Y_A)<n(Y_B)\to n(X_A)>n(X_B)}}{B_2 : \mathrm{n}(X_A)>\mathrm{n}(X_B)}\ (\to除)$$</td></tr>
<tr><td>調査問題</td><td>仮定</td><td>正答</td><td>結論</td><td></td></tr>
<tr><td>問題６</td><td>$\neg A_1$
C_1
D_2</td><td>B_2</td><td>B_1</td><td>誤答</td></tr>
<tr><td colspan="5">児童の考え方</td></tr>
<tr><td colspan="5">$$\frac{C_1 : \mathrm{n}(Y_A)=\mathrm{n}(Y_B) \qquad \mathbf{n(Y_A)=n(Y_B)\to n(X_A)=n(X_B)}}{B_1 : \mathrm{n}(X_A)=\mathrm{n}(X_B)}\ (\to除)$$</td></tr>
</table>

水準１（段階 1A）の児童は，２つのくじの総数について記述しているが，２つのくじのはずれくじ

の本数だけに着目し，「はずれくじの本数が同じなら，当たりくじの本数も同じ」，「はずれくじの本数が少ないなら，当たりくじの本数が多い」という考えに基づいて，２つのくじの当たりくじの本数の関係を判断しており，２つのくじの総数や当たりやすさを考慮していない。

③水準１(段階1B)

調査問題	仮定	正答	結論	正誤
問題６	$\neg A_1$ C_1 D_2	B_2	B_2	正答

児童の考え方

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{C_1 \quad D_2}{C_1 \land D_2}(\land入)}{D_2 : \mathrm{P}(\mathrm{X_A}) > \mathrm{P}(\mathrm{X_B})}(\land除) \qquad \mathrm{P}(\mathrm{X_A}) > \mathrm{P}(\mathrm{X_B}) \to \mathrm{n}(\mathrm{X_A}) > \mathrm{n}(\mathrm{X_B})}{B_2 : \mathrm{n}(\mathrm{X_A}) > \mathrm{n}(\mathrm{X_B})}(\to除)$$

調査問題	仮定	正答	結論	正誤
問題４	$\neg A_1$ C_2 D_2	B_2	B_2	正答

児童の考え方

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{C_2 \quad D_2}{C_2 \land D_2}(\land入)}{D_2 : \mathrm{P}(\mathrm{X_A}) > \mathrm{P}(\mathrm{X_B})}(\land除) \qquad \mathrm{P}(\mathrm{X_A}) > \mathrm{P}(\mathrm{X_B}) \to \mathrm{n}(\mathrm{X_A}) > \mathrm{n}(\mathrm{X_B})}{B_2 : \mathrm{n}(\mathrm{X_A}) > \mathrm{n}(\mathrm{X_B})}(\to除)$$

調査問題	仮定	正答	結論	
問題５	$\neg A_1$ C_2 D_1	B_2	B_3	誤答

児童の考え方

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{C_2 \quad D_1}{C_2 \land D_1}(\land入)}{C_2 : \mathrm{n}(\mathrm{Y_A}) > \mathrm{n}(\mathrm{Y_B})}(\land除) \qquad \mathrm{n}(\mathrm{Y_A}) > \mathrm{n}(\mathrm{Y_B}) \to \mathrm{n}(\mathrm{X_A}) < \mathrm{n}(\mathrm{X_B})}{B_3 : \mathrm{n}(\mathrm{X_A}) < \mathrm{n}(\mathrm{X_B})}(\to除)$$

水準１(段階 1B)の児童は，２つのくじのはずれくじの本数が等しい場合，２つのくじの当たりやすさを考慮し,「当たりやすい方が，当たりくじの本数が多い」という考えに基づいて，２つのくじの当たりくじの本数の関係を判断している。また，２つのくじの当たりやすさが等しい場合，２つのくじのはずれくじの本数を考慮し,「はずれくじの本数が少ない方が，当たりくじの本数が多い」という考えに基づいて，２つのくじの当たりくじの本数の関係を判断している。つまり，２つのくじ間において，はずれくじの本数と当たりやすさのいずれか等しい場合は，はずれくじの本数と当たりやすさのいずれか等しくない方を選択し，２つのくじの当たりくじの本数の関係を判断している。

また，２つのくじ間において，はずれくじの本数と当たりやすさのいずれも等しくない場合は，２つのくじの当たりやすさを考慮し,「当たりやすい方が，当たりくじの本数が多い」という考えに基づいて，２つのくじの当たりくじの本数の関係を判断している。「当たりやすい方が，当たりくじの本数が多い」という考えは,「当たりくじの本数が多い方が，当たりやすい」という考えの逆であり，したがって，このような考えの下での当たりやすさは，くじの総数に対する当たりくじ本数の割合と

いう意味を有していない。

④水準２

調査問題	仮定	正答	結論	正誤
問題５	$\neg A_1$ C_2 D_1	B_2	B_2	正答

児童の考え方

（Ⅰ）　D_1 となる条件として，「$n(X_A)\div n(Y_A)=n(X_B)\div n(Y_B)$」を考えている。

$$\frac{n(X_A)\div n(Y_A)=n(X_B)\div n(Y_B) \qquad n(X_A)\div n(Y_A)=n(X_B)\div n(Y_B)\to P(X_A)=P(X_B)}{D_1 : P(X_A)=P(X_B)}\ (\to 除)$$

$$\begin{array}{ll}
C_2 : n(Y_A)>n(Y_B) \qquad n(X_A)\div n(Y_A)=n(X_B)\div n(Y_B) & \\
\hline
n(Y_A)\times n(X_A)\div n(Y_A)>n(Y_B)\times n(X_B)\div n(Y_B) & (>=1) \\
\hline
n(X_A)>n(Y_B)\times n(X_B)\div n(Y_B) & (演推)※4 \\
\hline
B_2 : n(X_A)>n(X_B) & (演推)※4
\end{array}$$

※４　$n(Y_A)\times n(X_A)\div n(Y_A)$
$=n(X_A)\times n(Y_A)\div n(Y_A)$
$=n(X_A)\times 1$
$=n(X_A)$

※４　$n(Y_B)\times n(X_B)\div n(Y_B)$
$=n(X_B)\times n(Y_B)\div n(Y_B)$
$=n(X_B)\times 1$
$=n(X_B)$

調査問題	仮定の候補	正誤
問題３	$\neg A_1$ C_2 D_3	正答

正答

$(\exists x \exists y \exists z \exists w\ [n(Y_A)=x \wedge n(Y_B)=y \wedge x>y$
$\wedge\ n(S_A)=z \wedge n(S_B)=w \wedge z>w$
$\wedge\ P(X_A)=(z-x)/z \wedge P(X_B)=(w-y)/w \wedge (z-x)/z<(w-y)/w$
$\wedge\ n(X_A)=z-x \wedge n(X_B)=w-y \wedge z-x=w-y])$
$\wedge (\exists x' \exists y' \exists z' \exists w'\ [n(Y_A)=x' \wedge n(Y_B)=y' \wedge x'>y'$
$\wedge\ n(S_A)=z' \wedge n(S_B)=w' \wedge z'>w'$
$\wedge\ P(X_A)=(z'-x')/z' \wedge P(X_B)=(w'-y')/w' \wedge (z'-x')/z'<(w'-y')/w'$
$\wedge\ n(X_A)=z'-x' \wedge n(X_B)=w'-y' \wedge z'-x'>w'-y'])$
$\wedge (\exists x'' \exists y'' \exists z'' \exists w''\ [n(Y_A)=x'' \wedge n(Y_B)=y'' \wedge x''>y''$
$\wedge\ n(S_A)=z'' \wedge n(S_B)=w'' \wedge z''>w''$
$\wedge\ P(X_A)=(z''-x'')/z'' \wedge P(X_B)=(w''-y'')/w'' \wedge (z''-x'')/z''<(w''-y'')/w''$
$\wedge\ n(X_A)=z''-x'' \wedge n(X_B)=w''-y'' \wedge z''-x''<w''-y''])$

結論

（Ⅰ）　$(\exists x \exists y \exists z \exists w\ [n(X_A)=x \wedge n(X_B)=y \wedge x=y$
$\wedge\ n(Y_A)=z \wedge n(Y_B)=w \wedge z>w$
$\wedge\ P(X_A)=x/(x+z) \wedge P(X_B)=y/(y+w) \wedge x/(x+z)<y/(y+w)])$
$\wedge (\exists x' \exists y' \exists z' \exists w'\ [n(X_A)=x' \wedge n(X_B)=y' \wedge x'>y'$

$\wedge\ n(Y_A) = z' \wedge n(Y_B) = w' \wedge z' > w'$
$\wedge\ P(X_A) = x'/(x'+z') \wedge P(X_B) = y'/(y'+w') \wedge x'/(x'+z') < y'/(y'+w')\,]\,)$
$\wedge\,(\exists x''\exists y''\exists z''\exists w''\,[n(X_A) = x'' \wedge n(X_B) = y'' \wedge x'' < y''$
$\wedge\ n(Y_A) = z'' \wedge n(Y_B) = w'' \wedge z'' > w''$
$\wedge\ P(X_A) = x''/(x''+z'') \wedge P(X_B) = y''/(y''+w'') \wedge x''/(x''+z'') < y''/(y''+w'')\,]\,)$

児童の考え方

（Ⅰ） $n(X_A) = 4,\ n(X_B) = 4,\ n(Y_A) = 6,\ n(Y_B) = 2$ …①

①の「,」を除いて列記したものを1とする。

$$\frac{\boxed{1}\qquad 4 = 4 \qquad 6 > 2 \qquad 4/(4+6) < 4/(4+2)}{\begin{aligned}&\exists x\,\exists y\,\exists z\,\exists w\,[n(X_A) = x \wedge n(X_B) = y \wedge x = y\\ &\quad\wedge n(Y_A) = z \wedge n(Y_B) = w \wedge z > w\\ &\quad\wedge P(X_A) = x/(x+z) \wedge P(X_B) = y/(y+w) \wedge x/(x+z) < y/(y+w)\,] \cdots ⓐ\end{aligned}}\ (\exists\exists入)$$

$n(X_A) = 4,\ n(X_B) = 3,\ n(Y_A) = 6,\ n(Y_B) = 2$ …②

②の「,」を除いて列記したものを2とする。

$$\frac{\boxed{2}\qquad 4 > 3 \qquad 6 > 2 \qquad 4/(4+6) < 3/(3+2)}{\begin{aligned}&\exists x'\exists y'\exists z'\exists w'\,[n(X_A) = x' \wedge n(X_B) = y' \wedge x' > y'\\ &\quad\wedge n(Y_A) = z' \wedge n(Y_B) = w' \wedge z' > w'\\ &\quad\wedge P(X_A) = x'/(x'+z') \wedge P(X_B) = y'/(y'+w') \wedge x'/(x'+z') < y'/(y'+w')\,] \cdots ⓑ\end{aligned}}\ (\exists\exists入)$$

$n(X_A) = 4,\ n(X_B) = 5,\ n(Y_A) = 6,\ n(Y_B) = 2$ …③

③の「,」を除いて列記したものを3とする。

$$\frac{\boxed{3}\qquad 4 < 5 \qquad 6 > 2 \qquad 4/(4+6) < 5/(5+2)}{\begin{aligned}&\exists x''\exists y''\exists z''\exists w''\,[n(X_A) = x'' \wedge n(X_B) = y'' \wedge x'' < y''\\ &\quad\wedge n(Y_A) = z'' \wedge n(Y_B) = w'' \wedge z'' > w''\\ &\quad\wedge P(X_A) = x''/(x''+z'') \wedge P(X_B) = y''/(y''+w'') \wedge x''/(x''+z'') < y''/(y''+w'')\,] \cdots ⓒ\end{aligned}}\ (\exists\exists入)$$

$$\frac{ⓐ \qquad ⓑ \qquad ⓒ}{\begin{aligned}&(\exists x\,\exists y\,\exists z\,\exists w\,[n(X_A) = x \wedge n(X_B) = y \wedge x = y\\ &\quad\wedge n(Y_A) = z \wedge n(Y_B) = w \wedge z > w\\ &\quad\wedge P(X_A) = x/(x+z) \wedge P(X_B) = y/(y+w) \wedge x/(x+z) < y/(y+w)\,]\,)\\ &\wedge(\exists x'\exists y'\exists z'\exists w'\,[n(X_A) = x' \wedge n(X_B) = y' \wedge x' > y'\\ &\quad\wedge n(Y_A) = z' \wedge n(Y_B) = w' \wedge z' > w'\\ &\quad\wedge P(X_A) = x'/(x'+z') \wedge P(X_B) = y'/(y'+w') \wedge x'/(x'+z') < y'/(y'+w')\,]\,)\\ &\wedge(\exists x''\exists y''\exists z''\exists w''\,[n(X_A) = x'' \wedge n(X_B) = y'' \wedge x'' < y''\\ &\quad\wedge n(Y_A) = z'' \wedge n(Y_B) = w'' \wedge z'' > w''\\ &\quad\wedge P(X_A) = x''/(x''+z'') \wedge P(X_B) = y''/(y''+w'') \wedge x''/(x''+z'') < y''/(y''+w'')\,]\,)\end{aligned}}\ (\wedge\wedge入)$$

$n(X_A)$と $n(X_B)$の大小関係及び相等関係として，「$n(X_A) > n(X_B)$」，「$n(X_A) = n(X_B)$」，「$n(X_A) < n(X_B)$」の３つの条件を仮定して考えている。「$n(X_A) = n(X_B)$」と C_2 の条件を満たすように，$n(X_A) = 4$，$n(X_B) = 4$，$n(Y_A) = 4$，$n(Y_B) = 4$ の条件を基に，$n(Y_A)$の項に＋２，$n(Y_B)$の項に－２している。

(1) $n(X_A) = 4$，$n(X_B) = 4$，$n(Y_A) = 6$，$n(Y_B) = 2$

$$\dfrac{n(X_A)=4 \qquad \dfrac{n(X_B)=4}{4=n(X_B)}\text{(対称律)}}{B_1 : n(X_A)=n(X_B)}\text{(推移律)}$$

$$\dfrac{\dfrac{n(Y_A)=6 \qquad 6>2}{n(Y_A)>2}\text{(推移律)} \qquad \dfrac{n(Y_B)=2}{2=n(Y_B)}\text{(対称律)}}{C_2 : n(Y_A)>n(Y_B)}\text{(推移律)}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{n(X_A)=4 \qquad n(Y_A)=6}{n(X_A)\div n(Y_A)=4\div 6}\text{(＝＝)}}{n(X_A)\div n(Y_A)=2/3}\text{(演推)} \qquad 2/3<2}{n(X_A)\div n(Y_A)<2}\text{(推移律)} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{n(X_B)=4 \qquad n(Y_B)=2}{n(X_B)\div n(Y_B)=4\div 2}\text{(＝＝)}}{n(X_B)\div n(Y_B)=2}\text{(演推)}}{2=n(X_B)\div n(Y_B)}\text{(対称律)}}{n(X_A)\div n(Y_A)<n(X_B)\div n(Y_B)}\text{(推移律)}$$

$$\dfrac{n(X_A)\div n(Y_A)<n(X_B)\div n(Y_B) \qquad \mathbf{n(X_A)\div n(Y_A)<n(X_B)\div n(Y_B)\rightarrow P(X_A)<P(X_B)}}{D_3 : P(X_A)<P(X_B)}\text{(→除)}$$

$n(X_A) = 4$，$n(X_B) = 4$，$n(Y_A) = 6$，$n(Y_B) = 2$ の条件から，$n(Y_A)$に対する $n(X_A)$の割合 4/6 と $n(Y_B)$に対する $n(X_B)$の割合 4/2 を基に，$n(S_A)$に対する $n(X_A)$の割合 4/(4 ＋ 6)と $n(S_B)$に対する $n(X_B)$の割合 4/(4 ＋ 2)を求めることにより，D_3 が導かれる。

$$\dfrac{\dfrac{1=1 \qquad \dfrac{\dfrac{n(X_A)=4 \qquad n(Y_A)=6}{n(X_A)\div n(Y_A)=4\div 6}\text{(＝＝)}}{n(X_A)\div n(Y_A)=2/3}\text{(演推)}}{\dfrac{1\div(n(X_A)\div n(Y_A))=1\div 2/3}{1\div(n(X_A)\div n(Y_A))=3/2}\text{(演推)}}\text{(＝＝)}}{n(Y_A)\div n(X_A)=3/2}\text{(演推)※1}$$

※1
$1\div(n(X_A)\div n(Y_A))$
$=1\times n(Y_A)\div(n(X_A)\div n(Y_A)\times n(Y_A))$
$=n(Y_A)\div n(X_A)$

$$\dfrac{\dfrac{1=1 \qquad n(Y_A)\div n(X_A)=3/2}{1+n(Y_A)\div n(X_A)=1+3/2}\text{(＝＝)}}{(n(X_A)+n(Y_A))\div n(X_A)=1+3/2}\text{(演推)※2}$$

※2
$1+n(Y_A)\div n(X_A)$
$=n(X_A)\div n(X_A)+n(Y_A)\div n(X_A)$
$=(n(X_A)+n(Y_A))\div n(X_A)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{n(X_A)=4 \qquad (n(X_A)+n(Y_A))\div n(X_A)=1+3/2}{n(X_A)\times(n(X_A)+n(Y_A))\div n(X_A)=4\times(1+3/2)}\text{(＝＝)}}{n(X_A)\times(n(X_A)+n(Y_A))\div n(X_A)=4+6}\text{(演推)}}{n(X_A)+n(Y_A)=4+6}\text{(演推)※3}$$

※3　$n(X_A)\times(n(X_A)+n(Y_A))\div n(X_A)=(n(X_A)+n(Y_A))\times n(X_A)\div n(X_A)$

$=(n(X_A)+n(Y_A))\times 1=n(X_A)+n(Y_A)$

$$\dfrac{\text{定理５}：n(S)=n(X)+n(Y) \qquad n(X)=n(X_A) \quad n(Y)=n(Y_A) \quad n(S)=n(S_A)}{n(S_A)=n(X_A)+n(Y_A)}\ (=\text{代入})$$

$$\dfrac{n(X_A)=4 \qquad \dfrac{n(X_A)+n(Y_A)=4+6 \qquad \dfrac{n(S_A)=n(X_A)+n(Y_A)}{n(X_A)+n(Y_A)=n(S_A)}\ (\text{対称律})}{n(S_A)=4+6}\ (=\text{代入})}{n(X_A)\div n(S_A)=4\div(4+6)}\ (==)$$

$$\dfrac{\text{定義}：P(Z)=n(Z)\div n(S) \qquad n(Z)=n(X_A) \quad n(S)=n(S_A) \quad P(Z)=P(X_A)}{P(X_A)=n(X_A)\div n(S_A)}\ (=\text{代入})$$

$$\dfrac{\dfrac{n(X_A)\div n(S_A)=4\div(4+6) \qquad \dfrac{P(X_A)=n(X_A)\div n(S_A)}{n(X_A)\div n(S_A)=P(X_A)}\ (\text{対称律})}{P(X_A)=4\div(4+6)}\ (=\text{代入})}{P(X_A)=2/5}\ (\text{演推})$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{1=1 \qquad \dfrac{\dfrac{n(X_B)=4 \qquad n(Y_B)=2}{n(X_B)\div n(Y_B)=4\div 2}\ (==)}{n(X_B)\div n(Y_B)=2}\ (\text{演推})}{1\div(n(X_B)\div n(Y_B))=1\div 2}\ (==)}{1\div(n(X_B)\div n(Y_B))=1/2}\ (\text{演推})}{n(Y_B)\div n(X_B)=1/2}\ (\text{演推})※1$$

※1

$1\div(n(X_B)\div n(Y_B))$

$=1\times n(Y_B)\div(n(X_B)\div n(Y_B)\times n(Y_B))$

$=n(Y_B)\div n(X_B)$

※2

$1+n(Y_B)\div n(X_B)$

$=n(X_B)\div n(X_B)+n(Y_B)\div n(X_B)$

$=(n(X_B)+n(Y_B))\div n(X_B)$

$$\dfrac{\dfrac{1=1 \qquad n(Y_B)\div n(X_B)=1/2}{1+n(Y_B)\div n(X_B)=1+1/2}\ (==)}{(n(X_B)+n(Y_B))\div n(X_B)=1+1/2}\ (\text{演推})※2$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{n(X_B)=4 \qquad (n(X_B)+n(Y_B))\div n(X_B)=1+1/2}{n(X_B)\times(n(X_B)+n(Y_B))\div n(X_B)=4\times(1+1/2)}\ (==)}{n(X_B)\times(n(X_B)+n(Y_B))\div n(X_B)=4+2}\ (\text{演推})}{n(X_B)+n(Y_B)=4+2}\ (\text{演推})※3$$

※3　$n(X_B)\times(n(X_B)+n(Y_B))\div n(X_B)=(n(X_B)+n(Y_B))\times n(X_B)\div n(X_B)$

$=(n(X_B)+n(Y_B))\times 1=n(X_B)+n(Y_B)$

$$\dfrac{\text{定理５}：n(S)=n(X)+n(Y) \qquad n(X)=n(X_B) \quad n(Y)=n(Y_B) \quad n(S)=n(S_B)}{n(S_B)=n(X_B)+n(Y_B)}\ (=\text{代入})$$

$$\dfrac{n(X_B)=4 \qquad \dfrac{n(X_B)+n(Y_B)=4+2 \qquad \dfrac{n(S_B)=n(X_B)+n(Y_B)}{n(X_B)+n(Y_B)=n(S_B)}\text{（対称律）}}{n(S_B)=4+2}\text{（=代入）}}{n(X_B)\div n(S_B)=4\div(4+2)}\text{（==）}$$

$$\dfrac{\text{定義：}P(Z)=n(Z)\div n(S) \qquad n(Z)=n(X_B) \quad n(S)=n(S_B) \quad P(Z)=P(X_B)}{P(X_B)=n(X_B)\div n(S_B)}\text{（=代入）}$$

$$\dfrac{\dfrac{n(X_B)\div n(S_B)=4\div(4+2) \qquad \dfrac{P(X_B)=n(X_B)\div n(S_B)}{n(X_B)\div n(S_B)=P(X_B)}\text{（対称律）}}{P(X_B)=4\div(4+2)}\text{（=代入）}}{P(X_B)=2/3}\text{（演推）}$$

$$\dfrac{\dfrac{P(X_A)=2/5 \qquad 2/5<2/3}{P(X_A)<2/3}\text{（推移律）} \qquad \dfrac{P(X_B)=2/3}{2/3=P(X_B)}\text{（対称律）}}{D_3 : P(X_A)<P(X_B)}\text{（推移律）}$$

「n(X_A)＞ n(X_B)」と C_2 の条件を満たすように，B_1 となる n(X_A)＝４，n(X_B)＝４，n(Y_A)＝６，n(Y_B)＝２の条件を基に，n(X_B)の項に－１している。

(2) n(X_A)＝４，n(X_B)＝３，n(Y_A)＝６，n(Y_B)＝２

$$\dfrac{\dfrac{n(X_A)=4 \qquad 4>3}{n(X_A)>3}\text{（推移律）} \qquad \dfrac{n(X_B)=3}{3=n(X_B)}\text{（対称律）}}{B_2 : n(X_A)>n(X_B)}\text{（推移律）}$$

$$\dfrac{\dfrac{n(Y_A)=6 \qquad 6>2}{n(Y_A)>2}\text{（推移律）} \qquad \dfrac{n(Y_B)=2}{2=n(Y_B)}\text{（対称律）}}{C_2 : n(Y_A)>n(Y_B)}\text{（推移律）}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{n(X_A)=4 \qquad n(Y_A)=6}{n(X_A)\div n(Y_A)=4\div 6}\text{（==）}}{n(X_A)\div n(Y_A)=2/3}\text{（演推）} \qquad 2/3<3/2}{n(X_A)\div n(Y_A)<3/2}\text{（推移律）} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{n(X_B)=3 \qquad n(Y_B)=2}{n(X_B)\div n(Y_B)=3\div 2}\text{（==）}}{n(X_B)\div n(Y_B)=3/2}\text{（演推）}}{3/2=n(X_B)\div n(Y_B)}\text{（対称律）}}{n(X_A)\div n(Y_A)<n(X_B)\div n(Y_B)}\text{（推移律）}$$

$$\dfrac{n(X_A)\div n(Y_A)<n(X_B)\div n(Y_B) \qquad n(X_A)\div n(Y_A)<n(X_B)\div n(Y_B)\rightarrow P(X_A)<P(X_B)}{D_3 : P(X_A)<P(X_B)}\text{（→除）}$$

n(X_A)＝４，n(X_B)＝３，n(Y_A)＝６，n(Y_B)＝２の条件から，n(Y_A)に対する n(X_A)の割合 4/6 と n(Y_B)に対する n(X_B)の割合 3/2 を基に，n(S_A)に対する n(X_A)の割合 4/(4 ＋ 6) と n(S_B)に対する n(X_B)の割合 3/(3 ＋ 2) を求めることにより，D_3 が導かれる。

$$\frac{n(X_A)=4 \qquad n(Y_A)=6}{n(X_A)\div n(Y_A)=4\div 6}\ (==)$$

$$\frac{n(X_A)\div n(Y_A)=4\div 6}{n(X_A)\div n(Y_A)=2/3}\ (\text{演推})$$

$$\frac{1=1 \qquad n(X_A)\div n(Y_A)=2/3}{1\div(n(X_A)\div n(Y_A))=1\div 2/3}\ (==)$$

$$\frac{1\div(n(X_A)\div n(Y_A))=1\div 2/3}{1\div(n(X_A)\div n(Y_A))=3/2}\ (\text{演推})$$

$$\frac{1\div(n(X_A)\div n(Y_A))=3/2}{n(Y_A)\div n(X_A)=3/2}\ (\text{演推})※1$$

$$\frac{1=1 \qquad n(Y_A)\div n(X_A)=3/2}{1+n(Y_A)\div n(X_A)=1+3/2}\ (==)$$

$$\frac{1+n(Y_A)\div n(X_A)=1+3/2}{(n(X_A)+n(Y_A))\div n(X_A)=1+3/2}\ (\text{演推})※2$$

$$\frac{n(X_A)=4 \qquad (n(X_A)+n(Y_A))\div n(X_A)=1+3/2}{n(X_A)\times(n(X_A)+n(Y_A))\div n(X_A)=4\times(1+3/2)}\ (==)$$

$$\frac{n(X_A)\times(n(X_A)+n(Y_A))\div n(X_A)=4\times(1+3/2)}{n(X_A)\times(n(X_A)+n(Y_A))\div n(X_A)=4+6}\ (\text{演推})$$

$$\frac{n(X_A)\times(n(X_A)+n(Y_A))\div n(X_A)=4+6}{n(X_A)+n(Y_A)=4+6}\ (\text{演推})※3$$

$$\frac{\text{定理5}:n(S)=n(X)+n(Y) \qquad n(X)=n(X_A) \quad n(Y)=n(Y_A) \quad n(S)=n(S_A)}{n(S_A)=n(X_A)+n(Y_A)}\ (=\text{代入})$$

$$\frac{n(S_A)=n(X_A)+n(Y_A)}{n(X_A)+n(Y_A)=n(S_A)}\ (\text{対称律})$$

$$\frac{n(X_A)+n(Y_A)=4+6 \qquad n(X_A)+n(Y_A)=n(S_A)}{n(S_A)=4+6}\ (=\text{代入})$$

$$\frac{n(X_A)=4 \qquad n(S_A)=4+6}{n(X_A)\div n(S_A)=4\div(4+6)}\ (==)$$

$$\frac{\text{定義}:P(Z)=n(Z)\div n(S) \qquad n(Z)=n(X_A) \quad n(S)=n(S_A) \quad P(Z)=P(X_A)}{P(X_A)=n(X_A)\div n(S_A)}\ (=\text{代入})$$

$$\frac{P(X_A)=n(X_A)\div n(S_A)}{n(X_A)\div n(S_A)=P(X_A)}\ (\text{対称律})$$

$$\frac{n(X_A)\div n(S_A)=4\div(4+6) \qquad n(X_A)\div n(S_A)=P(X_A)}{P(X_A)=4\div(4+6)}\ (=\text{代入})$$

$$\frac{P(X_A)=4\div(4+6)}{P(X_A)=2/5}\ (\text{演推})$$

$$\frac{n(X_B)=3 \qquad n(Y_B)=2}{n(X_B)\div n(Y_B)=3\div 2}\ (==)$$

$$\frac{n(X_B)\div n(Y_B)=3\div 2}{n(X_B)\div n(Y_B)=3/2}\ (\text{演推})$$

$$\frac{1=1 \qquad n(X_B)\div n(Y_B)=3/2}{1\div(n(X_B)\div n(Y_B))=1\div 3/2}\ (==)$$

$$\frac{1\div(n(X_B)\div n(Y_B))=1\div 3/2}{1\div(n(X_B)\div n(Y_B))=2/3}\ (\text{演推})$$

$$\frac{1\div(n(X_B)\div n(Y_B))=2/3}{n(Y_B)\div n(X_B)=2/3}\ (\text{演推})※1$$

$$\frac{1=1 \qquad n(Y_B)\div n(X_B)=2/3}{1+n(Y_B)\div n(X_B)=1+2/3}\ (==)$$

$$\frac{1+n(Y_B)\div n(X_B)=1+2/3}{(n(X_B)+n(Y_B))\div n(X_B)=1+2/3}\ (\text{演推})※2$$

$$\frac{n(X_B)=3 \qquad (n(X_B)+n(Y_B))\div n(X_B)=1+2/3}{n(X_B)\times(n(X_B)+n(Y_B))\div n(X_B)=3\times(1+2/3)}\ (==)$$

$$\frac{n(X_B)\times(n(X_B)+n(Y_B))\div n(X_B)=3\times(1+2/3)}{n(X_B)\times(n(X_B)+n(Y_B))\div n(X_B)=3+2}\ (\text{演推})$$

$$\frac{n(X_B)\times(n(X_B)+n(Y_B))\div n(X_B)=3+2}{n(X_B)+n(Y_B)=3+2}\ (\text{演推})※3$$

$$\frac{\text{定理5}:n(S)=n(X)+n(Y) \qquad n(X)=n(X_B) \quad n(Y)=n(Y_B) \quad n(S)=n(S_B)}{n(S_B)=n(X_B)+n(Y_B)}\ (=\text{代入})$$

$$\dfrac{n(X_B)=3 \qquad \dfrac{n(X_B)+n(Y_B)=3+2 \qquad \dfrac{n(S_B)=n(X_B)+n(Y_B)}{n(X_B)+n(Y_B)=n(S_B)}\ (\text{対称律})}{n(S_B)=3+2}\ (\text{=代入})}{n(X_B)\div n(S_B)=3\div(3+2)}\ (\text{==})$$

$$\dfrac{\text{定義：}P(Z)=n(Z)\div n(S) \qquad n(Z)=n(X_B) \quad n(S)=n(S_B) \quad P(Z)=P(X_B)}{P(X_B)=n(X_B)\div n(S_B)}\ (\text{=代入})$$

$$\dfrac{\dfrac{n(X_B)\div n(S_B)=3\div(3+2) \qquad \dfrac{P(X_B)=n(X_B)\div n(S_B)}{n(X_B)\div n(S_B)=P(X_B)}\ (\text{対称律})}{P(X_B)=3\div(3+2)}\ (\text{=代入})}{P(X_B)=3/5}\ (\text{演推})$$

$$\dfrac{\dfrac{P(X_A)=2/5 \qquad 2/5<3/5}{P(X_A)<3/5}\ (\text{推移律}) \qquad \dfrac{P(X_B)=3/5}{3/5=P(X_B)}\ (\text{対称律})}{D_3: P(X_A)<P(X_B)}\ (\text{推移律})$$

「$n(X_A)<n(X_B)$」と C_2 の条件を満たすように，B_1 となる $n(X_A)=4$，$n(X_B)=4$，$n(Y_A)=6$，$n(Y_B)=2$ の条件を基に，$n(X_B)$ の項に＋１している。

(3) $n(X_A)=4$，$n(X_B)=5$，$n(Y_A)=6$，$n(Y_B)=2$

$$\dfrac{\dfrac{n(X_A)=4 \qquad 4<5}{n(X_A)<5}\ (\text{推移律}) \qquad \dfrac{n(X_B)=5}{5=n(X_B)}\ (\text{対称律})}{B_3: n(X_A)<n(X_B)}\ (\text{推移律})$$

$$\dfrac{\dfrac{n(Y_A)=6 \qquad 6>2}{n(Y_A)>2}\ (\text{推移律}) \qquad \dfrac{n(Y_B)=2}{2=n(Y_B)}\ (\text{対称律})}{C_2: n(Y_A)>n(Y_B)}\ (\text{推移律})$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{n(X_A)=4 \qquad n(Y_A)=6}{n(X_A)\div n(Y_A)=4\div 6}\ (\text{==})}{n(X_A)\div n(Y_A)=2/3}\ (\text{演推}) \qquad 2/3<5/2}{n(X_A)\div n(Y_A)<5/2}\ (\text{推移律}) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{n(X_B)=5 \qquad n(Y_B)=2}{n(X_B)\div n(Y_B)=5\div 2}\ (\text{==})}{n(X_B)\div n(Y_B)=5/2}\ (\text{演推})}{5/2=n(X_B)\div n(Y_B)}\ (\text{対称律})}{n(X_A)\div n(Y_A)<n(X_B)\div n(Y_B)}\ (\text{推移律})$$

$$\dfrac{n(X_A)\div n(Y_A)<n(X_B)\div n(Y_B) \qquad \mathbf{n(X_A)\div n(Y_A)<n(X_B)\div n(Y_B)\rightarrow P(X_A)<P(X_B)}}{D_3: P(X_A)<P(X_B)}\ (\rightarrow\text{除})$$

$n(X_A)=4$，$n(X_B)=5$，$n(Y_A)=6$，$n(Y_B)=2$ の条件から，$n(Y_A)$ に対する $n(X_A)$ の割合 4/6 と $n(Y_B)$ に対する $n(X_B)$ の割合 5/2 を基に，$n(S_A)$ に対する $n(X_A)$ の割合 4/(4 ＋ 6) と $n(S_B)$ に対する $n(X_B)$ の割合 5/(5 ＋ 2) を求めることにより，D_3 が導かれる。

$$\dfrac{n(X_A)=4 \qquad n(Y_A)=6}{n(X_A)\div n(Y_A)=4\div 6}\ (==)$$

$$\dfrac{n(X_A)\div n(Y_A)=4\div 6}{n(X_A)\div n(Y_A)=2/3}\ \text{(演推)}$$

$$\dfrac{1=1 \qquad n(X_A)\div n(Y_A)=2/3}{1\div(n(X_A)\div n(Y_A))=1\div 2/3}\ (==)$$

$$\dfrac{1\div(n(X_A)\div n(Y_A))=1\div 2/3}{1\div(n(X_A)\div n(Y_A))=3/2}\ \text{(演推)}$$

$$\dfrac{1\div(n(X_A)\div n(Y_A))=3/2}{n(Y_A)\div n(X_A)=3/2}\ \text{(演推)※1}$$

$$\dfrac{1=1 \qquad n(Y_A)\div n(X_A)=3/2}{1+n(Y_A)\div n(X_A)=1+3/2}\ (==)$$

$$\dfrac{1+n(Y_A)\div n(X_A)=1+3/2}{(n(X_A)+n(Y_A))\div n(X_A)=1+3/2}\ \text{(演推)※2}$$

$$\dfrac{n(X_A)=4 \qquad (n(X_A)+n(Y_A))\div n(X_A)=1+3/2}{n(X_A)\times(n(X_A)+n(Y_A))\div n(X_A)=4\times(1+3/2)}\ (==)$$

$$\dfrac{n(X_A)\times(n(X_A)+n(Y_A))\div n(X_A)=4\times(1+3/2)}{n(X_A)\times(n(X_A)+n(Y_A))\div n(X_A)=4+6}\ \text{(演推)}$$

$$\dfrac{n(X_A)\times(n(X_A)+n(Y_A))\div n(X_A)=4+6}{n(X_A)+n(Y_A)=4+6}\ \text{(演推)※3}$$

$$\dfrac{\text{定理5：}n(S)=n(X)+n(Y) \qquad n(X)=n(X_A) \quad n(Y)=n(Y_A) \quad n(S)=n(S_A)}{n(S_A)=n(X_A)+n(Y_A)}\ \text{(=代入)}$$

$$\dfrac{n(S_A)=n(X_A)+n(Y_A)}{n(X_A)+n(Y_A)=n(S_A)}\ \text{(対称律)}$$

$$\dfrac{n(X_A)+n(Y_A)=4+6 \qquad n(X_A)+n(Y_A)=n(S_A)}{n(S_A)=4+6}\ \text{(=代入)}$$

$$\dfrac{n(X_A)=4 \qquad n(S_A)=4+6}{n(X_A)\div n(S_A)=4\div(4+6)}\ (==)$$

$$\dfrac{\text{定義：}P(Z)=n(Z)\div n(S) \qquad n(Z)=n(X_A) \quad n(S)=n(S_A) \quad P(Z)=P(X_A)}{P(X_A)=n(X_A)\div n(S_A)}\ \text{(=代入)}$$

$$\dfrac{P(X_A)=n(X_A)\div n(S_A)}{n(X_A)\div n(S_A)=P(X_A)}\ \text{(対称律)}$$

$$\dfrac{n(X_A)\div n(S_A)=4\div(4+6) \qquad n(X_A)\div n(S_A)=P(X_A)}{P(X_A)=4\div(4+6)}\ \text{(=代入)}$$

$$\dfrac{P(X_A)=4\div(4+6)}{P(X_A)=2/5}\ \text{(演推)}$$

$$\dfrac{n(X_B)=5 \qquad n(Y_B)=2}{n(X_B)\div n(Y_B)=5\div 2}\ (==)$$

$$\dfrac{n(X_B)\div n(Y_B)=5\div 2}{n(X_B)\div n(Y_B)=5/2}\ \text{(演推)}$$

$$\dfrac{1=1 \qquad n(X_B)\div n(Y_B)=5/2}{1\div(n(X_B)\div n(Y_B))=1\div 5/2}\ (==)$$

$$\dfrac{1\div(n(X_B)\div n(Y_B))=1\div 5/2}{1\div(n(X_B)\div n(Y_B))=2/5}\ \text{(演推)}$$

$$\dfrac{1\div(n(X_B)\div n(Y_B))=2/5}{n(Y_B)\div n(X_B)=2/5}\ \text{(演推)※1}$$

$$\dfrac{1=1 \qquad n(Y_B)\div n(X_B)=2/5}{1+n(Y_B)\div n(X_B)=1+2/5}\ (==)$$

$$\dfrac{1+n(Y_B)\div n(X_B)=1+2/5}{(n(X_B)+n(Y_B))\div n(X_B)=1+2/5}\ \text{(演推)※2}$$

$$\dfrac{n(X_B)=5 \qquad (n(X_B)+n(Y_B))\div n(X_B)=1+2/5}{n(X_B)\times(n(X_B)+n(Y_B))\div n(X_B)=5\times(1+2/5)}\ (==)$$

$$\dfrac{n(X_B)\times(n(X_B)+n(Y_B))\div n(X_B)=5\times(1+2/5)}{n(X_B)\times(n(X_B)+n(Y_B))\div n(X_B)=5+2}\ \text{(演推)}$$

$$\dfrac{n(X_B)\times(n(X_B)+n(Y_B))\div n(X_B)=5+2}{n(X_B)+n(Y_B)=5+2}\ \text{(演推)※3}$$

$$\dfrac{\text{定理5：}n(S)=n(X)+n(Y) \qquad n(X)=n(X_B) \quad n(Y)=n(Y_B) \quad n(S)=n(S_B)}{n(S_B)=n(X_B)+n(Y_B)}\ \text{(=代入)}$$

$$
\dfrac{n(X_B)=5 \qquad \dfrac{n(X_B)+n(Y_B)=5+2 \qquad \dfrac{n(S_B)=n(X_B)+n(Y_B)}{n(X_B)+n(Y_B)=n(S_B)}\text{（対称律）}}{n(S_B)=5+2}\text{（＝代入）}}{n(X_B)\div n(S_B)=5\div(5+2)}\text{（＝＝）}
$$

$$
\dfrac{\text{定義}：P(Z)=n(Z)\div n(S) \qquad n(Z)=n(X_B) \quad n(S)=n(S_B) \quad P(Z)=P(X_B)}{P(X_B)=n(X_B)\div n(S_B)}\text{（＝代入）}
$$

$$
\dfrac{\dfrac{n(X_B)\div n(S_B)=5\div(5+2) \qquad \dfrac{P(X_B)=n(X_B)\div n(S_B)}{n(X_B)\div n(S_B)=P(X_B)}\text{（対称律）}}{P(X_B)=5\div(5+2)}\text{（＝代入）}}{P(X_B)=5/7}\text{（演推）}
$$

$$
\dfrac{\dfrac{P(X_A)=2/5 \qquad 2/5<5/7}{P(X_A)<5/7}\text{（推移律）} \qquad \dfrac{P(X_B)=5/7}{5/7=P(X_B)}\text{（対称律）}}{D_3：P(X_A)<P(X_B)}\text{（推移律）}
$$

水準２の児童は，２つのくじの当たりやすさの関係から，１つのくじ内において，当たりくじの本数とはずれくじの本数の関係やはずれくじの本数とくじの総数の関係に着目し，２つのくじの当たりくじの本数の関係を判断している。また，くじ A の当たりくじの本数が多い場合，くじ A の当たりくじの本数が少ない場合，くじ A とくじ B の当たりくじの本数が同じ場合という３つの場合を仮定している。１つのくじ内において，当たりくじの本数とはずれくじの本数に着目することにより，くじの総数に占める当たりくじの本数の割合を考え，３つの場合全てにおいて，２つのくじの当たりやすさの関係が条件を満たすことを確認し，２つのくじの当たりくじの本数の関係を判断している。特に，自ら設定した各くじの当たりくじの本数とはずれくじの本数の具体的な数値が，当たりやすさの条件を満たすことを確認し，２つのくじの当たりくじの本数の関係を判断している場合は，概念的知識と手続き的知識が同時活性化していると考えられる。

3.2.3　基準量に関する状況

(1)調査問題

割合に関する概念的知識の「基準量に関する状況」の調査問題は，以下の問題例のように仮定の候補及び結論からなる。仮定の候補には，比較量(当たりくじ)に関する条件，割合(当たりやすさ)に関する条件，くじ全体に関する条件が含まれる。

〔問題例〕

くじ引きで，「当たりくじの数」と「はずれくじの数」を合わせたくじの数を「全体のくじの数」とします。くじ引きで，「当たりくじ」が出やすいことを「当たりやすい」と言います。

「当たりくじ」と「はずれくじ」の入った２つのくじ A，B があります。

> くじ A とくじ B の「全体のくじの数」は同じです。
> くじ A は，くじ B より「当たりくじ」が多く入っています。
> くじを１本ずつ引くとき，くじ A を引く方がくじ B を引くより「当たりやすい」です。

【仮定の候補】

くじ A とくじ B のどちらのくじの方が「はずれくじ」が多く入っていますか。または，くじ A もくじ B も「はずれくじ」が同じだけ入っていますか。正しいと思う□の中に○をつけなさい。ただし，問題の中には，全ての□に○をつける問題もあります。

□	□	□
くじ A の方が「はずれくじ」が多く入っている	くじ A も B も「はずれくじ」が同じだけ入っている	くじ B の方が「はずれくじ」が多く入っている

【結論】

割合に関する概念的知識の「基準量に関する状況」の調査問題は，６つの問題から構成されている。その内，５つの問題(問題１，問題２，問題３，問題５，問題６)は正答が１つに定まる問題である。もう１つの問題(問題４)は正答が１つに定まらない問題である。そこで，正答が１つに定まる問題に関して，仮定の候補から命題論理により証明されるれる定理と結論としての条件を示す。ここでは，問題１の証明を行う。問題１には(Ⅰ)，(Ⅱ)の２つの考え方があるが，(Ⅰ)の考え方について示す。問題１の(Ⅱ)の考え方，問題２，問題３，問題５，問題６の詳細な証明は付録７に掲載。

【問題１】

仮定の候補	定理	結論
A_1 B_2 D_2	(Ⅰ)$A_1 \land D_2 \rightarrow B_2$ (Ⅱ)$A_1 \land B_2 \rightarrow D_2$	C_3

証明

(Ⅰ)　$\dfrac{A_1 : \mathrm{n}(\mathrm{S_A}) = \mathrm{n}(\mathrm{S_B}) \qquad D_2 : \mathrm{P}(\mathrm{X_A}) > \mathrm{P}(\mathrm{X_B})}{\mathrm{n}(\mathrm{S_A}) \times \mathrm{P}(\mathrm{X_A}) > \mathrm{n}(\mathrm{S_B}) \times \mathrm{P}(\mathrm{X_B})}$　(＞＝１)

$$\dfrac{\dfrac{\text{定理３：}n(Z)=n(S)\times P(Z)\qquad n(Z)=n(X_A)\quad n(S)=n(S_A)\quad P(Z)=P(X_A)}{n(X_A)=n(S_A)\times P(X_A)}\,(=\text{代入})}{n(S_A)\times P(X_A)=n(X_A)}\,(\text{対称律})$$

$$\dfrac{\dfrac{\text{定理３：}n(Z)=n(S)\times P(Z)\qquad n(Z)=n(X_B)\quad n(S)=n(S_B)\quad P(Z)=P(X_B)}{n(X_B)=n(S_B)\times P(X_B)}\,(=\text{代入})}{n(S_B)\times P(X_B)=n(X_B)}\,(\text{対称律})$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{n(S_A)\times P(X_A)>n(S_B)\times P(X_B)\qquad n(S_A)\times P(X_A)=n(X_A)\quad n(S_B)\times P(X_B)=n(X_B)}{B_2: n(X_A)>n(X_B)}\,(=\text{代入})}{D_2\rightarrow B_2}\,(\rightarrow\text{入})}{A_1\rightarrow(D_2\rightarrow B_2)}\,(\rightarrow\text{入})}{A_1\wedge D_2\rightarrow B_2}\,(\text{移入})$$

仮定の候補の内，矛盾した条件はない。A_1 と D_2 を仮定する場合，B_2 は仮定として必要ない。

（Ｉ） $$\dfrac{A_1: n(S_A)=n(S_B)\qquad D_2: P(X_A)>P(X_B)}{n(S_A)\times P(X_A)>n(S_B)\times P(X_B)}\,(>=1)$$

$$\dfrac{\dfrac{\text{定理３：}n(Z)=n(S)\times P(Z)\qquad n(Z)=n(X_A)\quad n(S)=n(S_A)\quad P(Z)=P(X_A)}{n(X_A)=n(S_A)\times P(X_A)}\,(=\text{代入})}{n(S_A)\times P(X_A)=n(X_A)}\,(\text{対称律})$$

$$\dfrac{\dfrac{\text{定理３：}n(Z)=n(S)\times P(Z)\qquad n(Z)=n(X_B)\quad n(S)=n(S_B)\quad P(Z)=P(X_B)}{n(X_B)=n(S_B)\times P(X_B)}\,(=\text{代入})}{n(S_B)\times P(X_B)=n(X_B)}\,(\text{対称律})$$

$$\dfrac{n(S_A)\times P(X_A)>n(S_B)\times P(X_B)\qquad n(S_A)\times P(X_A)=n(X_A)\quad n(S_B)\times P(X_B)=n(X_B)}{B_2: n(X_A)>n(X_B)}\,(=\text{代入})$$

$$\dfrac{A_1: n(S_A)=n(S_B)\qquad B_2: n(X_A)>n(X_B)}{n(S_A)-n(X_A)<n(S_B)-n(X_B)}\,(>=2)$$

$$\dfrac{\dfrac{\text{定理６：}n(Y)=n(S)-n(X)\qquad n(X)=n(X_A)\quad n(Y)=n(Y_A)\quad n(S)=n(S_A)}{n(Y_A)=n(S_A)-n(X_A)}\,(=\text{代入})}{n(S_A)-n(X_A)=n(Y_A)}\,(\text{対称律})$$

$$\dfrac{\dfrac{\text{定理６：}n(Y)=n(S)-n(X)\qquad n(X)=n(X_B)\quad n(Y)=n(Y_B)\quad n(S)=n(S_B)}{n(Y_B)=n(S_B)-n(X_B)}\,(=\text{代入})}{n(S_B)-n(X_B)=n(Y_B)}\,(\text{対称律})$$

$$\dfrac{(S_A)-n(X_A)<n(S_B)-n(X_B)\qquad n(S_A)-n(X_A)=n(Y_A)\quad n(S_B)-n(X_B)=n(Y_B)}{C_3: n(Y_A)<n(Y_B)}\,(=\text{代入})$$

A_1 と D_2 を仮定し，結論として証明されるのは，C_3 である。

正答が１つに定まらない問題に関して，「割合に関する状況」と同様に，仮定の候補を満たす具体的な数値を仮定し，述語論理により結論として証明される条件を示す。具体的な数値を決定する過程を示した考え方の例は付録８に掲載。

【問題４】

仮定の候補	定理
$\neg A_1$ B_2 D_2	

結論

$$
\begin{aligned}
&(\exists x \exists y \exists z \exists w\ [n(X_A)=x \wedge n(X_B)=y \wedge x>y \\
&\qquad \wedge n(S_A)=z \wedge n(S_B)=w \wedge z>w \\
&\qquad \wedge P(X_A)=x/z \wedge P(X_B)=y/w \wedge x/z>y/w \\
&\qquad \wedge n(Y_A)=z-x \wedge n(Y_B)=w-y \wedge z-x=w-y])\\
&\wedge(\exists x' \exists y' \exists z' \exists w'\ [n(X_A)=x' \wedge n(X_B)=y' \wedge x'>y' \\
&\qquad \wedge n(S_A)=z' \wedge n(S_B)=w' \wedge z'>w' \\
&\qquad \wedge P(X_A)=x'/z' \wedge P(X_B)=y'/w' \wedge x'/z'>y'/w' \\
&\qquad \wedge n(Y_A)=z'-x' \wedge n(Y_B)=w'-y' \wedge z'-x'>w'-y'])\\
&\wedge(\exists x'' \exists y'' \exists z'' \exists w''\ [n(X_A)=x'' \wedge n(X_B)=y'' \wedge x''>y'' \\
&\qquad \wedge n(S_A)=z'' \wedge n(S_B)=w'' \wedge z''>w'' \\
&\qquad \wedge P(X_A)=x''/z'' \wedge P(X_B)=y''/w'' \wedge x''/z''>y''/w'' \\
&\qquad \wedge n(Y_A)=z''-x'' \wedge n(Y_B)=w''-y'' \wedge z''-x''<w''-y''])
\end{aligned}
$$

証明

$$
\dfrac{\neg A_1 \qquad \dfrac{\dfrac{\neg A_1 \equiv A_2 \veebar A_3}{\neg A_1 \equiv A_2 \vee A_3}\ (\veebar\to\vee)}{\neg A_1 \to A_2 \vee A_3}\ (\equiv\text{除})}{A_2 \vee A_3}\ (\to\text{除})
$$

A_2 と A_3 の２つの場合に分けて考える。

A_2の場合

$$
\dfrac{A_2 : n(S_A) > n(S_B) \qquad D_2 : P(X_A) > P(X_B)}{n(S_A) \times P(X_A) > n(S_B) \times P(X_B)}\ (>>1)
$$

$$
\dfrac{\dfrac{\text{定理３}: n(Z)=n(S)\times P(Z) \qquad n(Z)=n(X_A) \quad n(S)=n(S_A) \quad P(Z)=P(X_A)}{n(X_A)=n(S_A)\times P(X_A)}\ (=\text{代入})}{n(S_A)\times P(X_A)=n(X_A)}\ (\text{対称律})
$$

$$
\dfrac{\dfrac{\text{定理３}: n(Z)=n(S)\times P(Z) \qquad n(Z)=n(X_B) \quad n(S)=n(S_B) \quad P(Z)=P(X_B)}{n(X_B)=n(S_B)\times P(X_B)}\ (=\text{代入})}{n(S_B)\times P(X_B)=n(X_B)}\ (\text{対称律})
$$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{n(S_A)\times P(X_A) > n(S_B)\times P(X_B) \qquad n(S_A)\times P(X_A) = n(X_A) \quad n(S_B)\times P(X_B) = n(X_B)}{B_2 : n(X_A) > n(X_B)}\,(=\text{代入})}{D_2 \to B_2}\,(\to\text{入})}{A_2 \to (D_2 \to B_2)}\,(\to\text{入})}{A_2 \land D_2 \to B_2}\,(\text{移入})$$

A_3の場合

$$\cfrac{B_2 : n(X_A) > n(X_B) \qquad \cfrac{A_3 : n(S_A) < n(S_B)}{n(S_B) > n(S_A)}\,(<>)}{n(X_A) \div n(S_A) > n(X_B) \div n(S_B)}\,(>>2)$$

$$\cfrac{\cfrac{\text{定義}: P(Z) = n(Z) \div n(S) \qquad n(Z) = n(X_A) \quad n(S) = n(S_A) \quad P(Z) = P(X_A)}{P(X_A) = n(X_A) \div n(S_A)}\,(=\text{代入})}{n(X_A) \div n(S_A) = P(X_A)}\,(\text{対称律})$$

$$\cfrac{\cfrac{\text{定義}: P(Z) = n(Z) \div n(S) \qquad n(Z) = n(X_B) \quad n(S) = n(S_B) \quad P(Z) = P(X_B)}{P(X_B) = n(X_B) \div n(S_B)}\,(=\text{代入})}{n(X_B) \div n(S_B) = P(X_B)}\,(\text{対称律})$$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{n(X_A) \div n(S_A) > n(X_B) \div n(S_B) \qquad n(X_A) \div n(S_A) = P(X_A) \quad n(X_B) \div n(S_B) = P(X_B)}{D_2 : P(X_A) > P(X_B)}\,(=\text{代入})}{B_2 \to D_2}\,(\to\text{入})}{A_3 \to (B_2 \to D_2)}\,(\to\text{入})}{A_3 \land B_2 \to D_2}\,(\text{移入})$$

仮定の候補の内，矛盾した条件はない。

$$\cfrac{n(X_A) = 2 \quad n(X_B) = 1 \quad n(S_A) = 3 \quad n(S_B) = 2 \quad 2 > 1 \quad 3 > 2 \quad 2/3 > 1/2 \quad 3\text{-}2 = 2\text{-}1}{\begin{aligned}\exists x \exists y \exists z \exists w\ [&n(X_A) = x \land n(X_B) = y \land x > y \\ &\land n(S_A) = z \land n(S_B) = w \land z > w \\ &\land P(X_A) = x/z \land P(X_B) = y/w \land x/z > y/w \\ &\land n(Y_A) = z - x \land n(Y_B) = w - y \land z - x = w - y]\ \cdots ⓐ\end{aligned}}\,(\exists\exists\text{入})$$

$$\cfrac{n(X_A) = 3 \quad n(X_B) = 1 \quad n(S_A) = 5 \quad n(S_B) = 2 \quad 3 > 1 \quad 5 > 2 \quad 3/5 > 1/2 \quad 5\text{-}3 > 2\text{-}1}{\begin{aligned}\exists x' \exists y' \exists z' \exists w'\ [&n(X_A) = x' \land n(X_B) = y' \land x' > y' \\ &\land n(S_A) = z' \land n(S_B) = w' \land z' > w' \\ &\land P(X_A) = x'/z' \land P(X_B) = y'/w' \land x'/z' > y'/w' \\ &\land n(Y_A) = z' - x' \land n(Y_B) = w' - y' \land z' - x' > w' - y']\ \cdots ⓑ\end{aligned}}\,(\exists\exists\text{入})$$

$$\cfrac{n(X_A) = 3 \quad n(X_B) = 1 \quad n(S_A) = 4 \quad n(S_B) = 3 \quad 3 > 1 \quad 4 > 3 \quad 3/4 > 1/3 \quad 4\text{-}3 < 3\text{-}1}{\begin{aligned}\exists x'' \exists y'' \exists z'' \exists w''\ [&n(X_A) = x'' \land n(X_B) = y'' \land x'' > y'' \\ &\land n(S_A) = z'' \land n(S_B) = w'' \land z'' > w'' \\ &\land P(X_A) = x''/z'' \land P(X_B) = y''/w'' \land x''/z'' > y''/w'' \\ &\land n(Y_A) = z'' - x'' \land n(Y_B) = w'' - y'' \land z'' - x'' < w'' - y'']\ \cdots ⓒ\end{aligned}}\,(\exists\exists\text{入})$$

ⓐ　　　ⓑ　　　ⓒ

——————————————————————————————— (∧∧入)

$(\exists x \exists y \exists z \exists w\ [n(X_A) = x \wedge n(X_B) = y \wedge x > y$

$\wedge\ n(S_A) = z \wedge n(S_B) = w \wedge z > w$

$\wedge\ P(X_A) = x/z \wedge P(X_B) = y/w \wedge x/z > y/w$

$\wedge\ n(Y_A) = z - x \wedge n(Y_B) = w - y \wedge z - x = w - y])$

$\wedge (\exists x' \exists y' \exists z' \exists w'\ [n(X_A) = x' \wedge n(X_B) = y' \wedge x' > y'$

$\wedge\ n(S_A) = z' \wedge n(S_B) = w' \wedge z' > w'$

$\wedge\ P(X_A) = x'/z' \wedge P(X_B) = y'/w' \wedge x'/z' > y'/w'$

$\wedge\ n(Y_A) = z' - x' \wedge n(Y_B) = w' - y' \wedge z' - x' > w' - y'])$

$\wedge (\exists x'' \exists y'' \exists z'' \exists w''\ [n(X_A) = x'' \wedge n(X_B) = y'' \wedge x'' > y''$

$\wedge\ n(S_A) = z'' \wedge n(S_B) = w'' \wedge z'' > w''$

$\wedge\ P(X_A) = x''/z'' \wedge P(X_B) = y''/w'' \wedge x''/z'' > y''/w''$

$\wedge\ n(Y_A) = z'' - x'' \wedge n(Y_B) = w'' - y'' \wedge z'' - x'' < w'' - y''])$

結論として，$\neg A_1$，B_2，D_2 及び C_1，$\neg A_1$，B_2，D_2 及び C_2，$\neg A_1$，B_2，D_2 及び C_3 のそれぞれを満たす $n(X_A)$，$n(X_B)$，$n(S_A)$，$n(S_B)$ が存在することが証明される。

(2) 調査対象

第５学年の児童 144 名，第６学年の児童 139 名，計 283 名の児童を対象に調査を実施した。第５学年の児童は「割合」の単元が未習であり，第６学年の児童は「割合」の単元が既習である。

(3) 調査結果の分析と考察

1) 水準区分と段階区分

調査問題が妥当であるかどうかを調べるために，スケログラム分析を行った。区分線を引いた児童の正誤パターンの一部及び合計得点，エラー，各問題の正答数，誤答数，正答数と誤答数の合計，正答率，誤答率を表 3-16 に示す。

表3-16　割合に関する概念的知識の「基準量に関する状況」の児童の正誤パターン

児童番号	問題２	問題１	問題６	問題３	問題５	問題４	合計得点	エラー
5006	0	0	0	0	0	0	0	0
5008	0	0	0	0	0	0	0	0
5025	0	0	0	0	0	0	0	0
5058	0	1	0	0	0	0	1	1
6001	0	1	0	0	0	0	1	1
6126	0	1	0	0	0	0	1	1
5013	1	0	0	0	0	0	1	0
5018	1	0	0	0	0	0	1	0
5027	1	0	0	0	0	0	1	0
5127	1	0	0	1	0	0	2	1
5022	1	0	1	0	0	0	2	1
5041	1	0	1	0	0	0	2	1
5004	1	1	0	0	0	0	2	0
5019	1	1	0	0	0	0	2	0
5021	1	1	0	0	0	0	2	0
6109	1	1	0	0	0	0	2	0
6130	1	1	0	0	0	0	2	0

6133	1	1	0	0	0	0	2	0
5003	0	1	1	0	0	0	2	1
6062	0	1	1	0	0	0	2	1
6063	0	1	1	0	0	0	2	1
6052	1	1	1	0	0	0	3	0
6056	1	1	1	0	0	0	3	0
6058	1	1	1	0	0	0	3	0
5030	0	1	1	1	0	0	3	1
5007	1	0	1	1	0	0	3	1
6009	1	0	1	1	0	0	3	1
6080	1	1	1	1	0	0	4	0
6095	1	1	1	1	0	0	4	0
6096	1	1	1	1	0	0	4	0
5026	0	1	1	1	1	0	4	1
6040	0	1	1	1	1	0	4	1
6088	1	0	1	1	1	0	4	1
6137	1	1	1	1	1	0	5	0
6138	1	1	1	1	1	0	5	0
6139	1	1	1	1	1	0	5	0
6090	1	0	1	1	1	1	5	1
6132	1	0	1	1	1	1	5	1
6108	1	1	1	1	0	1	5	1
6111	1	1	1	1	1	1	6	0
6118	1	1	1	1	1	1	6	0
6127	1	1	1	1	1	1	6	0
正答数	246	220	192	165	99	22	エラー数の合計：72	
誤答数	37	63	91	118	184	261		
合計	283	283	283	283	283	283		
正答率	0.869	0.777	0.678	0.583	0.350	0.078		
誤答率	0.131	0.223	0.322	0.417	0.650	0.922		

表 3-16 を基に，再現性係数（CR），最小限界再現性係数（MMR），正比率（PPR）を算出すると，$CR = 0.958$，$MMR = 0.747$，$PPR = 0.833$ であった。$CR > 0.9$，$MMR < 0.8$，$PPR > 0.7$ であるので，調査問題の妥当性は保証された。さらに，表 3-16 を基に，Kuder-Richardson の信頼性係数 α_{20} を算出すると，$\alpha_{20} = 0.702$ であった。$\alpha_{20} > 0.7$ であるので，調査問題の信頼性は保証された。そこで，各問題における児童の考え方に関してプロトコル分析を行った結果，表 3-16 における児童番号 5006 から児童番号 6126, 児童番号 5013 から児童番号 6133, 児童番号 5003 から児童番号 6096, 児童番号 5026 から児童番号 6127 に属する児童の考え方には，それぞれ特徴があった。児童の考え方の構造的変化としての水準及び水準内における児童の考え方の質的変化としての段階という観点から，表 3-17 に示す水準及び段階の区分を行った。また，各水準及び段階における典型的なプロトコルを示す。

【水準区分】

水準０：比較に関する考えの欠如

水準１：２つのくじ間における相等または大小に基づいた加法的な考えによる比較

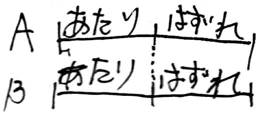
水準２：１つのくじ内における割合に基づいた乗法的な考えによる比較

【水準１内における段階区分】
段階 1A：当たりくじの本数への着目
段階 1B：当たりくじの本数と当たりやすさへの着目

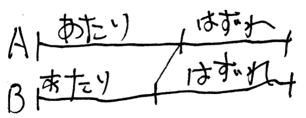
表3-17　割合に関する概念的知識の「基準量に関する状況」の水準区分と段階区分

水準	段階	調査問題	仮定	正答	正答数
0					
1	1A	問題２	A_1，B_1，D_1	C_1	246
		問題１	A_1，B_2，D_2	C_3	220
	1B	問題６	$\neg A_1$，B_1，D_3	C_2	192
		問題３	$\neg A_1$，B_2，D_3	C_2	165
2		問題５	$\neg A_1$，B_2，D_1	C_2	99
		問題４	$\neg A_1$，B_2，D_2	C_1，C_2，C_3	22

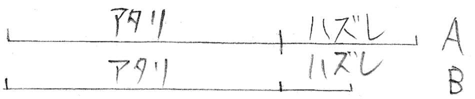
①水準０
〔５年児童 SH 〕
問題２：「何となく。」【誤答】
②水準１（段階1A）
〔６年児童 MN 〕
問題２：「くじ全体の数が同じで，当たりくじが同じだから，はずれくじも同じ。」【正答】



問題１：「くじ全体の数が同じだから，当たりくじが多いくじ A の方が，はずれくじが少ない。」【正答】



問題６：「当たりくじが同じだから，はずれくじも同じ。」【誤答】
③水準１（段階1B）
〔５年児童 AH 〕
問題６：「当たりが同じだから，くじ B の方が当たりやすいので，はずれが少ない。」【正答】

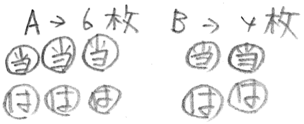


問題３：「くじ B の方が当たりやすいから，はずれが少ない。」【正答】
問題５：「当たりやすさが同じだから，くじ A の方が当たりが多いので，はずれが少ない。【誤答】
④水準２
〔５年児童 MT 〕
問題５：「くじ A は当たりくじが多いから，はずれくじも多いと当たりやすさが同じになる。」【正答】
問題４：「はずれくじが同じだったら，くじ A の方が当たりくじが多いから当たりやすくなる。くじ A の方が当たりくじが多いのに，はずれくじが少なかったら絶対当たりやすくなる。くじ A の方がはずれくじが多くても，はずれくじが当たりくじより少なかったら当たりやすくなる。」【正答】
〔６年児童 YA 〕
問題５：「くじ A は当たりが多いから，はずれも多くないと当たりやすさが同じにならない。」【正答】
問題４：「当たりがはずれくじより多いと当たりやすくなるから，くじ A の当たりが６本でくじ B の

当たりが３本，くじ A のはずれが４本でくじ B のはずれも４本だったら，くじ A の方が当たりやすく，はずれが同じ。くじ A の当たりが６本でくじ B の当たりが３本，くじ A のはずれが４本でくじ B のはずれが３本だったら，くじ A の方が当たりやすく，くじ A のはずれの方が多い。くじ A の当たりが６本でくじ B の当たりが３本，くじ A のはずれが４本でくじ B のはずれが５本だったら，くじ A の方が当たりやすく，くじ B のはずれの方が多い。」【正答】

〔６年児童 AK〕

問題５：「同じだけ当たりやすいので，くじ全体の中の当たりくじの割合が同じ。当たりはくじ A の方が多いので，くじ全体はくじ A の方が多くなり，はずれもくじ A の方が多くなる。」【正答】



問題４：「くじ A が当たりやすくなるためには，くじ全体の中での当たりくじの割合がくじ B より高くなればいいから，当たりはくじ A の方が多いので，くじ A が８本，くじ B が４本とすると，はずれを４本と４本とか，４本と６本とかにすればいい。６本と４本みたいにくじ A の方がはずれくじが多くても，くじ全体の中の当たりくじの割合が高くなるからいい。」【正答】

2)典型的なプロトコルの記号化

各水準及び段階に属する児童が行った推論の記号化を行う。また，各水準及び段階の典型的なプロトコルにおける児童固有の考えについて考察した内容を示す。児童固有の考えは，推論図式において強調表示している。水準２には(Ⅰ)，(Ⅱ)，(Ⅲ)の３つの考え方があるが，ここでは(Ⅰ)の考え方について示す。(Ⅱ)，(Ⅲ)の考え方は付録９に掲載。

①水準０

調査問題	仮定の候補	正答	結論	正誤
問題２	A_1 B_1 D_1	C_1	C_3	誤答
児童の考え方				

水準０の児童は，２つのくじのはずれくじの本数の関係を判断するために，２つのくじの総数，当たりくじの本数，当たりやすさのいずれにも着目していない。これは，くじを引くという場面及び当たりやすさに関する理解が不足していることに起因すると考えられる。

②水準１(段階1A)

調査問題	仮定の候補	正答	結論	正誤
問題２	A_1 B_1 D_1	C_1	C_1	正答
児童の考え方				
$\dfrac{B_1 : n(X_A)=n(X_B) \qquad \mathbf{n(X_A)=n(X_B)\rightarrow n(Y_A)=n(Y_B)}}{C_1 : n(Y_A)=n(Y_B)}$ (→除)				
調査問題	仮定	正答	結論	正誤

<table>
<tr><td>問題１</td><td>A_1
B_2
D_2</td><td>C_3</td><td>C_3</td><td>正答</td></tr>
<tr><td colspan="5">児童の考え方</td></tr>
<tr><td colspan="5">$\dfrac{B_2 : n(X_A) > n(X_B) \qquad n(X_A)>n(X_B)\to n(Y_A)<n(Y_B)}{C_3 : n(Y_A) < n(Y_B)}$ (→除)</td></tr>
<tr><td>調査問題</td><td>仮定</td><td>正答</td><td>結論</td><td></td></tr>
<tr><td>問題６</td><td>$\neg A_1$
B_1
D_3</td><td>C_2</td><td>C_1</td><td>誤答</td></tr>
<tr><td colspan="5">児童の考え方</td></tr>
<tr><td colspan="5">$\dfrac{B_1 : n(X_A) = n(X_B) \qquad n(X_A)=n(X_B)\to n(Y_A)=n(Y_B)}{C_1 : n(Y_A) = n(Y_B)}$ (→除)</td></tr>
</table>

水準１(段階 1A)の児童は，２つのくじの総数について記述しているが，２つのくじの当たりくじの本数だけに着目し，「当たりくじの本数が同じなら，はずれくじの本数も同じ」，「当たりくじの本数が少ないなら，はずれくじの本数が多い」という考えに基づいて，２つのくじのはずれくじの本数の関係を判断しており，２つのくじの総数や当たりやすさを考慮していない。

③水準１(段階1B)

<table>
<tr><td>調査問題</td><td>仮定</td><td>正答</td><td>結論</td><td>正誤</td></tr>
<tr><td>問題６</td><td>$\neg A_1$
B_1
D_3</td><td>C_2</td><td>C_2</td><td>正答</td></tr>
<tr><td colspan="5">児童の考え方</td></tr>
<tr><td colspan="5">$\dfrac{\dfrac{\dfrac{B_1 \quad D_3}{B_1 \wedge D_3}(\wedge入)}{D_3 : P(X_A) < P(X_B)}(\wedge除) \qquad P(X_A)<P(X_B)\to n(Y_A)>n(Y_B)}{C_2 : n(Y_A) > n(Y_B)}$ (→除)</td></tr>
<tr><td>調査問題</td><td>仮定</td><td>正答</td><td>結論</td><td>正誤</td></tr>
<tr><td>問題３</td><td>$\neg A_1$
B_2
D_3</td><td>C_2</td><td>C_2</td><td>正答</td></tr>
<tr><td colspan="5">児童の考え方</td></tr>
<tr><td colspan="5">$\dfrac{\dfrac{\dfrac{B_2 \quad D_3}{B_2 \wedge D_3}(\wedge入)}{D_3 : P(X_A) < P(X_B)}(\wedge除) \qquad P(X_A)<P(X_B)\to n(Y_A)>n(Y_B)}{C_2 : n(Y_A) > n(Y_B)}$ (→除)</td></tr>
<tr><td>調査問題</td><td>仮定</td><td>正答</td><td>結論</td><td></td></tr>
<tr><td>問題５</td><td>$\neg A_1$
B_2
D_1</td><td>C_2</td><td>C_3</td><td>誤答</td></tr>
<tr><td colspan="5">児童の考え方</td></tr>
<tr><td colspan="5"></td></tr>
</table>

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{B_2 \quad D_1}{B_2 \wedge D_1}(\wedge\text{入})}{B_2 : \mathrm{n}(X_A) > \mathrm{n}(X_B)}(\wedge\text{除}) \qquad \mathrm{n}(X_A) > \mathrm{n}(X_B) \to \mathrm{n}(Y_A) < \mathrm{n}(Y_B)}{C_3 : \mathrm{n}(Y_A) < \mathrm{n}(Y_B)}(\to\text{除})$$

水準１(段階 1B)の児童は，２つのくじの当たりくじの本数が等しい場合，２つのくじの当たりやすさを考慮し，「当たりやすい方が，はずれくじの本数が少ない」という考えに基づいて，２つのくじのはずれくじの本数の関係を判断している。また，２つのくじの当たりやすさが等しい場合，２つのくじの当たりくじの本数を考慮し，「当たりくじの本数が多い方が，はずれくじの本数は少ない」という考えに基づいて，２つのくじのはずれくじの本数の関係を判断している。つまり，２つのくじ間において，当たりくじの本数と当たりやすさのいずれか等しい場合は，当たりくじの本数と当たりやすさのいずれか等しくない方を選択し，２つのくじのはずれくじの本数の関係を判断している。

また，２つのくじ間において，当たりくじの本数と当たりやすさのいずれも等しくない場合は，２つのくじの当たりやすさを考慮し，「当たりやすい方が，はずれくじの本数が少ない」という考えに基づいて，２つのくじのはずれくじの本数の関係を判断している。「当たりやすい方が，はずれくじの本数が少ない」という考えは，「はずれくじの本数が少ない方が，当たりやすい」という考えの逆であり，したがって，このような考えの下での当たりやすさは，くじの総数に対する当たりくじ本数の割合という意味を有していない

④水準２

調査問題	仮定	正答	結論	正誤
問題５	$\neg A_1$ B_2 D_1	C_2	C_2	正答

児童の考え方

（Ｉ） D_1 となる条件として，「$\mathrm{n}(X_A) \div \mathrm{n}(Y_A) = \mathrm{n}(X_B) \div \mathrm{n}(Y_B)$」を考えている。

$$\cfrac{\mathrm{n}(X_A) \div \mathrm{n}(Y_A) = \mathrm{n}(X_B) \div \mathrm{n}(Y_B) \qquad \mathrm{n}(X_A) \div \mathrm{n}(Y_A) = \mathrm{n}(X_B) \div \mathrm{n}(Y_B) \to \mathrm{P}(X_A) = \mathrm{P}(X_B)}{D_1 : \mathrm{P}(X_A) = \mathrm{P}(X_B)}(\to\text{除})$$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{1 = 1 \qquad \mathrm{n}(X_A) \div \mathrm{n}(Y_A) = \mathrm{n}(X_B) \div \mathrm{n}(Y_B)}{1 \div (\mathrm{n}(X_A) \div \mathrm{n}(Y_A)) = 1 \div (\mathrm{n}(X_B) \div \mathrm{n}(Y_B))}(==)}{\mathrm{n}(Y_A) \div \mathrm{n}(X_A) = 1 \div (\mathrm{n}(X_B) \div \mathrm{n}(Y_B))}(\text{演推})※1}{\mathrm{n}(Y_A) \div \mathrm{n}(X_A) = \mathrm{n}(Y_B) \div \mathrm{n}(X_B)}(\text{演推})※1$$

※１
$1 \div (\mathrm{n}(X_A) \div \mathrm{n}(Y_A))$
$= 1 \times \mathrm{n}(Y_A) \div (\mathrm{n}(X_A) \div \mathrm{n}(Y_A) \times \mathrm{n}(Y_A))$
$= \mathrm{n}(Y_A) \div \mathrm{n}(X_A)$

※１
$1 \div (\mathrm{n}(X_B) \div \mathrm{n}(Y_B))$
$= 1 \times \mathrm{n}(Y_B) \div (\mathrm{n}(X_B) \div \mathrm{n}(Y_B) \times \mathrm{n}(Y_B))$
$= \mathrm{n}(Y_B) \div \mathrm{n}(X_B)$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{B_2 : \mathrm{n}(X_A) > \mathrm{n}(X_B) \qquad \mathrm{n}(Y_A) \div \mathrm{n}(X_A) = \mathrm{n}(Y_B) \div \mathrm{n}(X_B)}{\mathrm{n}(X_A) \times \mathrm{n}(Y_A) \div \mathrm{n}(X_A) > \mathrm{n}(X_B) \times \mathrm{n}(Y_B) \div \mathrm{n}(X_B)}(>=1)}{\mathrm{n}(Y_A) > \mathrm{n}(X_B) \times \mathrm{n}(Y_B) \div \mathrm{n}(X_B)}(\text{演推})※4}{C_2 : \mathrm{n}(Y_A) > \mathrm{n}(Y_B)}(\text{演推})※4$$

※4 $n(X_A)\times n(Y_A)\div n(X_A)$
$= n(Y_A)\times n(X_A)\div n(X_A)$
$= n(Y_A)\times 1$
$= n(Y_A)$

※4 $n(X_B)\times n(Y_B)\div n(X_B)$
$= n(Y_B)\times n(X_B)\div n(X_B)$
$= n(Y_B)\times 1$
$= n(Y_B)$

調査問題	仮定の候補	正誤
問題4	$\neg A_1$ B_2 D_2	正答

正答

$$
\begin{aligned}
&(\exists x\,\exists y\,\exists z\,\exists w\,[n(X_A)=x \wedge n(X_B)=y \wedge x>y \\
&\qquad \wedge\, n(S_A)=z \wedge n(S_B)=w \wedge z>w \\
&\qquad \wedge\, P(X_A)=x/z \wedge P(X_B)=y/w \wedge x/z>y/w \\
&\qquad \wedge\, n(Y_A)=z-x \wedge n(Y_B)=w-y \wedge z-x=w-y]) \\
&\wedge(\exists x'\,\exists y'\,\exists z'\,\exists w'\,[n(X_A)=x' \wedge n(X_B)=y' \wedge x'>y' \\
&\qquad \wedge\, n(S_A)=z' \wedge n(S_B)=w' \wedge z'>w' \\
&\qquad \wedge\, P(X_A)=x'/z' \wedge P(X_B)=y'/w' \wedge x'/z'>y'/w' \\
&\qquad \wedge\, n(Y_A)=z'-x' \wedge n(Y_B)=w'-y' \wedge z'-x'>w'-y']) \\
&\wedge(\exists x''\,\exists y''\,\exists z''\,\exists w''\,[n(X_A)=x'' \wedge n(X_B)=y'' \wedge x''>y'' \\
&\qquad \wedge\, n(S_A)=z'' \wedge n(S_B)=w'' \wedge z''>w'' \\
&\qquad \wedge\, P(X_A)=x''/z'' \wedge P(X_B)=y''/w'' \wedge x''/z''>y''/w'' \\
&\qquad \wedge\, n(Y_A)=z''-x'' \wedge n(Y_B)=w''-y'' \wedge z''-x''<w''-y''])
\end{aligned}
$$

結論

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{I})\quad (\exists x\,\exists y\,\exists z\,\exists w\,[n(X_A)=x \wedge n(X_B)=y \wedge x>y \\
&\qquad \wedge\, n(Y_A)=z \wedge n(Y_B)=w \wedge z=w \\
&\qquad \wedge\, P(X_A)=x/(x+z) \wedge P(X_B)=y/(y+w) \wedge x/(x+z)>y/(y+w)]) \\
&\quad \wedge(\exists x'\,\exists y'\,\exists z'\,\exists w'\,[n(X_A)=x' \wedge n(X_B)=y' \wedge x'>y' \\
&\qquad \wedge\, n(Y_A)=z' \wedge n(Y_B)=w' \wedge z'>w' \\
&\qquad \wedge\, P(X_A)=x'/(x'+z') \wedge P(X_B)=y'/(y'+w') \wedge x'/(x'+z')>y'/(y'+w')]) \\
&\quad \wedge(\exists x''\,\exists y''\,\exists z''\,\exists w''\,[n(X_A)=x'' \wedge n(X_B)=y'' \wedge x''>y'' \\
&\qquad \wedge\, n(Y_A)=z'' \wedge n(Y_B)=w'' \wedge z''<w'' \\
&\qquad \wedge\, P(X_A)=x''/(x''+z'') \wedge P(X_B)=y''/(y''+w'') \wedge x''/(x''+z'')>y''/(y''+w'')])
\end{aligned}
$$

児童の考え方

(I) $n(X_A)=6,\ n(X_B)=3,\ n(Y_A)=4,\ n(Y_B)=4$ …①

①の「,」を除いて列記したものを①とする。

$$
\dfrac{①\qquad 6>3\qquad 4=4\qquad 6/(6+4)>3/(3+4)}{\begin{aligned}
&\exists x\,\exists y\,\exists z\,\exists w\,[n(X_A)=x \wedge n(X_B)=y \wedge x>y \\
&\qquad \wedge\, n(Y_A)=z \wedge n(Y_B)=w \wedge z=w \\
&\qquad \wedge\, P(X_A)=x/(x+z) \wedge P(X_B)=y/(y+w) \wedge x/(x+z)>y/(y+w)]
\end{aligned}}\ (\exists\exists入)
$$
…ⓐ

$n(X_A)=6,\ n(X_B)=3,\ n(Y_A)=4,\ n(Y_B)=3$ …②

②の「, 」を除いて列記したものを$\boxed{2}$とする。

$$\frac{\boxed{2} \qquad 6>3 \qquad 4>3 \qquad 6/(6+4)>3/(3+3)}{\begin{aligned}&\exists x'\exists y'\exists z'\exists w'\ [n(X_A)=x'\wedge n(X_B)=y'\wedge x'>y'\\ &\quad\wedge n(Y_A)=z'\wedge n(Y_B)=w'\wedge z'>w'\\ &\quad\wedge P(X_A)=x'/(x'+z')\wedge P(X_B)=y'/(y'+w')\wedge x'/(x'+z')>y'/(y'+w')]\ \cdots ⓑ\end{aligned}}\ (\exists\exists 入)$$

$n(X_A)=6$, $n(X_B)=3$, $n(Y_A)=4$, $n(Y_B)=5$ …③

③の「, 」を除いて列記したものを$\boxed{3}$とする。

$$\frac{\boxed{3} \qquad 6>3 \qquad 4<5 \qquad 6/(6+4)>3/(3+5)}{\begin{aligned}&\exists x''\exists y''\exists z''\exists w''\ [n(X_A)=x''\wedge n(X_B)=y''\wedge x''>y''\\ &\quad\wedge n(Y_A)=z''\wedge n(Y_B)=w''\wedge z''<w''\\ &\quad\wedge P(X_A)=x''/(x''+z'')\wedge P(X_B)=y''/(y''+w'')\wedge x''/(x''+z'')>y''/(y''+w'')]\ \cdots ⓒ\end{aligned}}\ (\exists\exists 入)$$

$$\frac{ⓐ \qquad ⓑ \qquad ⓒ}{\begin{aligned}&(\exists x\exists y\exists z\exists w\ [n(X_A)=x\wedge n(X_B)=y\wedge x>y\\ &\quad\wedge n(Y_A)=z\wedge n(Y_B)=w\wedge z=w\\ &\quad\wedge P(X_A)=x/(x+z)\wedge P(X_B)=y/(y+w)\wedge x/(x+z)>y/(y+w)])\\ &\wedge(\exists x'\exists y'\exists z'\exists w'\ [n(X_A)=x'\wedge n(X_B)=y'\wedge x'>y'\\ &\quad\wedge n(Y_A)=z'\wedge n(Y_B)=w'\wedge z'>w'\\ &\quad\wedge P(X_A)=x'/(x'+z')\wedge P(X_B)=y'/(y'+w')\wedge x'/(x'+z')>y'/(y'+w')])\\ &\wedge(\exists x''\exists y''\exists z''\exists w''\ [n(X_A)=x''\wedge n(X_B)=y''\wedge x''>y''\\ &\quad\wedge n(Y_A)=z''\wedge n(Y_B)=w''\wedge z''<w''\\ &\quad\wedge P(X_A)=x''/(x''+z'')\wedge P(X_B)=y''/(y''+w'')\wedge x''/(x''+z'')>y''/(y''+w'')])\end{aligned}}\ (\wedge\wedge 入)$$

$n(Y_A)$と$n(Y_B)$の大小関係及び相等関係として，「$n(Y_A)>n(Y_B)$」，「$n(Y_A)=n(Y_B)$」，「$n(Y_A)<n(Y_B)$」の３つの条件を仮定して考えている。「$n(Y_A)=n(Y_B)$」とB_2の条件を満たすように，$n(X_A)=4$，$n(X_B)=4$，$n(Y_A)=4$，$n(Y_B)=4$の条件を基に，$n(X_A)$の項に＋２，$n(X_B)$の項は$n(X_A)$の項を÷２した値としている。

(1) $n(X_A)=6$，$n(X_B)=3$，$n(Y_A)=4$，$n(Y_B)=4$

$$\frac{\dfrac{n(X_A)=6 \qquad 6>3}{n(X_A)>3}\ (推移律) \qquad \dfrac{n(X_B)=3}{3=n(X_B)}\ (対称律)}{B_2: n(X_A)>n(X_B)}\ (推移律)$$

$$\frac{n(Y_A)=4 \qquad \dfrac{n(Y_B)=4}{4=n(Y_B)}\ (対称律)}{C_1: n(Y_A)=n(Y_B)}\ (推移律)$$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{n(X_A)=6 \qquad n(Y_A)=4}{n(X_A)\div n(Y_A)=6\div 4}\,(==)}{n(X_A)\div n(Y_A)=6/4}\,(\text{演推}) \qquad 6/4>3/4}{n(X_A)\div n(Y_A)>3/4}\,(\text{推移律}) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{n(X_B)=3 \qquad n(Y_B)=4}{n(X_B)\div n(Y_B)=3\div 4}\,(==)}{n(X_B)\div n(Y_B)=3/4}\,(\text{演推})}{3/4=n(X_B)\div n(Y_B)}\,(\text{対称律})}{n(X_A)\div n(Y_A)>n(X_B)\div n(Y_B)}\,(\text{推移律})
$$

$$
\dfrac{n(X_A)\div n(Y_A)>n(X_B)\div n(Y_B) \qquad \mathbf{n(X_A)\div n(Y_A)>n(X_B)\div n(Y_B)\rightarrow P(X_A)>P(X_B)}}{D_2: P(X_A)>P(X_B)}\,(\rightarrow\text{除})
$$

$n(X_A)=6$，$n(X_B)=3$，$n(Y_A)=4$，$n(Y_B)=4$ の条件から，$n(Y_A)$ に対する $n(X_A)$ の割合 $6/4$ と $n(Y_B)$ に対する $n(X_B)$ の割合 $3/4$ を基に，$n(S_A)$ に対する $n(X_A)$ の割合 $6/(6+4)$ と $n(S_B)$ に対する $n(X_B)$ の割合 $3/(3+4)$ を求めることにより，D_2 が導かれる。

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{1=1 \qquad \dfrac{\dfrac{n(X_A)=6 \qquad n(Y_A)=4}{n(X_A)\div n(Y_A)=6\div 4}\,(==)}{n(X_A)\div n(Y_A)=3/2}\,(\text{演推})}{1\div(n(X_A)\div n(Y_A))=1\div 3/2}\,(==)}{1\div(n(X_A)\div n(Y_A))=2/3}\,(\text{演推})}{n(Y_A)\div n(X_A)=2/3}\,(\text{演推})※1
$$

※1
$1\div(n(X_A)\div n(Y_A))$
$=1\times n(Y_A)\div(n(X_A)\div n(Y_A)\times n(Y_A))$
$=n(Y_A)\div n(X_A)$

$$
\dfrac{\dfrac{1=1 \qquad n(Y_A)\div n(X_A)=2/3}{1+n(Y_A)\div n(X_A)=1+2/3}\,(==)}{(n(X_A)+n(Y_A))\div n(X_A)=1+2/3}\,(\text{演推})※2
$$

※2
$1+n(Y_A)\div n(X_A)$
$=n(X_A)\div n(X_A)+n(Y_A)\div n(X_A)$
$=(n(X_A)+n(Y_A))\div n(X_A)$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{n(X_A)=6 \qquad (n(X_A)+n(Y_A))\div n(X_A)=1+2/3}{n(X_A)\times(n(X_A)+n(Y_A))\div n(X_A)=6\times(1+2/3)}\,(==)}{n(X_A)\times(n(X_A)+n(Y_A))\div n(X_A)=6+4}\,(\text{演推})}{n(X_A)+n(Y_A)=6+4}\,(\text{演推})※3
$$

※3　$n(X_A)\times(n(X_A)+n(Y_A))\div n(X_A)=(n(X_A)+n(Y_A))\times n(X_A)\div n(X_A)$
$=(n(X_A)+n(Y_A))\times 1=n(X_A)+n(Y_A)$

$$
\dfrac{\text{定理５}: n(S)=n(X)+n(Y) \qquad n(X)=n(X_A) \quad n(Y)=n(Y_A) \quad n(S)=n(S_A)}{n(S_A)=n(X_A)+n(Y_A)}\,(=\text{代入})
$$

$$
\dfrac{n(X_A)=6 \qquad \dfrac{n(X_A)+n(Y_A)=6+4 \qquad \dfrac{n(S_A)=n(X_A)+n(Y_A)}{n(X_A)+n(Y_A)=n(S_A)}\,(\text{対称律})}{n(S_A)=6+4}\,(=\text{代入})}{n(X_A)\div n(S_A)=6\div(6+4)}\,(==)
$$

$$
\dfrac{\text{定義}: P(Z)=n(Z)\div n(S) \qquad n(Z)=n(X_A) \quad n(S)=n(S_A) \quad P(Z)=P(X_A)}{P(X_A)=n(X_A)\div n(S_A)}\,(=\text{代入})
$$

$$\dfrac{n(X_A)\div n(S_A)=6\div(6+4) \qquad \dfrac{P(X_A)=n(X_A)\div n(S_A)}{n(X_A)\div n(S_A)=P(X_A)}\,(\text{対称律})}{\dfrac{P(X_A)=6\div(6+4)}{P(X_A)=3/5}\,(\text{演推})}\,(\text{=代入})$$

$$\dfrac{1=1 \qquad \dfrac{\dfrac{n(X_B)=3 \qquad n(Y_B)=4}{n(X_B)\div n(Y_B)=3\div 4}\,(==)}{n(X_B)\div n(Y_B)=3/4}\,(\text{演推})}{\dfrac{\dfrac{1\div(n(X_B)\div n(Y_B))=1\div 3/4}{1\div(n(X_B)\div n(Y_B))=4/3}\,(\text{演推})}{n(Y_B)\div n(X_B)=4/3}\,(\text{演推})※1}\,(==)$$

※1
$1\div(n(X_B)\div n(Y_B))$
$=1\times n(Y_B)\div(n(X_B)\div n(Y_B)\times n(Y_B))$
$=n(Y_B)\div n(X_B)$

$$\dfrac{1=1 \qquad n(Y_B)\div n(X_B)=4/3}{\dfrac{1+n(Y_B)\div n(X_B)=1+4/3}{(n(X_B)+n(Y_B))\div n(X_B)=1+4/3}\,(\text{演推})※2}\,(==)$$

※2
$1+n(Y_B)\div n(X_B)$
$=n(X_B)\div n(X_B)+n(Y_B)\div n(X_B)$
$=(n(X_B)+n(Y_B))\div n(X_B)$

$$\dfrac{n(X_B)=3 \qquad (n(X_B)+n(Y_B))\div n(X_B)=1+4/3}{\dfrac{n(X_B)\times(n(X_B)+n(Y_B))\div n(X_B)=3\times(1+4/3)}{\dfrac{n(X_B)\times(n(X_B)+n(Y_B))\div n(X_B)=3+4}{n(X_B)+n(Y_B)=3+4}\,(\text{演推})※3}\,(\text{演推})}\,(==)$$

※3
$n(X_B)\times(n(X_B)+n(Y_B))\div n(X_B)=(n(X_B)+n(Y_B))\times n(X_B)\div n(X_B)$
$=(n(X_B)+n(Y_B))\times 1=n(X_B)+n(Y_B)$

$$\dfrac{\text{定理５}:n(S)=n(X)+n(Y) \qquad n(X)=n(X_B) \quad n(Y)=n(Y_B) \quad n(S)=n(S_B)}{n(S_B)=n(X_B)+n(Y_B)}\,(\text{=代入})$$

$$\dfrac{n(X_B)=3 \qquad \dfrac{n(X_B)+n(Y_B)=3+4 \qquad \dfrac{n(S_B)=n(X_B)+n(Y_B)}{n(X_B)+n(Y_B)=n(S_B)}\,(\text{対称律})}{n(S_B)=3+4}\,(\text{=代入})}{n(X_B)\div n(S_B)=3\div(3+4)}\,(==)$$

$$\dfrac{\text{定義}:P(Z)=n(Z)\div n(S) \qquad n(Z)=n(X_B) \quad n(S)=n(S_B) \quad P(Z)=P(X_B)}{P(X_B)=n(X_B)\div n(S_B)}\,(\text{=代入})$$

$$\dfrac{n(X_B)\div n(S_B)=3\div(3+4) \qquad \dfrac{P(X_B)=n(X_B)\div n(S_B)}{n(X_B)\div n(S_B)=P(X_B)}\,(\text{対称律})}{\dfrac{P(X_B)=3\div(3+4)}{P(X_B)=3/7}\,(\text{演推})}\,(\text{=代入})$$

$$\dfrac{\dfrac{P(X_A)=3/5 \qquad 3/5>3/7}{P(X_A)>3/7}\,(\text{推移律}) \qquad \dfrac{P(X_B)=3/7}{3/7=P(X_B)}\,(\text{対称律})}{D_2:P(X_A)>P(X_B)}\,(\text{推移律})$$

「$n(Y_A)>n(Y_B)$」と B_2 の条件を満たすように，C_1 となる $n(X_A)=6$，$n(X_B)=3$，$n(Y_A)=4$，$n(Y_B)=4$ の条件を基に，$n(Y_B)$ の項に－１している。

(2) $n(X_A)=6$，$n(X_B)=3$，$n(Y_A)=4$，$n(Y_B)=3$

$$\dfrac{\dfrac{n(X_A)=6 \qquad 6>3}{n(X_A)>3}\,(\text{推移律}) \qquad \dfrac{n(X_B)=3}{3=n(X_B)}\,(\text{対称律})}{B_2 : n(X_A)>n(X_B)}\,(\text{推移律})$$

$$\dfrac{\dfrac{n(Y_A)=4 \qquad 4>3}{n(Y_A)>3}\,(\text{推移律}) \qquad \dfrac{n(Y_B)=3}{3=n(Y_B)}\,(\text{対称律})}{C_2 : n(Y_A)>n(Y_B)}\,(\text{推移律})$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{n(X_A)=6 \qquad n(Y_A)=4}{n(X_A)\div n(Y_A)=6\div 4}\,(==)}{n(X_A)\div n(Y_A)=6/4}\,(\text{演推}) \qquad 6/4>1}{n(X_A)\div n(Y_A)>1}\,(\text{推移律}) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{n(X_B)=3 \qquad n(Y_B)=3}{n(X_B)\div n(Y_B)=3\div 3}\,(==)}{n(X_B)\div n(Y_B)=1}\,(\text{演推})}{1=n(X_B)\div n(Y_B)}\,(\text{対称律})}{n(X_A)\div n(Y_A)>n(X_B)\div n(Y_B)}\,(\text{推移律})$$

$$\dfrac{n(X_A)\div n(Y_A)>n(X_B)\div n(Y_B) \qquad \mathbf{n(X_A)\div n(Y_A)>n(X_B)\div n(Y_B)\to P(X_A)>P(X_B)}}{D_2 : P(X_A)>P(X_B)}\,(\to\text{除})$$

$n(X_A)=6$，$n(X_B)=3$，$n(Y_A)=4$，$n(Y_B)=3$ の条件から，$n(Y_A)$ に対する $n(X_A)$ の割合 6/4 と $n(Y_B)$ に対する $n(X_B)$ の割合 3/3 を基に，$n(S_A)$ に対する $n(X_A)$ の割合 $6/(6+4)$ と $n(S_B)$ に対する $n(X_B)$ の割合 $3/(3+3)$ を求めることにより，D_2 が導かれる。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{n(X_A)=6 \qquad \dfrac{\dfrac{1=1 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{1=1 \qquad \dfrac{\dfrac{n(X_A)=6 \qquad n(Y_A)=4}{n(X_A)\div n(Y_A)=6\div 4}\,(==)}{n(X_A)\div n(Y_A)=3/2}\,(\text{演推})}{1\div(n(X_A)\div n(Y_A))=1\div 3/2}\,(==)}{1\div(n(X_A)\div n(Y_A))=2/3}\,(\text{演推})}{n(Y_A)\div n(X_A)=2/3}\,(\text{演推})※1}{1+n(Y_A)\div n(X_A)=1+2/3}\,(==)}{(n(X_A)+n(Y_A))\div n(X_A)=1+2/3}\,(\text{演推})※2}{n(X_A)\times(n(X_A)+n(Y_A))\div n(X_A)=6\times(1+2/3)}\,(==)}{n(X_A)\times(n(X_A)+n(Y_A))\div n(X_A)=6+4}\,(\text{演推})}{n(X_A)+n(Y_A)=6+4}\,(\text{演推})※3$$

$$\dfrac{\text{定理5}: n(S)=n(X)+n(Y) \qquad n(X)=n(X_A) \quad n(Y)=n(Y_A) \quad n(S)=n(S_A)}{n(S_A)=n(X_A)+n(Y_A)}\,(=\text{代入})$$

$$\dfrac{n(X_A)=6 \qquad \dfrac{n(X_A)+n(Y_A)=6+4 \qquad \dfrac{n(S_A)=n(X_A)+n(Y_A)}{n(X_A)+n(Y_A)=n(S_A)}\,(\text{対称律})}{n(S_A)=6+4}\,(=\text{代入})}{n(X_A)\div n(S_A)=6\div(6+4)}\,(==)$$

$$\dfrac{\text{定義}: P(Z)=n(Z)\div n(S) \qquad n(Z)=n(X_A) \quad n(S)=n(S_A) \quad P(Z)=P(X_A)}{P(X_A)=n(X_A)\div n(S_A)}\,(=\text{代入})$$

$$\dfrac{n(X_A)\div n(S_A)=6\div(6+4) \qquad \dfrac{P(X_A)=n(X_A)\div n(S_A)}{n(X_A)\div n(S_A)=P(X_A)}\ (\text{対称律})}{\dfrac{P(X_A)=6\div(6+4)}{P(X_A)=3/5}\ (\text{演推})}\ (\text{=代入})$$

$$\dfrac{n(X_B)=3 \qquad \dfrac{\dfrac{1=1 \qquad \dfrac{\dfrac{1=1 \qquad \dfrac{\dfrac{n(X_B)=3 \qquad n(Y_B)=3}{n(X_B)\div n(Y_B)=3\div 3}\ (\text{==})}{n(X_B)\div n(Y_B)=1}\ (\text{演推})}{1\div(n(X_B)\div n(Y_B))=1\div 1}\ (\text{==})}{\dfrac{1\div(n(X_B)\div n(Y_B))=1}{n(Y_B)\div n(X_B)=1}\ (\text{演推})\text{※}1}\ (\text{演推})}{1+n(Y_B)\div n(X_B)=1+1}\ (\text{==})}{(n(X_B)+n(Y_B))\div n(X_B)=1+1}\ (\text{演推})\text{※}2}{\dfrac{\dfrac{n(X_B)\times(n(X_B)+n(Y_B))\div n(X_B)=3\times(1+1)}{n(X_B)\times(n(X_B)+n(Y_B))\div n(X_B)=3+3}\ (\text{演推})}{n(X_B)+n(Y_B)=3+3}\ (\text{演推})\text{※}3}\ (\text{==})$$

$$\dfrac{\text{定理5}:n(S)=n(X)+n(Y) \qquad n(X)=n(X_B) \quad n(Y)=n(Y_B) \quad n(S)=n(S_B)}{n(S_B)=n(X_B)+n(Y_B)}\ (\text{=代入})$$

$$\dfrac{n(X_B)=3 \qquad \dfrac{n(X_B)+n(Y_B)=3+3 \qquad \dfrac{n(S_B)=n(X_B)+n(Y_B)}{n(X_B)+n(Y_B)=n(S_B)}\ (\text{対称律})}{n(S_B)=3+3}\ (\text{=代入})}{n(X_B)\div n(S_B)=3\div(3+3)}\ (\text{==})$$

$$\dfrac{\text{定義}:P(Z)=n(Z)\div n(S) \qquad n(Z)=n(X_B) \quad n(S)=n(S_B) \quad P(Z)=P(X_B)}{P(X_B)=n(X_B)\div n(S_B)}\ (\text{=代入})$$

$$\dfrac{n(X_B)\div n(S_B)=3\div(3+3) \qquad \dfrac{P(X_B)=n(X_B)\div n(S_B)}{n(X_B)\div n(S_B)=P(X_B)}\ (\text{対称律})}{\dfrac{P(X_B)=3\div(3+3)}{P(X_B)=1/2}\ (\text{演推})}\ (\text{=代入})$$

$$\dfrac{\dfrac{P(X_A)=3/5 \qquad 3/5>1/2}{P(X_A)>1/2}\ (\text{推移律}) \qquad \dfrac{P(X_B)=1/2}{1/2=P(X_B)}\ (\text{対称律})}{D_2:P(X_A)>P(X_B)}\ (\text{推移律})$$

「n(Y_A)＜ n(Y_B)」と B_2 の条件を満たすように，C_1 となる $n(X_A)=6$，$n(X_B)=3$，$n(Y_A)=4$，$n(Y_B)=4$ の条件を基に，$n(Y_B)$ の項に＋１している。

(3) $n(X_A)=6$，$n(X_B)=3$，$n(Y_A)=4$，$n(Y_B)=5$

$$\dfrac{\dfrac{n(X_A)=6 \qquad 6>3}{n(X_A)>3}\ (\text{推移律}) \qquad \dfrac{n(X_B)=3}{3=n(X_B)}\ (\text{対称律})}{B_2:n(X_A)>n(X_B)}\ (\text{推移律})$$

$$\dfrac{\dfrac{n(Y_A)=4 \quad 4<5}{n(Y_A)<5}\text{(推移律)} \qquad \dfrac{n(Y_B)=5}{5=n(Y_B)}\text{(対称律)}}{C_3: n(Y_A)<n(Y_B)}\text{(推移律)}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{n(X_A)=6 \quad n(Y_A)=4}{n(X_A)\div n(Y_A)=6\div 4}\text{(==)}}{n(X_A)\div n(Y_A)=6/4}\text{(演推)} \quad 6/4>3/5}{n(X_A)\div n(Y_A)>3/5}\text{(推移律)} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{n(X_B)=3 \quad n(Y_B)=5}{n(X_B)\div n(Y_B)=3\div 5}\text{(==)}}{n(X_B)\div n(Y_B)=3/5}\text{(演推)}}{3/5=n(X_B)\div n(Y_B)}\text{(対称律)}}{n(X_A)\div n(Y_A)>n(X_B)\div n(Y_B)}\text{(推移律)}$$

$$\dfrac{n(X_A)\div n(Y_A)>n(X_B)\div n(Y_B) \qquad \mathbf{n(X_A)\div n(Y_A)>n(X_B)\div n(Y_B)\rightarrow P(X_A)>P(X_B)}}{D_2: P(X_A)>P(X_B)}\text{(→除)}$$

$n(X_A)=6$，$n(X_B)=3$，$n(Y_A)=4$，$n(Y_B)=5$ の条件から，$n(Y_A)$に対する $n(X_A)$の割合 6/4 と $n(Y_B)$に対する $n(X_B)$の割合 3/5 を基に，$n(S_A)$に対する $n(X_A)$の割合 $6/(6+4)$と $n(S_B)$に対する $n(X_B)$の割合 $3/(3+5)$を求めることにより，D_2 が導かれる。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{n(X_A)=6 \quad \dfrac{\dfrac{1=1 \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{1=1 \quad \dfrac{\dfrac{n(X_A)=6 \quad n(Y_A)=4}{n(X_A)\div n(Y_A)=6\div 4}\text{(==)}}{n(X_A)\div n(Y_A)=3/2}\text{(演推)}}{1\div(n(X_A)\div n(Y_A))=1\div 3/2}\text{(==)}}{1\div(n(X_A)\div n(Y_A))=2/3}\text{(演推)}}{n(Y_A)\div n(X_A)=2/3}\text{(演推)※1}}{1+n(Y_A)\div n(X_A)=1+2/3}\text{(==)}}{(n(X_A)+n(Y_A))\div n(X_A)=1+2/3}\text{(演推)※2}}{n(X_A)\times(n(X_A)+n(Y_A))\div n(X_A)=6\times(1+2/3)}\text{(==)}}{n(X_A)\times(n(X_A)+n(Y_A))\div n(X_A)=6+4}\text{(演推)}}{n(X_A)+n(Y_A)=6+4}\text{(演推)※3}$$

$$\dfrac{\text{定理5}: n(S)=n(X)+n(Y) \quad n(X)=n(X_A) \quad n(Y)=n(Y_A) \quad n(S)=n(S_A)}{n(S_A)=n(X_A)+n(Y_A)}\text{(=代入)}$$

$$\dfrac{n(X_A)=6 \qquad \dfrac{n(X_A)+n(Y_A)=6+4 \quad \dfrac{n(S_A)=n(X_A)+n(Y_A)}{n(X_A)+n(Y_A)=n(S_A)}\text{(対称律)}}{n(S_A)=6+4}\text{(=代入)}}{n(X_A)\div n(S_A)=6\div(6+4)}\text{(==)}$$

$$\dfrac{\text{定義}: P(Z)=n(Z)\div n(S) \quad n(Z)=n(X_A) \quad n(S)=n(S_A) \quad P(Z)=P(X_A)}{P(X_A)=n(X_A)\div n(S_A)}\text{(=代入)}$$

$$\dfrac{\dfrac{n(X_A)\div n(S_A)=6\div(6+4) \quad \dfrac{P(X_A)=n(X_A)\div n(S_A)}{n(X_A)\div n(S_A)=P(X_A)}\text{(対称律)}}{P(X_A)=6\div(6+4)}\text{(=代入)}}{P(X_A)=3/5}\text{(演推)}$$

$$\frac{\dfrac{n(X_B)=3 \qquad n(Y_B)=5}{n(X_B)\div n(Y_B)=3\div 5}\ (==)}{n(X_B)\div n(Y_B)=3/5}\ (演推)$$

$$\frac{\dfrac{1=1 \qquad n(X_B)\div n(Y_B)=3/5}{1\div(n(X_B)\div n(Y_B))=1\div 3/5}\ (==)}{\dfrac{1\div(n(X_B)\div n(Y_B))=5/3}{n(Y_B)\div n(X_B)=5/3}\ (演推)※1}\ (演推)$$

$$\frac{\dfrac{1=1 \qquad n(Y_B)\div n(X_B)=5/3}{1+n(Y_B)\div n(X_B)=1+5/3}\ (==)}{(n(X_B)+n(Y_B))\div n(X_B)=1+5/3}\ (演推)※2$$

$$\frac{\dfrac{n(X_B)=3 \qquad (n(X_B)+n(Y_B))\div n(X_B)=1+5/3}{n(X_B)\times(n(X_B)+n(Y_B))\div n(X_B)=3\times(1+5/3)}\ (==)}{\dfrac{n(X_B)\times(n(X_B)+n(Y_B))\div n(X_B)=3+5}{n(X_B)+n(Y_B)=3+5}\ (演推)※3}\ (演推)$$

$$\frac{定理5:n(S)=n(X)+n(Y) \qquad n(X)=n(X_B) \quad n(Y)=n(Y_B) \quad n(S)=n(S_B)}{n(S_B)=n(X_B)+n(Y_B)}\ (=代入)$$

$$\frac{n(X_B)=3 \qquad \dfrac{n(X_B)+n(Y_B)=3+5 \qquad \dfrac{n(S_B)=n(X_B)+n(Y_B)}{n(X_B)+n(Y_B)=n(S_B)}\ (対称律)}{n(S_B)=3+5}\ (=代入)}{n(X_B)\div n(S_B)=3\div(3+5)}\ (==)$$

$$\frac{定義:P(Z)=n(Z)\div n(S) \qquad n(Z)=n(X_B) \quad n(S)=n(S_B) \quad P(Z)=P(X_B)}{P(X_B)=n(X_B)\div n(S_B)}\ (=代入)$$

$$\frac{\dfrac{n(X_B)\div n(S_B)=3\div(3+5) \qquad \dfrac{P(X_B)=n(X_B)\div n(S_B)}{n(X_B)\div n(S_B)=P(X_B)}\ (対称律)}{P(X_B)=3\div(3+5)}\ (=代入)}{P(X_B)=3/8}\ (演推)$$

$$\frac{\dfrac{P(X_A)=3/5 \qquad 3/5>3/8}{P(X_A)>3/8}\ (推移律) \qquad \dfrac{P(X_B)=3/8}{3/8=P(X_B)}\ (対称律)}{D_2:P(X_A)>P(X_B)}\ (推移律)$$

水準２の児童は，２つのくじの当たりやすさの関係から，１つのくじ内において，当たりくじの本数とはずれくじの本数の関係や当たりくじの本数とくじの総数の関係に着目し，２つのくじのはずれくじの本数の関係を判断している。また，くじ A のはずれくじの本数が多い場合，くじ A のはずれくじの本数が少ない場合，くじ A とくじ B のはずれくじの本数が同じ場合という３つの場合を仮定している。１つのくじ内において，当たりくじの本数とはずれくじの本数に着目することにより，くじの総数に占める当たりくじの本数の割合を考え，３つの場合全てにおいて，２つのくじの当たりやすさの関係が条件を満たすことを確認し，２つのくじのはずれくじの本数の関係を判断している。特に，自ら設定した各くじの当たりくじの本数とはずれくじの本数の具体的な数値が，当たりやすさの条件を満たすことを確認し，２つのくじのはずれくじの本数の関係を判断している場合は，概念的知識と手続き的知識が同時活性化していると考えられる。

3.3　割合に関する手続き的知識についての調査問題及び調査結果の分析と考察

手続き的知識に関する調査問題は数値を含んでいるため，児童は提示された２つの数量を基に確率に関する問題にアプローチできる。確率という観点から「部分－全体」における割合に着目できるように，手続き的知識に関する調査問題は，割合(当たりやすさ)に関する状況，比較量(当たりくじ)に関する状況，基準量(くじ全体)に関する状況の３つの状況から構成される。また，３つの状況に関する児童の認識を統合的に分析できるように，同じ問題番号の条件は，元は同じ数値を用いた場面であり，割合，比較量，基準量の内いずれか１つを未知数にすることにより設定されている。問題に用いる数値に関して，児童は基準方略としての「半分」を用いることを考慮し，「部分－全体」に関して「２倍・1/2」の関係である条件を含む問題を設定した。また，割合を用いて比較すべき場面であるが，全体が等しい場合には差を用いて比較できる場合もある。そのため，全ての場合に差を用いて比較する間違った考え方が反映されるように，割合は異なるが差は等しくなる数値を設定している。

3.3.1　割合に関する状況

(1)調査問題

割合に関する手続き的知識の「割合に関する状況」の調査問題は，以下の問題例ように仮定と結論からなる。仮定には，比較量(当たりくじ)に関する条件と基準量(くじ全体)に関する条件が含まれる。当たりくじの本数，くじの総数に関して，$0 \leqq n(X) \leqq n(S)$に矛盾しないように，$n(X)$，$n(S)$を設定している。したがって，当たりやすさに関して，$0 \leqq P(X) \leqq 1$を満たしている。

〔問題例〕

くじ引きで，「当たりくじの数」と「はずれくじの数」を合わせたくじの数を「全体のくじの数」とします。

くじ引きで，くじを１本引くときの「当たりくじ」の出やすさを「当たりやすさ」と言います。

くじ引きで，「当たりやすさ」が高いことを「当たりやすい」と言います。

「当たりくじ」と「はずれくじ」の入った２つのくじ A，B があります。

くじ A は，「全体のくじの数」が５本，「当たりくじの数」が３本です。 くじ B は，「全体のくじの数」が５本，「当たりくじの数」が１本です。	【仮定】

くじを１本ずつ引くとき，くじ A とくじ B では，どちらが「当たりやすい」ですか。またはくじ A もくじ B も同じだけ「当たりやすい」ですか。正しいと思う□の中に１つ○をつけなさい。

□ くじ A の方が 「当たりやすい」	□ くじ A も B も同じ だけ「当たりやすい」	□ くじ B の方が 「当たりやすい」	【結論】

割合に関する手続き的知識の「割合に関する状況」の調査問題は，12 の問題から構成されている。全て正答が１つに定まる問題である。仮定の条件から，命題論理により推論規則及び推論法則に基づいて推論を行い，結論として証明される条件を示す。ここでは，問題１の証明を行う。問題２～問題 12 の証明は付録 10 に掲載。

【問題１】

仮定	結論
$n(X_A)=3$，$n(X_B)=1$，$n(S_A)=5$，$n(S_B)=5$	D_2

証明

$$\frac{\text{定義：}P(Z)=n(Z)\div n(S)\qquad n(Z)=n(X_A)\quad n(S)=n(S_A)\quad P(Z)=P(X_A)}{P(X_A)=n(X_A)\div n(S_A)}\ (＝代入)$$

$$\frac{P(X_A)=n(X_A)\div n(S_A)\qquad n(X_A)=3\quad n(S_A)=5}{\dfrac{P(X_A)=3\div 5}{P(X_A)=3/5}\ (演推)}\ (＝代入)$$

$$\frac{\text{定義：}P(Z)=n(Z)\div n(S)\qquad n(Z)=n(X_B)\quad n(S)=n(S_B)\quad P(Z)=P(X_B)}{P(X_B)=n(X_B)\div n(S_B)}\ (＝代入)$$

$$\frac{P(X_B)=n(X_B)\div n(S_B)\qquad n(X_B)=1\quad n(S_B)=5}{\dfrac{P(X_B)=1\div 5}{P(X_B)=1/5}\ (演推)}\ (＝代入)$$

$$\frac{\dfrac{P(X_A)=3/5\qquad 3/5>1/5}{P(X_A)>1/5}\ (推移律)\qquad \dfrac{P(X_B)=1/5}{1/5=P(X_B)}\ (対称律)}{D_2:P(X_A)>P(X_B)}\ (推移律)$$

結論として証明されるのは，D_2 である。

(2) 調査対象

第５学年の児童 214 名，第６学年の児童 229 名，計 443 名の児童を対象に調査を実施した。第５学年の児童は「割合」の単元が未習であり，第６学年の児童は「割合」の単元が既習である。

(3) 調査結果の分析と考察

1) 水準区分と段階区分

調査問題が妥当であるかどうかを調べるために，スケログラム分析を行った。区分線を引いた児童の正誤パターンの一部及び合計得点，エラー，各問題の正答数，誤答数，正答数と誤答数の合計，正答率，誤答率を表 3-18 に示す。

表3-18　割合に関する手続き的知識の「割合に関する状況」の児童の正誤パターン

児童番号	問題1	問題4	問題6	問題3	問題12	問題2	問題8	問題9	問題7	問題5	問題10	問題11	合計得点	エラー
6106	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5002	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5195	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1
5209	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	2	2
5134	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	3	3
5019	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	3	3
6018	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	3	2

6140	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	3	2
6015	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	3	2
6168	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	4	3
5139	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	4	3
6002	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	4	3
5088	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	4	4
5108	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	4	4
5204	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	4	4
6008	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	4	3
5044	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	4	1
6147	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	4	2
6011	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	4	0
6114	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	4	0
6110	0	1	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	5	3
6192	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	5	1
6193	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	5	1
5053	1	0	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	5	2
5097	1	0	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	5	2
6200	1	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	5	2
5102	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	6	1
5104	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	6	1
5188	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	6	1
5138	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	1	6	2
6218	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	1	0	6	2
5052	1	1	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	6	2
5009	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	1	7	5
5016	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	7	3
6033	1	1	1	1	1	0	0	1	0	1	0	0	7	3
5060	1	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	7	4
6112	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1	7	4
5174	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	0	0	7	2
5010	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	8	1
5035	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	8	1
5194	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	8	1
6201	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	8	2
5196	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	8	2
6094	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0	8	2
6185	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	8	0
5029	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	8	0
5116	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	8	0
6109	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	8	7
5175	1	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1	8	5
5066	1	1	0	1	1	0	1	1	0	0	1	1	8	5
5045	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	9	0
5131	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	9	0

5214	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	9	0
6034	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0	9	1
6108	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	9	1
6025	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	9	1
5100	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	10	0
5113	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	10	0
6009	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	10	1
6116	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	10	3
6061	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	10	3
5101	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	10	3
5020	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	11	0
5148	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	11	0
5095	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	11	0
6128	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	11	1
6154	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	11	1
6096	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	11	1
5208	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	12	0
5211	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	12	0
5213	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	12	0
正答数	425	419	405	401	382	330	329	285	274	263	253	241	エラー数の合計：392	
誤答数	18	24	38	42	61	113	114	158	169	183	190	202		
合計	443	443	443	443	443	443	443	443	443	443	443	443		
正答率	0.959	0.946	0.914	0.905	0.862	0.745	0.743	0.643	0.619	0.594	0.571	0.544		
誤答率	0.041	0.054	0.086	0.095	0.138	0.255	0.257	0.357	0.381	0.406	0.429	0.456		

表 3-18 を基に，再現性係数（CR），最小限界再現性係数（MMR），正比率（PPR）を算出すると，CR ＝ 0.926，MMR ＝ 0.754，PPR ＝ 0.701 であった。CR ＞ 0.9，MMR ＜ 0.8，PPR ＞ 0.7 であるので，調査問題の妥当性は保証された。さらに，表 3-18 を基に，Kuder-Richardson の信頼性係数 α_{20} を算出すると，α_{20} ＝ 0.861 であった。α_{20} ＞ 0.7 であるので，調査問題の信頼性は保証された。そこで，各問題における児童の考え方に関してプロトコル分析を行った結果，表 3-18 における児童番号 6106 から児童番号 5019，児童番号 6018 から児童番号 5204，児童番号 6008 から児童番号 5188，児童番号 5138 から児童番号 5214，児童番号 6034 から児童番号 5213 に属する児童の考え方には，それぞれ特徴があった。児童の考え方の構造的変化としての水準及び水準内における児童の考え方の質的変化としての段階という観点から，表 3-19 に示す水準及び段階の区分を行った。また，各水準及び段階における典型的なプロトコルを示す。

【水準区分】

水準０：比較に関する考えの欠如

水準１：相等，大小，差に基づいた加法的な考えによる比較

水準２：割合に基づいた乗法的な考えによる比較

【水準１内における段階区分】

段階 1A：２つのくじ間における当たりくじの本数に着目

段階 1B：２つのくじ間におけるはずれくじの本数または２つのくじ間における当たりくじの本数とくじの総数に着目

段階 1C：１つのくじ内における当たりくじの本数とはずれくじの本数に着目

表3-19　割合に関する手続き的知識の「割合に関する状況」の水準区分と段階区分

水準	段階	調査問題	仮定	正答	正答数
0					
1	1A	問題１	n(X$_A$)＝３，n(X$_B$)＝１，n(S$_A$)＝５，n(S$_B$)＝５	D_2	425
		問題４	n(X$_A$)＝１，n(X$_B$)＝３，n(S$_A$)＝４，n(S$_B$)＝４	D_3	419
	1B	問題６	n(X$_A$)＝２，n(X$_B$)＝２，n(S$_A$)＝４，n(S$_B$)＝５	D_2	405
		問題３	n(X$_A$)＝３，n(X$_B$)＝３，n(S$_A$)＝４，n(S$_B$)＝５	D_2	401
		問題 12	n(X$_A$)＝４，n(X$_B$)＝３，n(S$_A$)＝10，n(S$_B$)＝６	D_3	382
	1C	問題２	n(X$_A$)＝１，n(X$_B$)＝３，n(S$_A$)＝２，n(S$_B$)＝６	D_1	330
		問題８	n(X$_A$)＝１，n(X$_B$)＝３，n(S$_A$)＝４，n(S$_B$)＝６	D_3	329
		問題９	n(X$_A$)＝２，n(X$_B$)＝３，n(S$_A$)＝４，n(S$_B$)＝５	D_3	285
		問題７	n(X$_A$)＝１，n(X$_B$)＝４，n(S$_A$)＝２，n(S$_B$)＝５	D_3	274
2		問題５	n(X$_A$)＝３，n(X$_B$)＝６，n(S$_A$)＝４，n(S$_B$)＝８	D_1	263
		問題 10	n(X$_A$)＝２，n(X$_B$)＝３，n(S$_A$)＝８，n(S$_B$)＝10	D_3	253
		問題 11	n(X$_A$)＝３，n(X$_B$)＝４，n(S$_A$)＝４，n(S$_B$)＝５	D_3	241

①水準０

〔５年児童 TH 〕

問題１：「全体のくじの数が同じだから，同じだけ当たる。」【誤答】

②水準１（段階1A）

〔５年児童 YK 〕

問題１：「当たりくじが多いくじ A の方が当たりやすい。」【正答】

問題４：「当たりくじが多いくじ B の方が当たりやすい。」【正答】

問題６：「当たりくじの数が同じだから，同じだけ当たりやすい。」【誤答】

③水準１（段階1B）

〔５年児童 MS 〕

問題６：「当たりくじの数が同じだから，くじ全体の数が少ないくじ A の方が当たりやすい。」【正答】

問題３：「当たりくじの数が同じだから，くじ全体の数が少ないくじ A の方が当たりやすい。」【正答】

問題 12：「くじ全体の数が少ないくじ A の方が当たりやすい。」【正答】

問題２：「くじ全体の数が少ないくじ B の方が当たりやすい。」【誤答】

〔６年児童 TN 〕

問題６：「４－２＝２，５－２＝３，はずれくじの数が少ないくじ A の方が当たりやすい。」【正答】

問題３：「４－３＝１，５－３＝２，はずれくじの数が少ないくじ A の方が当たりやすい。」【正答】

問題 12：「10 －４＝６，６－３＝３，はずれくじの数が少ないくじ B の方が当たりやすい。」【正答】

問題２：「２－１＝１，６－３＝３，はずれくじの数が少ないくじ A の方が当たりやすい。」【誤答】

④水準１（段階1C）

〔５年児童 MN 〕

問題２：「くじ A もくじ B も，当たりくじがくじ全体の半分だから，同じだけ当たりやすい。」【正答】

問題８：「くじ A は，当たりくじがくじ全体の半分より少ないけど，くじ B は，当たりくじがくじ全体の半分だから，くじ B の方が当たりやすい。」【正答】

問題９：「くじ A は，当たりくじがくじ全体の半分だけど，くじ B は，当たりくじがくじ全体の半分よりも多いから，くじ B の方が当たりやすい。」【正答】

問題７：「くじ A は，当たりくじがくじ全体の半分だけど，くじ B は，当たりくじがくじ全体の半分よりも多いから，くじ B の方が当たりやすい。」【正答】

問題５：「くじ A もくじ B も，当たりくじはくじ全体の半分より少ないから，当たりくじの多いくじ B

の方が当たりやすい。」【誤答】

〔６年児童 ET 〕

問題２：「２－１＝１，６－３＝３，くじ A もくじ B も，当たりくじの数とはずれくじの数が同じ」だから，同じだけ当たりやすい。」【正答】

問題８：「４－１＝３，６－３＝３，くじ A は，当たりくじの数よりはずれくじの数の方が多いけど，くじ B は，当たりくじの数とはずれくじの数が同じだから，くじ B の方が当たりやすい。」【正答】

問題９：「４－２＝２，５－３＝２，くじ A は，当たりくじの数とはずれくじの数が同じだけど，くじ B は，当たりくじの数の方が，はずれくじの数より多いから，くじ B の方が当たりやすい。」【正答】

問題７：「２－１＝１，５－４＝１，くじ A は，当たりくじの数とはずれくじの数が同じだけど，くじ B は，当たりくじの数の方が，はずれくじの数より多いから，くじ B の方が当たりやすい。」【正答】

問題５：「４－３＝１，８－６＝２，くじ A もくじ B も，当たりくじの数の方が，はずれくじの数より多い。３－１＝２，６－２＝４，くじ A は，当たりくじの数がはずれくじの数より２本多いけど，くじ B は，当たりくじの数がはずれくじの数より４本多いから，くじ B の方が当たりやすい。」【誤答】

⑤水準２

〔６年児童 AS 〕

問題５：「くじ A の当たりくじの数と全体のくじの数を２倍すると，くじ B になるから，同じだけ当たりやすい。」【正答】

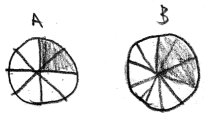
問題 10：「くじ A の当たりくじの数と全体のくじの数を５倍して，くじ B の当たりくじの数と全体のくじの数を４倍すると，全体のくじの数はどちらも 40 本だけど，当たりくじの数は，くじ A は 10 本，くじ B は 12 本だから，くじ B の方が当たりやすい。」【正答】

問題 11：「くじ A は，４×５＝ 20，３×５＝ 15，くじ B は，５×４＝ 20，４×４＝ 16，全体のくじの数が同じだから，当たりくじの数の多いくじ B の方が当たりやすい。」【正答】

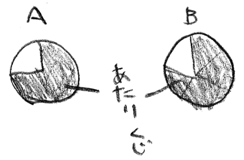
〔６年児童 YS 〕

問題５：「くじ A は，３÷４＝ 0.75，くじ B は，６÷８＝ 0.75，当たりくじの割合が同じなので，くじ A もくじ B も同じだけ当たりやすい。」【正答】

問題 10：「くじ A は，２÷８＝ 0.25，くじ B は，３÷ 10 ＝ 0.3，当たりくじの割合が高いくじ B の方が当たりやすい。」【正答】



問題 11：「くじ A は，３÷４＝ 0.75，くじ B は，４÷５＝ 0.8，当たりくじの割合が高いくじ B の方が当たりやすい。」【正答】



2) 典型的なプロトコルの記号化

各水準及び段階に属する児童が行った推論の記号化を行う。また，各水準及び段階の典型的なプロトコルにおける児童固有の考えについて考察した内容を示す。児童固有の考えは，推論図式において強調表示している。ここでは，各水準及び段階の境界に位置する問題における考え方を示す。他の問題における考え方は付録 11 に掲載。

①水準０

調査問題	仮定の候補	正答	結論	正誤
問題１	$n(X_A)=3$，$n(X_B)=1$，$n(S_A)=5$，$n(S_B)=5$	D_2	D_1	誤答

児童の考え方

$$\dfrac{\dfrac{n(S_A)=5 \qquad \dfrac{n(S_B)=5}{5=n(S_B)}\text{（対称律）}}{n(S_A)=n(S_B)}\text{（推移律）} \qquad n(S_A)=n(S_B)\rightarrow P(X_A)=P(X_B)}{D_1 : P(X_A)=P(X_B)}\text{（→除）}$$

水準０の児童は，２つのくじの総数だけに着目し，「くじの総数が同じなら，同じくらい当たる」という考えに基づいて，２つのくじの当たりやすさの関係を判断しており，２つのくじの当たりくじの本数を考慮していない。これは，くじを引くという場面及び当たりやすさに関する理解が不足していることに起因すると考えられる。

②水準1A

調査問題	仮定の候補	正答	結論	正誤
問題１	$n(X_A)=3$，$n(X_B)=1$，$n(S_A)=5$，$n(S_B)=5$	D_2	D_2	正答

児童の考え方

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{n(X_A)=3 \qquad 3>1}{n(X_A)>1}\text{（推移律）} \qquad \dfrac{n(X_B)=1}{1=n(X_B)}\text{（対称律）}}{B_2 : n(X_A)>n(X_B)}\text{（推移律）} \qquad n(X_A)>n(X_B)\rightarrow P(X_A)>P(X_B)}{D_2 : P(X_A)>P(X_B)}\text{（→除）}$$

調査問題	仮定の候補	正答	結論	正誤
問題６	$n(X_A)=2$，$n(X_B)=2$，$n(S_A)=4$，$n(S_B)=5$	D_2	D_1	誤答

児童の考え方

$$\dfrac{\dfrac{n(X_A)=2 \qquad \dfrac{n(X_B)=2}{2=n(X_B)}\text{（対称律）}}{B_1 : n(X_A)=n(X_B)}\text{（推移律）} \qquad n(X_A)=n(X_B)\rightarrow P(X_A)=P(X_B)}{D_1 : P(X_A)=P(X_B)}\text{（→除）}$$

水準１（段階 1A）の児童は，２つのくじの当たりくじの本数だけに着目し，「当たりくじの本数が多い方が，当たりやすい」，「当たりくじの本数が同じなら，同じくらい当たる」という考えに基づいて，２つのくじの当たりやすさの関係を判断しており，２つのくじの総数を考慮していない。

③水準1B

調査問題	仮定の候補	正答	結論	正誤
問題６	$n(X_A)=2$，$n(X_B)=2$，$n(S_A)=4$，$n(S_B)=5$	D_2	D_2	正答

児童の考え方

(Ⅰ)

$$\dfrac{n(X_A)=2 \qquad \dfrac{n(X_B)=2}{2=n(X_B)}\,(\text{対称律})}{B_1 : n(X_A)=n(X_B)}\,(\text{推移律})$$

$$\dfrac{\dfrac{n(S_A)=4 \qquad 4<5}{n(S_A)<5}\,(\text{推移律}) \qquad \dfrac{n(S_B)=5}{5=n(X_B)}\,(\text{対称律})}{A_3 : n(S_A)<n(S_B)}\,(\text{推移律})$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{B_1 \qquad A_3}{B_1 \wedge A_3}\,(\wedge\text{入})}{A_3 : n(S_A)<n(S_B)}\,(\wedge\text{除}) \qquad n(S_A)<n(S_B) \rightarrow P(X_A)>P(X_B)}{D_2 : P(X_A)>P(X_B)}\,(\rightarrow\text{除})$$

調査問題	仮定の候補	正答	結論	正誤
問題２	$n(X_A)=1$，$n(X_B)=3$，$n(S_A)=2$，$n(S_B)=6$	D_1	D_2	誤答

児童の考え方

(Ⅱ)

$$\dfrac{\dfrac{n(S_A)=2 \qquad n(X_A)=1}{n(S_A)-n(X_A)=2-1}\,(==)}{n(S_A)-n(X_A)=1}\,(\text{演推})$$

$$\dfrac{\text{定理６}: n(Y)=n(S)-n(X) \qquad n(X)=n(X_A) \quad n(Y)=n(Y_A) \quad n(S)=n(S_A)}{n(Y_A)=n(S_A)-n(X_A)}\,(=\text{代入})$$

$$\dfrac{n(Y_A)=n(S_A)-n(X_A) \qquad n(S_A)-n(X_A)=1}{n(Y_A)=1}\,(=\text{代入})$$

$$\dfrac{\dfrac{n(S_B)=6 \qquad n(X_B)=3}{n(S_B)-n(X_B)=6-3}\,(==)}{n(S_B)-n(X_B)=3}\,(\text{演推})$$

$$\dfrac{\text{定理６}: n(Y)=n(S)-n(X) \qquad n(X)=n(X_B) \quad n(Y)=n(Y_B) \quad n(S)=n(S_B)}{n(Y_B)=n(S_B)-n(X_B)}\,(=\text{代入})$$

$$\dfrac{n(Y_B)=n(S_B)-n(X_B) \qquad n(S_B)-n(X_B)=3}{n(Y_B)=3}\,(=\text{代入})$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{n(Y_A)=1 \qquad 1<3}{n(Y_A)<3}\,(\text{推移律}) \qquad \dfrac{n(Y_B)=3}{3=n(Y_B)}\,(\text{対称律})}{C_3 : n(Y_A)<n(Y_B)}\,(\text{推移律}) \qquad n(Y_A)<n(Y_B) \rightarrow P(X_A)>P(X_B)}{D_2 : P(X_A)>P(X_B)}\,(\rightarrow\text{除})$$

水準１(段階 1B)の児童は，２つのくじの当たりくじの本数が等しい場合，２つのくじの総数を考慮し,「くじの総数が少ない方が，当たりやすい」という考えに基づいて，２つのくじの当たりやす

さの関係を判断している。つまり，２つのくじ間において，当たりくじの本数とくじの総数のいずれか等しい場合は，当たりくじの本数とくじの総数のいずれか等しくない方を選択し，２つのくじの当たりやすさの関係を判断している。また，２つのくじ間において，当たりくじの本数とくじの総数のいずれも等しくない場合は，２つのくじの総数を考慮し，「くじの総数が少ない方が，当たりやすい」という考えに基づいて，２つのくじの当たりやすさの関係を判断している。さらに，１つのくじ内において，くじの総数と当たりくじの本数の差（はずれくじの本数）に着目し，「はずれくじの本数が少ない方が，当たりやすい」という考えに基づいて，２つのくじの当たりやすさの関係を判断している。

④水準1C

調査問題	仮定の候補	正答	結論	正誤
問題２	$n(X_A)=1$，$n(X_B)=3$，$n(S_A)=2$，$n(S_B)=6$	D_1	D_1	正答

児童の考え方

$$\cfrac{\cfrac{n(S_A)=2 \qquad n(X_A)=1}{n(S_A)-n(X_A)=2-1}\ (==)}{n(S_A)-n(X_A)=1}\ (\text{演推})$$

$$\cfrac{\text{定理6}: n(Y)=n(S)-n(X) \qquad n(X)=n(X_A) \quad n(Y)=n(Y_A) \quad n(S)=n(S_A)}{n(Y_A)=n(S_A)-n(X_A)}\ (=\text{代入})$$

$$\cfrac{n(Y_A)=n(S_A)-n(X_A) \qquad n(S_A)-n(X_A)=1}{n(Y_A)=1}\ (=\text{代入})$$

$$\cfrac{\cfrac{n(X_A)=1 \qquad n(Y_A)=1}{n(X_A)=n(Y_A)}\ (\text{推移律}) \qquad \mathbf{n(X_A)=n(Y_A)\rightarrow H(X_A)}}{H(X_A): P(X_A)=1/2}\ (\rightarrow\text{除})$$

$$\cfrac{\cfrac{n(S_B)=6 \qquad n(X_B)=3}{n(S_B)-n(X_B)=6-3}\ (==)}{n(S_B)-n(X_B)=3}\ (\text{演推})$$

$$\cfrac{\text{定理6}: n(Y)=n(S)-n(X) \qquad n(X)=n(X_B) \quad n(Y)=n(Y_B) \quad n(S)=n(S_B)}{n(Y_B)=n(S_B)-n(X_B)}\ (=\text{代入})$$

$$\cfrac{n(Y_B)=n(S_B)-n(X_B) \qquad n(S_B)-n(X_B)=3}{n(Y_B)=3}\ (=\text{代入})$$

$$\cfrac{\cfrac{n(X_B)=3 \qquad n(Y_B)=3}{n(X_B)=n(Y_B)}\ (\text{推移律}) \qquad \mathbf{n(X_B)=n(Y_B)\rightarrow H(X_B)}}{H(X_B): P(X_B)=1/2}\ (\rightarrow\text{除})$$

$$\cfrac{\cfrac{H(X_A) \quad H(X_B)}{H(X_A)\wedge H(X_B)}\ (\wedge\text{入}) \qquad \mathbf{H(X_A)\wedge H(X_B)\rightarrow P(X_A)=P(X_B)}}{D_1: P(X_A)=P(X_B)}\ (\rightarrow\text{除})$$

調査問題	仮定の候補	正答	結論	正誤
問題５	$n(X_A)=3$，$n(X_B)=6$，$n(S_A)=4$，$n(S_B)=8$	D_1	D_3	誤答

児童の考え方

$$\dfrac{\dfrac{n(S_A)=4 \qquad n(X_A)=3}{n(S_A)-n(X_A)=4-3}\ (==)}{n(S_A)-n(X_A)=1}\ (\text{演推})$$

$$\dfrac{\text{定理6}: n(Y)=n(S)-n(X) \qquad n(X)=n(X_A) \quad n(Y)=n(Y_A) \quad n(S)=n(S_A)}{n(Y_A)=n(S_A)-n(X_A)}\ (=\text{代入})$$

$$\dfrac{n(Y_A)=n(S_A)-n(X_A) \qquad n(S_A)-n(X_A)=1}{n(Y_A)=1}\ (=\text{代入})$$

$$\dfrac{\dfrac{n(X_A)=3 \qquad 3>1}{n(X_A)>1}\ (\text{推移律}) \qquad \dfrac{n(Y_A)=1}{1=n(Y_A)}\ (\text{対称律})}{n(X_A)>n(Y_A)}\ (\text{推移律})$$

$$\dfrac{n(X_A)>n(Y_A) \qquad n(X_A)>n(Y_A)\rightarrow W(X_A)}{W(X_A): P(X_A)>1/2}\ (\rightarrow\text{除})$$

$$\dfrac{\dfrac{n(S_B)=8 \qquad n(X_B)=6}{n(S_B)-n(X_B)=8-6}\ (==)}{n(S_B)-n(X_B)=2}\ (\text{演推})$$

$$\dfrac{\text{定理6}: n(Y)=n(S)-n(X) \qquad n(X)=n(X_B) \quad n(Y)=n(Y_B) \quad n(S)=n(S_B)}{n(Y_B)=n(S_B)-n(X_B)}\ (=\text{代入})$$

$$\dfrac{n(Y_B)=n(S_B)-n(X_B) \qquad n(S_B)-n(X_B)=2}{n(Y_B)=2}\ (=\text{代入})$$

$$\dfrac{\dfrac{n(X_B)=6 \qquad 6>2}{n(X_B)>2}\ (\text{推移律}) \qquad \dfrac{n(Y_B)=2}{2=n(Y_B)}\ (\text{対称律})}{n(X_B)>n(Y_B)}\ (\text{推移律})$$

$$\dfrac{n(X_B)>n(Y_B) \qquad n(X_B)>n(Y_B)\rightarrow W(X_B)}{W(X_B): P(X_B)>1/2}\ (\rightarrow\text{除})$$

$$\dfrac{\dfrac{W(X_A) \quad W(X_B)}{W(X_A)\wedge W(X_B)}\ (\wedge\text{入}) \qquad W(X_A)\wedge W(X_B)\rightarrow(n(X_A)-n(Y_A)<n(X_B)-n(Y_B)\rightarrow P(X_A)<P(X_B))}{n(X_A)-n(Y_A)<n(X_B)-n(Y_B)\rightarrow P(X_A)<P(X_B)}\ (\rightarrow\text{除})$$

$$\cfrac{\cfrac{n(X_A)=3 \qquad n(Y_A)=1}{n(X_A)-n(Y_A)=3-1}\,(==)}{n(X_A)-n(Y_A)=2}\,\text{(演推)}$$

$$\cfrac{\cfrac{n(X_B)=6 \qquad n(Y_B)=2}{n(X_B)-n(Y_B)=6-2}\,(==)}{n(X_B)-n(Y_B)=4}\,\text{(演推)}$$

$$\cfrac{\cfrac{n(X_A)-n(Y_A)=2 \qquad 2<4}{n(X_A)-n(Y_A)<4}\,\text{(推移律)} \qquad \cfrac{n(X_B)-n(Y_B)=4}{4=n(X_B)-n(Y_B)}\,\text{(対称律)}}{n(X_A)-n(Y_A)<n(X_B)-n(Y_B)}\,\text{(推移律)}$$

$$\cfrac{n(X_A)-n(Y_A)<n(X_B)-n(Y_B) \qquad \mathbf{n(X_A)-n(Y_A)<n(X_B)-n(Y_B)\to P(X_A)<P(X_B)}}{D_3 : P(X_A)<P(X_B)}\,(\to\text{除})$$

水準１(段階 1C)の児童は,「半分」という言葉を使用してはいるが，割合の意味ではない。当たりくじがくじ全体の半分とは，１つのくじ内において，当たりくじの本数とはずれくじの本数が等しいという意味であると考えられる。したがって，当たりくじがくじ全体の半分より多いとは，当たりくじの本数がはずれくじの本数よりも多いことを意味し,当たりくじがくじ全体の半分より少ないとは,はずれくじの本数が当たりくじの本数よりも多いことを意味していると考えられる。つまり，１つのくじ内において，当たりくじの本数とはずれくじの本数に着目し，次の３つのパターンにより，２つのくじの当たりやすさの関係を判断している。

○「当たりくじの本数とはずれくじの本数が同じなら，当たりくじとはずれくじが同じくらい出やすい」という考えに基づいて，くじ A もくじ B も当たりくじとはずれくじが同じくらい出やすいと判断することにより，くじ A もくじ B も同じだけ当たりやすいと判断する。
○「当たりくじの本数がはずれくじの本数より少ないなら，はずれくじの方が出やすい」という考えに基づいて，くじ A ははずれくじの方が出やすいと判断し,「当たりくじの本数とはずれくじの本数が同じなら，当たりくじとはずれくじが同じくらい出やすい」という考えに基づいて，くじ B は当たりくじとはずれくじが同じくらい出やすいと判断することにより，くじ B の方が当たりやすいと判断する。
○「当たりくじの本数とはずれくじの本数が同じなら，当たりくじとはずれくじが同じくらい出やすい」という考えに基づいて，くじ A は当たりくじとはずれくじが同じくらい出やすいと判断し,「当たりくじの本数がはずれくじの本数より多いなら，当たりくじの方が出やすい」という考えに基づいて，くじ B は当たりくじの方が出やすいと判断することにより，くじ B の方が当たりやすいと判断する。

くじ A もくじ B も当たりくじの本数がはずれくじの本数より多い場合，上記の３つのパターンにより，２つのくじの当たりやすさの関係を判断できない。この場合，１つのくじ内において，当たりくじの本数とはずれくじの本数の差に着目し，２つのくじの当たりやすさの関係を判断している。

⑤水準２

調査問題	仮定の候補	正答	結論	正誤
問題５	$n(X_A)=3$，$n(X_B)=6$，$n(S_A)=4$，$n(S_B)=8$	D_1	D_1	正答
児童の考え方				

（Ⅰ）

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{n(S_A)=4 \qquad 2=2}{n(S_A)\times 2=4\times 2}\,(==)}{n(S_A)\times 2=8}\,(\text{演推}) \qquad \dfrac{n(S_B)=8}{8=n(S_B)}\,(\text{対称律})}{n(S_A)\times 2=n(S_B)}\,(\text{推移律})$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{n(X_A)=3 \qquad 2=2}{n(X_A)\times 2=3\times 2}\,(==)}{n(X_A)\times 2=6}\,(\text{演推}) \qquad \dfrac{n(X_B)=6}{6=n(X_B)}\,(\text{対称律})}{n(X_A)\times 2=n(X_B)}\,(\text{推移律})$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{n(S_A)\times 2=n(S_B) \qquad n(X_A)\times 2=n(X_B)}{n(S_A)\times 2=n(S_B)\wedge n(X_A)\times 2=n(X_B)}\,(\wedge\text{入})}{n(X_A)\times 2=n(X_B)}\,(\wedge\text{除}) \qquad n(X_A)\times 2=n(X_B)\to P(X_A)=P(X_B)}{D_1 : P(X_A)=P(X_B)}\,(\to\text{除})$$

水準２の児童は，２つのくじの総数を揃えるために，２つのくじの総数の最小公倍数に着目している。２つのくじの総数の最小公倍数が等しいことから，２つのくじの当たりくじの本数を考慮し，２つのくじの当たりやすさの関係を判断している。したがって，２つのくじ間に着目した場合，２つのくじの総数の最小公倍数に揃えることに意識が向くと考えられる。また，１つのくじ内のくじの総数に対する当たりくじの本数の割合により，２つのくじの当たりやすさの関係を判断している。したがって，１つのくじ内に着目した場合，くじの総数を１に揃えることに意識が向くと考えられる。

3.3.2　比較量に関する状況

割合に関する手続き的知識の「比較量に関する状況」の調査問題は，以下の問題例ように仮定と結論からなる。仮定には，割合(当たりやすさ)に関する条件と基準量(くじ全体)に関する条件が含まれる。

〔問題例〕

くじ引きで，「当たりくじの数」と「はずれくじの数」を合わせたくじの数を「全体のくじの数」とします。

くじ引きで，くじを１本引くときの「当たりくじ」の出やすさを「当たりやすさ」と言います。

くじを１本引くとき，必ず「当たりくじ」が出る場合の「当たりやすさ」を１とします。

くじ引きで，「当たりやすさ」が高いことを「当たりやすい」と言います。

「当たりくじ」と「はずれくじ」の入った２つのくじ A，B があります。

くじ A は，「全体のくじの数」が５本，「当たりやすさ」が 0.6 です。
くじ B は，「全体のくじの数」が５本，「当たりやすさ」が 0.2 です。　【仮定】

くじ A とくじ B のどちらのくじの方が，「当たりくじの数」が多いですか。またはくじ A もくじ B も「当たりくじの数」が同じですか。正しいと思う□の中に１つ○をつけなさい。

□	□	□	【結論】
くじ A の方が「当たりくじの数」が多い	くじ A も B も「当たりくじの数」が同じ	くじ B の方が「当たりくじの数」が多い	

割合に関する手続き的知識の「比較量に関する状況」の調査問題は，12 の問題から構成されている。全て正答が１つに定まる問題である。仮定の条件から，命題論理により推論規則及び推論法則に基づいて推論を行い，結論として証明される条件を示す。ここでは，問題１の証明を行う。問題２～問題 12 の証明は付録 12 に掲載。

【問題１】

仮定	結論
$n(S_A)=5$，$n(S_B)=5$，$P(X_A)=0.6$，$P(X_B)=0.2$	B_2

証明

$$\dfrac{\text{定理３：}n(Z)=n(S)\times P(Z)\qquad n(Z)=n(X_A)\quad n(S)=n(S_A)\quad P(Z)=P(X_A)}{n(X_A)=n(S_A)\times P(X_A)}\ (\text{＝代入})$$

$$\dfrac{\dfrac{n(X_A)=n(S_A)\times P(X_A)\qquad n(S_A)=5\qquad P(X_A)=0.6}{n(X_A)=5\times 0.6}\ (\text{＝代入})}{n(X_A)=3}\ (\text{演推})$$

$$\frac{\text{定理3：} n(Z) = n(S) \times P(Z) \qquad n(Z) = n(X_B) \quad n(S) = n(S_B) \quad P(Z) = P(X_B)}{n(X_B) = n(S_B) \times P(X_B)} \text{（＝代入）}$$

$$\cfrac{\dfrac{n(X_B) = n(S_B) \times P(X_B) \qquad n(S_B) = 5 \qquad P(X_B) = 0.2}{n(X_B) = 5 \times 0.2} \text{（＝代入）}}{n(X_B) = 1} \text{（演推）}$$

$$\cfrac{\dfrac{n(X_A) = 3 \qquad 3 > 1}{n(X_A) > 1} \text{（推移律）} \qquad \dfrac{n(X_B) = 1}{1 = n(X_B)} \text{（対称律）}}{B_2 : n(X_A) > n(X_B)} \text{（推移律）}$$

結論として証明されるのは，B_2 である。

(2)調査対象

第５学年の児童 188 名，第６学年の児童 203 名，計 391 名の児童を対象に調査を実施した。第５学年の児童は「割合」の単元が未習であり，第６学年の児童は「割合」の単元が既習である。

(3)調査結果の分析と考察

1)水準区分と段階区分

調査問題が妥当であるかどうかを調べるために，スケログラム分析を行った。区分線を引いた児童の正誤パターンの一部及び合計得点，エラー，各問題の正答数，誤答数，正答数と誤答数の合計，正答率，誤答率を表 3-20 に示す。

表3-20　割合に関する手続き的知識の「比較量に関する状況」の児童の正誤パターン

児童番号	問題1	問題4	問題11	問題9	問題10	問題8	問題7	問題2	問題5	問題6	問題12	問題3	合計得点	エラー
5022	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1
5074	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1
6001	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1
6064	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	2	2
5086	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	2	2
5082	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	2	2
5038	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	2	1
6007	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	2	1
5053	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	2	1
6086	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0
6023	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0
6130	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0
5072	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	3	1
5069	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	3	1
5146	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	3	1
5119	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	3	4
5084	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	3	2
6010	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	0
6061	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	4	1
5028	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	4	1

5081	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	4	1
5030	0	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	4	6
5010	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	4	4
5023	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	4	0
5054	1	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	4	3
5008	1	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	4	3
5139	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	4	3
5110	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	1	0	5	6
5085	1	0	0	1	1	0	1	1	0	0	0	0	5	4
5133	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	5	4
5097	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	5	0
5137	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	5	0
5166	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	5	0
5034	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	0	5	5
5015	1	0	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	5	3
5021	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	5	3
6012	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	6	2
6014	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	1	0	6	2
6049	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	6	0
6006	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	6	7
5035	1	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	6	1
6008	1	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	6	5
5181	1	1	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0	6	3
6069	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	6	1
6118	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	6	1
5160	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	1	0	6	6
6009	1	1	0	1	0	0	1	1	1	0	0	0	6	4
5083	1	1	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	6	4
6202	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	7	1
6196	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	7	1
5184	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0	7	1
5070	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	7	2
5014	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	7	4
5012	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	7	2
6146	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	0	8	3
5047	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	1	0	8	3
5037	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	8	1
6019	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1	0	1	8	4
5019	1	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	8	4
5066	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	8	2
5180	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	9	1
5185	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	9	1
6193	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	9	1
6128	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	9	2
6015	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	9	2

5091	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	9	2
5154	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	11	0
5174	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	11	0
5175	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	11	0
6048	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	11	1
6052	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	11	1
6053	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	11	1
5182	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	12	0
5188	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	12	0
5189	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	12	0
正答数	375	352	300	297	290	280	279	270	268	266	257	222	エラー数の合計：370	
誤答数	16	39	91	94	101	111	112	121	123	125	134	169		
合計	391	391	391	391	391	391	391	391	391	391	391	391		
正答率	0.959	0.900	0.767	0.760	0.742	0.716	0.714	0.691	0.685	0.680	0.657	0.568		
誤答率	0.041	0.100	0.233	0.240	0.258	0.284	0.286	0.309	0.315	0.320	0.343	0.432		

表 3-20 を基に，再現性係数(CR)，最小限界再現性係数(MMR)，正比率(PPR)を算出すると，CR ＝ 0.921，MMR ＝ 0.736，PPR ＝ 0.701 であった。CR ＞ 0.9，MMR ＜ 0.8，PPR ＞ 0.7 であるので，調査問題の妥当性は保証された。さらに，表 3-20 を基に，Kuder-Richardson の信頼性係数 α_{20} を算出すると，α_{20} ＝ 0.881 であった。α_{20} ＞ 0.7 であるので，調査問題の信頼性は保証された。そこで，各問題における児童の考え方に関してプロトコル分析を行った結果，表 3-20 における児童番号 5022 から児童番号 5082, 児童番号 5038 から児童番号 6118, 児童番号 5160 から児童番号 5037, 児童番号 6019 から児童番号 5189 に属する児童の考え方には，それぞれ特徴があった。児童の考え方の構造的変化としての水準及び水準内における児童の考え方の質的変化としての段階という観点から，表 3-21 に示す水準及び段階の区分を行った。また，各水準及び段階における典型的なプロトコルを示す。

【水準区分】
水準０：比較に関する考えの欠如
水準１：相等，大小，差に基づいた加法的な考えによる比較
水準２：割合に基づいた乗法的な考えによる比較
【水準１内における段階区分】
段階 1A：２つのくじ間における当たりやすさに着目
段階 1B：２つのくじ間における当たりやすさとくじの総数に着目

表3-21　割合に関する手続き的知識の「比較量に関する状況」の水準区分と段階区分

水準	段階	調査問題	仮定	正答	正答数
0					
1	1A	問題１	$n(S_A)=5$，$n(S_B)=5$，$P(X_A)=0.6$，$P(X_B)=0.2$	B_2	375
		問題４	$n(S_A)=4$，$n(S_B)=4$，$P(X_A)=0.25$，$P(X_B)=0.75$	B_3	352
		問題 11	$n(S_A)=4$，$n(S_B)=5$，$P(X_A)=0.75$，$P(X_B)=0.8$	B_3	300
		問題９	$n(S_A)=4$，$n(S_B)=5$，$P(X_A)=0.5$，$P(X_B)=0.6$	B_3	297
		問題 10	$n(S_A)=8$，$n(S_B)=10$，$P(X_A)=0.25$，$P(X_B)=0.3$	B_3	290
		問題８	$n(S_A)=4$，$n(S_B)=6$，$P(X_A)=0.25$，$P(X_B)=0.5$	B_3	280
		問題７	$n(S_A)=2$，$n(S_B)=5$，$P(X_A)=0.5$，$P(X_B)=0.8$	B_3	279
	1B	問題２	$n(S_A)=2$，$n(S_B)=6$，$P(X_A)=0.5$，$P(X_B)=0.5$	B_3	270
		問題５	$n(S_A)=4$，$n(S_B)=8$，$P(X_A)=0.75$，$P(X_B)=0.75$	B_3	268
2		問題６	$n(S_A)=4$，$n(S_B)=5$，$P(X_A)=0.5$，$P(X_B)=0.4$	B_1	266
		問題 12	$n(S_A)=10$，$n(S_B)=6$，$P(X_A)=0.4$，$P(X_B)=0.5$	B_2	256
		問題３	$n(S_A)=4$，$n(S_B)=5$，$P(X_A)=0.75$，$P(X_B)=0.6$	B_1	221

①水準０

〔５年児童 YA 〕

問題１：「全体のくじの数が同じだから，当たりくじの数も同じ。」【誤答】

②水準１(段階1A)

〔５年児童 MN 〕

問題１：「当たりやすさがくじ A の方が大きいから，くじ A の方が当たりくじの数が多い。」【正答】
問題４：「当たりやすさがくじ B の方が大きいから，くじ B の方が当たりくじの数が多い。」【正答】
問題 11：「当たりやすさがくじ B の方が大きいから，くじ B の方が当たりくじの数が多い。」【正答】
問題９：「当たりやすさがくじ B の方が大きいから，くじ B の方が当たりくじの数が多い。」【正答】
問題 10：「当たりやすさがくじ B の方が大きいから，くじ B の方が当たりくじの数が多い。」【正答】
問題８：「当たりやすさがくじ B の方が大きいから，くじ B の方が当たりくじの数が多い。」【正答】
問題７：「当たりやすさがくじ B の方が大きいから，くじ B の方が当たりくじの数が多い。」【正答】
問題２：「当たりやすさが同じだから，当たりくじの数も同じ。」【誤答】

③水準１(段階1B)

〔６年児童 MT 〕

問題２：「当たりやすさが同じだから，くじ全体の数が多いくじ B の方が当たりくじの数が多い。」【正答】
問題５：「当たりやすさが同じだから，くじ全体の数が多いくじ B の方が当たりくじの数が多い。」【正答】
問題６：「当たりやすいくじ A の方が当たりくじの数が多い。」【誤答】

④水準２

〔６年児童 CU 〕

問題６：「くじ A は，$4 \times 0.5 = 2$，当たりくじが２本。くじ B は，$5 \times 0.4 = 2$，当たりくじが２本。当たりくじの数は同じ。」【正答】

問題 12：「くじ A は，$10 \times 0.4 = 4$，当たりくじが４本。くじ B は，$6 \times 0.5 = 3$，当たりくじが３本。くじ A の方が当たりくじの数が多い。」【正答】

問題３：「くじ A は，$4 \times 0.75 = 3$，当たりくじが３本。くじ B は，$5 \times 0.6 = 3$，当たりくじが３本。当たりくじの数は同じ。」【正答】

2) 典型的なプロトコルの記号化

各水準及び段階に属する児童が行った推論の記号化を行う。また，各水準及び段階の典型的なプロトコルにおける児童固有の考えについて考察した内容を示す。児童固有の考えは，推論図式において強調表示している。ここでは，各水準及び段階の境界に位置する問題における考え方を示す。他の問題における考え方は付録 13 に掲載。

①水準０

<table>
<tr><th>調査問題</th><th>仮定の候補</th><th>正答</th><th>結論</th><th>正誤</th></tr>
<tr><td>問題１</td><td>$n(S_A)=5$，$n(S_B)=5$，$P(X_A)=0.6$，$P(X_B)=0.2$</td><td>B_2</td><td>B_1</td><td>誤答</td></tr>
<tr><td colspan="5">児童の考え方</td></tr>
<tr><td colspan="5">$$\dfrac{\dfrac{n(S_A)=5 \qquad \dfrac{n(S_B)=5}{5=n(S_B)}\,(\text{対称律})}{n(S_A)=n(S_B)}\,(\text{推移律}) \qquad \mathbf{n(S_A)=n(S_B)\to n(X_A)=n(X_B)}}{B_1 : n(X_A)=n(X_B)}\,(\to\text{除})$$</td></tr>
</table>

水準０の児童は，２つのくじの総数だけに着目し，「くじの総数が同じなら，当たりくじの本数も同じ」という考えに基づいて，２つのくじの当たりくじの本数の関係を判断しており，２つのくじの当たりやすさを考慮していない。これは，くじを引くという場面及び当たりやすさに関する理解が不足していることに起因すると考えられる。

②水準1A

<table>
<tr><th>調査問題</th><th>仮定の候補</th><th>正答</th><th>結論</th><th>正誤</th></tr>
<tr><td>問題１</td><td>$n(S_A)=5$，$n(S_B)=5$，$P(X_A)=0.6$，$P(X_B)=0.2$</td><td>B_2</td><td>B_2</td><td>正答</td></tr>
<tr><td colspan="5">児童の考え方</td></tr>
<tr><td colspan="5">$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{P(X_A)=0.6 \qquad 0.6>0.2}{P(X_A)>0.2}\,(\text{推移律}) \qquad \dfrac{P(X_B)=0.2}{0.2=P(X_B)}\,(\text{対称律})}{P(X_A)>P(X_B)}\,(\text{推移律}) \qquad \mathbf{P(X_A)>P(X_B)\to n(X_A)>n(X_B)}}{B_2 : n(X_A)>n(X_B)}\,(\to\text{除})$$</td></tr>
<tr><th>調査問題</th><th>仮定の候補</th><th>正答</th><th>結論</th><th>正誤</th></tr>
<tr><td>問題２</td><td>$n(S_A)=2$，$n(S_B)=6$，$P(X_A)=0.5$，$P(X_B)=0.5$</td><td>B_3</td><td>B_1</td><td>誤答</td></tr>
<tr><td colspan="5">児童の考え方</td></tr>
<tr><td colspan="5">$$\dfrac{\dfrac{P(X_A)=0.5 \qquad \dfrac{P(X_B)=0.5}{0.5=P(X_B)}\,(\text{対称律})}{P(X_A)=P(X_B)}\,(\text{推移律}) \qquad \mathbf{P(X_A)=P(X_B)\to n(X_A)=n(X_B)}}{B_1 : n(X_A)=n(X_B)}\,(\to\text{除})$$</td></tr>
</table>

水準１(段階 1A)の児童は，２つのくじの当たりやすさだけに着目し，「当たりやすい方が，当たりくじの本数が多い」「同じくらい当たるなら，当たりくじの本数は同じ」という考えに基づいて，２つのくじの当たりくじの本数の関係を判断しており，２つのくじの総数を考慮していない。

③水準1B

調査問題	仮定の候補	正答	結論	正誤
問題２	$n(S_A)=2$，$n(S_B)=6$，$P(X_A)=0.5$，$P(X_B)=0.5$	B_3	B_3	正答

児童の考え方

$$\dfrac{P(X_A)=0.5 \quad \dfrac{P(X_B)=0.5}{0.5=P(X_B)}\text{（対称律）}}{D_1: n(X_A)=n(X_B)}\text{（推移律）}$$

$$\dfrac{\dfrac{n(S_A)=2 \quad 2<6}{n(S_A)<6}\text{（推移律）} \quad \dfrac{n(S_B)=6}{6=n(S_B)}\text{（対称律）}}{A_3: n(S_A)<n(S_B)}\text{（推移律）}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{D_1 \quad A_3}{D_1 \wedge A_3}\text{（∧入）}}{A_3: n(S_A)<n(S_B)}\text{（∧除）} \quad n(S_A)<n(S_B)\rightarrow n(X_A)<n(X_B)}{B_3: n(X_A)<n(X_B)}\text{（→除）}$$

調査問題	仮定の候補	正答	結論	正誤
問題６	$n(S_A)=4$，$n(S_B)=5$，$P(X_A)=0.5$，$P(X_B)=0.4$	B_1	B_2	誤答

児童の考え方

$$\dfrac{\dfrac{P(X_A)=0.5 \quad 0.5>0.4}{P(X_A)>0.4}\text{（推移律）} \quad \dfrac{P(X_B)=0.4}{0.4=P(X_B)}\text{（対称律）}}{D_2: P(X_A)>P(X_B)}\text{（推移律）}$$

$$\dfrac{\dfrac{n(S_A)=4 \quad 4<5}{n(S_A)<5}\text{（推移律）} \quad \dfrac{n(S_B)=5}{5=n(S_B)}\text{（対称律）}}{A_3: n(S_A)<n(S_B)}\text{（推移律）}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{D_2 \quad A_3}{D_2 \wedge A_3}\text{（∧入）}}{D_2: P(X_A)>P(X_B)}\text{（∧除）} \quad P(X_A)>P(X_B)\rightarrow n(X_A)>n(X_B)}{B_2: n(X_A)>n(X_B)}\text{（→除）}$$

水準１(段階 1B)の児童は，２つのくじの当たりやすさが等しい場合，２つのくじの総数を考慮し，「くじの総数が多い方が，当たりくじの本数は多い」という考えに基づいて，２つのくじの当たりくじの本数の関係を判断している。つまり，２つのくじ間において，当たりやすさとくじの総数のいずれか等しい場合は，当たりやすさとくじの総数のいずれか等しくない方を選択し，２つのくじの当たりくじの本数の関係を判断している。また，２つのくじ間において，当たりやすさとくじの総数のいずれも等しくない場合は，２つのくじの当たりやすさを考慮し，「当たりやすい方が，当たりくじの本数が多い」という考えに基づいて，２つのくじの当たりくじの本数の関係を判断している。

④水準２

調査問題	仮定の候補	正答	結論	正誤
問題６	$n(S_A)=4$，$n(S_B)=5$，$P(X_A)=0.5$，$P(X_B)=0.4$	B_1	B_1	正答

児童の考え方

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{n(S_A)=4 \qquad P(X_A)=0.5}{n(S_A)\times P(X_A)=4\times 0.5}\text{(＝＝)}}{n(S_A)\times P(X_A)=2}\text{（演推）} \qquad \cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{n(S_B)=5 \qquad P(X_B)=0.4}{n(S_B)\times P(X_B)=5\times 0.4}\text{(＝＝)}}{n(S_B)\times P(X_B)=2}\text{（演推）}}{2=n(S_B)\times P(X_B)}\text{（対称律）}}{n(S_A)\times P(X_A)=n(S_B)\times P(X_B)}\text{（推移律）}$$

$$\cfrac{\cfrac{\text{定理３：}n(Z)=(S)\times P(Z) \qquad n(Z)=n(X_A) \quad n(S)=n(S_A) \quad P(Z)=P(X_A)}{n(X_A)=n(S_A)\times P(X_A)}\text{（＝代入）}}{n(S_A)\times P(X_A)=n(X_A)}\text{（対称律）}$$

$$\cfrac{\cfrac{\text{定理３：}n(Z)=(S)\times P(Z) \qquad n(Z)=n(X_B) \quad n(S)=n(S_B) \quad P(Z)=P(X_B)}{n(X_B)=n(S_B)\times P(X_B)}\text{（＝代入）}}{n(S_B)\times P(X_B)=n(X_B)}\text{（対称律）}$$

$$\cfrac{\mathbf{n(S_A)\times P(X_A)=n(S_B)\times P(X_B)} \qquad n(S_A)\times P(X_A)=n(X_A) \quad n(S_B)\times P(X_B)=n(X_B)}{B_1:n(X_A)=n(X_B)}\text{（＝代入）}$$

水準２の児童は，１つのくじ内において，当たりくじの本数がくじの総数の何倍に当たるかを考え，くじの総数を小数倍することにより，２つのくじの当たりくじの本数の関係を判断している。

3.3.3　基準量に関する状況

割合に関する手続き的知識の「基準量に関する状況」の調査問題は，以下の問題例ように仮定と結論からなる。仮定には，割合(当たりやすさ)に関する条件と比較量(当たりくじ)に関する条件が含まれる。

〔問題例〕

くじ引きで，「当たりくじの数」と「はずれくじの数」を合わせたくじの数を「全体のくじの数」とします。

くじ引きで，くじを１本引くときの「当たりくじ」の出やすさを「当たりやすさ」と言います。

くじを１本引くとき，必ず「当たりくじ」が出る場合の「当たりやすさ」を１とします。

くじ引きで，「当たりやすさ」が高いことを「当たりやすい」と言います。

「当たりくじ」と「はずれくじ」の入った２つのくじ A，B があります。

くじ A は，「当たりやすさ」が 0.6，「当たりくじの数」が３本です。 くじ B は，「当たりやすさ」が 0.2，「当たりくじの数」が１本です。	仮定】

くじ A とくじ B のどちらのくじの方が，「全体のくじの数」が多いですか。またはくじ A もくじ B も「全体のくじの数」が同じですか。正しいと思う□の中に１つ○をつけなさい。

□	□	□	【結論】
くじ A の方が 「全体のくじの数」 が多い	くじ A も B も 「全体のくじの数」 が同じ	くじ B の方が 「全体のくじの数」 が多い	

割合に関する手続き的知識の「基準量に関する状況」の調査問題は，12 の問題から構成されている。全て正答が１つに定まる問題である。仮定の条件から，命題論理により推論規則及び推論法則に基づいて推論を行い，結論として証明される条件を示す。ここでは，問題１の証明を行う。問題２～問題 12 の証明は付録 14 に掲載。

【問題１】

仮定	結論
$n(X_A)=3$，$n(X_B)=1$，$P(X_A)=0.6$，$P(X_B)=0.2$	A_1

証明

$$\frac{\text{定理4：}n(S)=n(Z)\div P(Z) \qquad n(Z)=n(X_A) \quad n(S)=n(S_A) \quad P(Z)=P(X_A)}{n(S_A)=n(X_A)\div P(X_A)}\ (=\text{代入})$$

$$\cfrac{n(S_A)=n(X_A)\div P(X_A) \qquad n(X_A)=3 \qquad P(X_A)=0.6}{\cfrac{n(S_A)=3\div 0.6}{n(S_A)=5}\ (\text{演推})}\ (=\text{代入})$$

$$\frac{\text{定理4}：n(S)=n(Z)\div P(Z) \qquad n(Z)=n(X_B) \quad n(S)=n(S_B) \quad P(Z)=P(X_B)}{n(S_B)=n(X_B)\div P(X_B)}\ (=\text{代入})$$

$$\cfrac{\cfrac{n(S_B)=n(X_B)\div P(X_B) \qquad n(X_B)=1 \qquad P(X_B)=0.2}{n(S_B)=1\div 0.2}\ (=\text{代入})}{n(S_B)=5}\ (\text{演推})$$

$$\cfrac{n(S_A)=5 \qquad \cfrac{n(S_B)=5}{5=n(S_B)}\ (\text{対称律})}{A_1：n(S_A)=n(S_B)}\ (\text{推移律})$$

結論として証明されるのは，A_1 である。

(2) 調査対象

第５学年の児童 207 名，第６学年の児童 220 名，計 427 名の児童を対象に調査を実施した。第５学年の児童は「割合」の単元が未習であり，第６学年の児童は「割合」の単元が既習である。

(3) 調査結果の分析と考察

1) 水準区分と段階区分

調査問題が妥当であるかどうかを調べるために，スケログラム分析を行った。区分線を引いた児童の正誤パターンの一部及び合計得点，エラー，各問題の正答数，誤答数，正答数と誤答数の合計，正答率，誤答率を表 3-22 に示す。

表3-22　割合に関する手続き的知識の「基準量に関する状況」の児童の正誤パターン

児童番号	問題2	問題5	問題7	問題11	問題8	問題9	問題10	問題12	問題3	問題6	問題1	問題4	合計得点	エラー
6095	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5023	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5057	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5029	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	3	3
5040	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	3	3
6030	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	3	3
6106	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	3	2
5081	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	3	2
5112	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	3	2
5018	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	3	2
5129	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	3	2
5028	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	3	2
5086	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	3	1
6011	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	3	1
6105	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	3	1
5164	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	4	4
5178	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	4	2
5111	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	4	2
6053	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	4	3
5002	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	4	5

5189	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	4	1
6107	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	5	2
6069	1	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	5	2
5077	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	5	2
5005	0	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	5	3
5039	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	5	5
6001	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	5	4
6039	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	5	4
5181	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	5	4
5182	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	6	1
6033	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	6	1
6216	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	6	1
5038	0	1	0	1	1	1	0	1	0	0	0	1	6	4
5136	0	1	1	0	0	1	0	1	0	0	1	1	6	6
5192	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0	1	6	4
6119	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	7	1
6135	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	7	1
5045	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	7	1
6032	0	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1	0	7	4
5043	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	7	2
5092	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	7	2
6035	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	8	1
5009	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	8	1
5207	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	8	1
6027	1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	8	4
6012	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	8	0
6023	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	8	0
5195	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	8	0
5202	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	8	0
5206	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	8	0
6203	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	8	3
5007	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	8	1
5011	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	8	1
5107	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	9	2
5199	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	9	2
5134	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	9	4
5032	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	9	3
5116	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	0	1	9	3
6190	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	9	3
6219	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	10	0
5024	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	10	0
5072	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	10	0
6056	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	10	1
6025	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	3
5119	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	10	3

6171	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	11	0
6172	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	11	0
5050	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	11	0
6137	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	11	1
6015	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	11	1
6218	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	11	1
5169	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	12	0
5198	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	12	0
5200	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	12	0
正答数	375	373	367	354	353	348	331	302	228	223	205	203	エラー数の合計：436	
誤答数	52	54	60	73	74	79	96	125	199	204	222	224		
合計	427	427	427	427	427	427	427	427	427	427	427	427		
正答率	0.878	0.874	0.859	0.829	0.827	0.815	0.775	0.707	0.534	0.522	0.480	0.475		
誤答率	0.122	0.124	0.141	0.171	0.173	0.185	0.225	0.293	0.466	0.478	0.520	0.525		

表 3-22 を基に，再現性係数（CR），最小限界再現性係数（MMR），正比率（PPR）を算出すると，CR ＝ 0.915，MMR ＝ 0.715，PPR ＝ 0.702 であった。CR ＞ 0.9，MMR ＜ 0.8，PPR ＞ 0.7 であるので，調査問題の妥当性は保証された。さらに，表 3-22 を基に，Kuder-Richardson の信頼性係数 α_{20} を算出すると，α_{20} ＝ 0.859 であった。α_{20} ＞ 0.7 であるので，調査問題の信頼性は保証された。そこで，各問題における児童の考え方に関してプロトコル分析を行った結果，表 3-22 における，児童番号 6095 から児童番号 6030，児童番号 6106 から児童番号 5206，児童番号 6203 から児童番号 5072，児童番号 6056 から児童番号 5200 に属する児童の考え方には，それぞれ特徴があった。児童の考え方の構造的変化としての水準及び水準内における児童の考え方の質的変化としての段階という観点から，表 3-23 に示す水準及び段階の区分を行った。また，各水準及び段階における典型的なプロトコルを示す。

【水準区分】
　水準０：比較に関する考えの欠如
　水準１：相等，大小，差に基づいた加法的な考えによる比較
　水準２：割合に基づいた乗法的な考えによる比較
【水準１内における段階区分】
　段階 1A：２つのくじ間における当たりくじの本数に着目
　段階 1B：２つのくじ間における当たりくじの本数と当たりやすさに着目

表3-23　割合に関する手続き的知識の「基準量に関する状況」の水準区分と段階区分

水準	段階	調査問題	仮定	正答	正答数
0					
1	1A	問題２	$n(X_A)=1$，$n(X_B)=3$，$P(X_A)=0.5$，$P(X_B)=0.5$	A_3	375
		問題５	$n(X_A)=3$，$n(X_B)=6$，$P(X_A)=0.75$，$P(X_B)=0.75$	A_3	373
		問題７	$n(X_A)=1$，$n(X_B)=4$，$P(X_A)=0.5$，$P(X_B)=0.8$	A_3	367
		問題 11	$n(X_A)=3$，$n(X_B)=4$，$P(X_A)=0.75$，$P(X_B)=0.8$	A_3	354
		問題８	$n(X_A)=1$，$n(X_B)=3$，$P(X_A)=0.25$，$P(X_B)=0.5$	A_3	353
		問題９	$n(X_A)=2$，$n(X_B)=3$，$P(X_A)=0.5$，$P(X_B)=0.6$	A_3	348
		問題 10	$n(X_A)=2$，$n(X_B)=3$，$P(X_A)=0.25$，$P(X_B)=0.3$	A_3	331
		問題 12	$n(X_A)=4$，$n(X_B)=3$，$P(X_A)=0.4$，$P(X_B)=0.5$	A_2	302
	1B	問題３	$n(X_A)=3$，$n(X_B)=3$，$P(X_A)=0.75$，$P(X_B)=0.6$	A_3	228
		問題６	$n(X_A)=2$，$n(X_B)=2$，$P(X_A)=0.5$，$P(X_B)=0.4$	A_3	223
2		問題１	$n(X_A)=3$，$n(X_B)=1$，$P(X_A)=0.6$，$P(X_B)=0.2$	A_1	205
		問題４	$n(X_A)=1$，$n(X_B)=3$，$P(X_A)=0.25$，$P(X_B)=0.75$	A_1	203

①水準０

〔５年児童 RO 〕

問題２：「当たりやすさが同じだから，くじ全体の数も同じ。」【誤答】

②水準１(段階1A)

〔５年児童 ET 〕

問題２：「当たりくじが多いくじ B の方が，全体のくじの数は多い。」【正答】
問題５：「当たりくじが多いくじ B の方が，全体のくじの数は多い。」【正答】
問題７：「当たりくじが多いくじ B の方が，全体のくじの数は多い。」【正答】
問題 11：「当たりくじが多いくじ B の方が，全体のくじの数は多い。」【正答】
問題８：「当たりくじが多いくじ B の方が，全体のくじの数は多い。」【正答】
問題９：「当たりくじが多いくじ B の方が，全体のくじの数は多い。」【正答】
問題 10：「当たりくじが多いくじ B の方が，全体のくじの数は多い。」【正答】
問題 12：「当たりくじが多いくじ A の方が，全体のくじの数は多い。」【正答】
問題３：「当たりくじが同じだから，全体のくじの数は同じ。」【誤答】

③水準１(段階1B)

〔５年児童 AU 〕

問題３：「当たりくじが同じだから，当たりやすいくじ A の方が全体のくじの数は少ない。」【正答】
問題６：「当たりくじが同じだから，当たりやすいくじ A の方が全体のくじの数は少ない。」【正答】
問題１：「当たりくじが多いくじ A の方が，全体のくじの数は多い。」【誤答】

④水準２

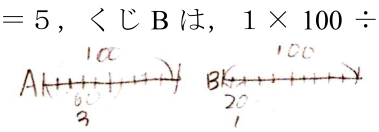
〔６年児童 SE 〕

問題１：「くじ A は 0.6 が３本だから，１に当たるのは，３ ÷ 0.6 ＝５で５本，くじ B は 0.2 が１本だから，１ ÷ 0.2 ＝５で５本，全体のくじの数は同じ。」【正答】

問題４「くじ A は 0.25 が１本だから，１に当たるのは，１ ÷ 0.25 ＝４で４本，くじ B は 0.75 倍が３本だから，３ ÷ 0.75 ＝４で４本，全体のくじの数は同じ。」【正答】

〔６年児童 NT 〕

問題１：「くじ A は，３ × 100 ÷ 60 ＝５，くじ B は，１ × 100 ÷ 20 ＝５。くじ A もくじ B も全体のくじの数が同じ。」【正答】



問題４：「くじＡは，１× 100 ÷ 25 ＝４，くじＢは，３× 100 ÷ 75 ＝４。くじＡもくじＢも全体のくじの数が同じ。」【正答】

2)典型的なプロトコルの記号化

各水準及び段階に属する児童が行った推論の記号化を行う。また，各水準及び段階の典型的なプロトコルにおける児童固有の考えについて考察した内容を示す。児童固有の考えは，推論図式において強調表示している。ここでは，各水準及び段階の境界に位置する問題における考え方を示す。他の問題における考え方は付録 15 に掲載。

①水準０

<table>
<tr><th>調査問題</th><th>仮定の候補</th><th>正答</th><th>結論</th><th>正誤</th></tr>
<tr><td>問題２</td><td>$n(X_A)=1,\ n(X_B)=3,\ P(X_A)=0.5,\ P(X_B)=0.5$</td><td>$A_3$</td><td>$A_1$</td><td>誤答</td></tr>
<tr><td colspan="5">児童の考え方</td></tr>
<tr><td colspan="5">$$\dfrac{\dfrac{P(X_A)=0.5 \qquad \dfrac{P(X_B)=0.5}{0.5=P(X_B)}\,(\text{対称律})}{P(X_A)=P(X_B)}\,(\text{推移律}) \qquad \mathbf{P(X_A)=P(X_B)\to n(S_A)=n(S_B)}}{A_1: n(S_A)=n(S_B)}\,(\to\text{除})$$</td></tr>
</table>

水準０の児童は，２つのくじの当たりやすさだけに着目し，「同じくらい当たるなら，くじの総数も同じ」という考えに基づいて，２つのくじの総数の関係を判断しており，２つのくじの当たりくじの本数を考慮していない。これは，くじを引くという場面及び当たりやすさに関する理解が不足していることに起因すると考えられる。

②水準1A

<table>
<tr><th>調査問題</th><th>仮定の候補</th><th>正答</th><th>結論</th><th>正誤</th></tr>
<tr><td>問題２</td><td>$n(X_A)=1,\ n(X_B)=3,\ P(X_A)=0.5,\ P(X_B)=0.5$</td><td>$A_3$</td><td>$A_3$</td><td>正答</td></tr>
<tr><td colspan="5">児童の考え方</td></tr>
<tr><td colspan="5">$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{n(X_A)=1 \qquad 1<3}{n(X_A)<3}\,(\text{推移律}) \qquad \dfrac{n(X_B)=3}{3=n(X_B)}\,(\text{対称律})}{B_3: n(X_A)<n(X_B)}\,(\text{推移律}) \qquad \mathbf{n(X_A)<n(X_B)\to n(S_A)<n(S_B)}}{A_3: n(S_A)<n(S_B)}\,(\to\text{除})$$</td></tr>
<tr><th>調査問題</th><th>仮定の候補</th><th>正答</th><th>結論</th><th>正誤</th></tr>
<tr><td>問題３</td><td>$n(X_A)=3,\ n(X_B)=3,\ P(X_A)=0.75,\ P(X_B)=0.6$</td><td>$A_3$</td><td>$A_3$</td><td>誤答</td></tr>
<tr><td colspan="5">児童の考え方</td></tr>
<tr><td colspan="5">$$\dfrac{\dfrac{n(X_A)=3 \qquad \dfrac{n(X_B)=3}{3=n(X_B)}\,(\text{対称律})}{n(X_A)=n(X_B)}\,(\text{推移律}) \qquad \mathbf{n(X_A)=n(X_B)\to n(S_A)=n(S_B)}}{A_1: n(S_A)=n(S_B)}\,(\to\text{除})$$</td></tr>
</table>

水準１(段階 1A)の児童は，２つのくじの当たりくじの本数だけに着目し，「当たりくじの本数が多い方が，くじの総数は多い」，「当たりくじの本数が同じなら，くじの総数は同じ」という考えに基づいて，２つのくじの総数の関係を判断しており，２つのくじの当たりやすさを考慮していない。

③水準1B

調査問題	仮定の候補	正答	結論	正誤
問題３	$n(X_A)=3$，$n(X_B)=3$，$P(X_A)=0.75$，$P(X_B)=0.6$	A_3	A_3	正答

児童の考え方

$$\dfrac{n(X_A)=3 \qquad \dfrac{n(X_B)=3}{3=n(X_B)}\,(\text{対称律})}{B_1: n(X_A)=n(X_B)}\,(\text{推移律})$$

$$\dfrac{\dfrac{P(X_A)=0.75 \qquad 0.75>0.6}{P(X_A)>0.6}\,(\text{推移律}) \qquad \dfrac{P(X_B)=0.6}{0.6=P(X_B)}\,(\text{対称律})}{D_2: P(X_A)>P(X_B)}\,(\text{推移律})$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{B_1 \quad D_2}{B_1 \wedge D_2}\,(\wedge\text{入})}{D_2: P(X_A)>P(X_B)}\,(\wedge\text{除}) \qquad P(X_A)>P(X_B)\rightarrow n(S_A)<n(S_B)}{A_3: n(S_A)<n(S_B)}\,(\rightarrow\text{除})$$

調査問題	仮定の候補	正答	結論	正誤
問題１	$n(X_A)=3$，$n(X_B)=1$，$P(X_A)=0.6$，$P(X_B)=0.2$	A_1	A_2	誤答

児童の考え方

$$\dfrac{\dfrac{n(X_A)=3 \qquad 3>1}{n(X_A)>1}\,(\text{推移律}) \qquad \dfrac{n(X_B)=1}{1=n(X_B)}\,(\text{対称律})}{B_2: n(X_A)>n(X_B)}\,(\text{推移律})$$

$$\dfrac{\dfrac{P(X_A)=0.6 \qquad 0.6>0.2}{P(X_A)>0.2}\,(\text{推移律}) \qquad \dfrac{P(X_B)=0.2}{0.2=P(X_B)}\,(\text{対称律})}{D_2: P(X_A)>P(X_B)}\,(\text{推移律})$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{B_2 \quad D_2}{B_2 \wedge D_2}\,(\wedge\text{入})}{B_2: n(X_A)>n(X_B)}\,(\wedge\text{除}) \qquad n(X_A)>n(X_B)\rightarrow n(S_A)>n(S_B)}{A_2: n(S_A)>n(S_B)}\,(\rightarrow\text{除})$$

水準１(段階 1B)の児童は，２つのくじの当たりくじの本数が等しい場合，２つのくじの当たりやすさを考慮し，「当たりやすい方が，くじの総数は少ない」という考えに基づいて，２つのくじの総数の関係を判断している。つまり，２つのくじ間において，当たりくじの本数と当たりやすさのいずれか等しい場合は，当たりくじの本数と当たりやすさのいずれか等しくない方を選択し，２つのくじの総数の関係を判断している。また，２つのくじ間において，当たりくじの本数と当たりやすさのい

ずれも等しくない場合は，２つのくじの当たりくじの本数を考慮し，「当たりくじの本数が多い方が，くじの総数は多い」という考えに基づいて，２つのくじの総数の関係を判断している。

④水準２

調査問題	仮定の候補	正答	結論	正誤
問題１	$n(X_A)=3$，$n(X_B)=1$，$P(X_A)=0.6$，$P(X_B)=0.2$	A_1	A_1	正答

児童の考え方

（Ⅰ）

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{n(X_A)=3 \qquad P(X_A)=0.6}{n(X_A)\div P(X_A)=3\div 0.6}\;(==)}{n(X_A)\div P(X_A)=5}\;(\text{演推}) \qquad \cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{n(X_B)=1 \qquad P(X_B)=0.2}{n(X_B)\div P(X_B)=1\div 0.2}\;(==)}{n(X_B)\div P(X_B)=5}\;(\text{演推})}{5=n(X_B)\div P(X_B)}\;(\text{対称律})}{}}{n(X_A)\div P(X_A)=n(X_B)\div P(X_B)}\;(\text{推移律})$$

$$\cfrac{\cfrac{\text{定理４}：n(S)=n(Z)\div P(Z) \qquad n(Z)=n(X_A) \quad n(S)=n(S_A) \quad P(Z)=P(X_A)}{n(S_A)=n(X_A)\div P(X_A)}\;(=\text{代入})}{n(X_A)\div P(X_A)=n(S_A)}\;(\text{対称律})$$

$$\cfrac{\cfrac{\text{定理４}：n(S)=n(Z)\div P(Z) \qquad n(Z)=n(X_B) \quad n(S)=n(S_B) \quad P(Z)=P(X_B)}{n(S_B)=n(X_B)\div P(X_B)}\;(=\text{代入})}{n(X_B)\div P(X_B)=n(S_B)}\;(\text{対称律})$$

$$\cfrac{\mathbf{n(X_A)\div P(X_A)=n(X_B)\div P(X_B)} \qquad n(X_A)\div P(X_A)=n(S_A) \quad n(X_B)\div P(X_B)=n(S_B)}{A_1：n(S_A)=n(S_B)}\;(=\text{代入})$$

水準２の児童は，１つのくじ内において，当たりくじの本数がくじの総数の何倍に当たるかを考え，１に当たる数量を求め，２つのくじの総数の関係を判断している。また，割合(百分率)の意味を基に全体を 100 に揃え，１つのくじ内において，くじの総数が当たりくじの本数の何倍に当たるかを考え，100 にあたる数量を求め，２つのくじの総数の関係を判断している。このように全体を揃えるとき，１に揃える場合と 100 に揃える場合に意識が向くと考えられる。

3.4　割合に関する概念的知識と手続き的知識の関係

3.4.1　割合に関する概念的知識と手続き的知識についての児童の考え

割合に関する概念的知識と手続き的知識についての児童の推論過程の記号化を行った結果，各水準及び段階に児童固有の考えがあることが分かった。児童の考えには，児童が自作した定理に基づいた考え及び確率の定義に基づいた正しい考えが含まれる。そこで，各水準及び段階における児童の考え方から抽出した児童固有の考えをまとめ，割合に関する概念的知識に関して表 3-24，割合に関する手続き的知識に関して表 3-25 に示す。

表3-24　割合に関する概念的知識についての児童の考え

水準	段階	割合に関する状況	比較量に関する状況	基準量に関する状況
0				
1	1A	・$n(X_A)=n(X_B)\rightarrow P(X_A)=P(X_B)$ ・$n(X_A)>n(X_B)\rightarrow P(X_A)>P(X_B)$	・$n(Y_A)=n(Y_B)\rightarrow n(X_A)=n(X_B)$ ・$n(Y_A)<n(Y_B)\rightarrow n(X_A)>n(X_B)$	・$n(X_A)=n(X_B)\rightarrow n(Y_A)=n(Y_B)$ ・$n(X_A)>n(X_B)\rightarrow n(Y_A)<n(Y_B)$
	1B	・$n(X_A)=n(X_B)\rightarrow n(Y_A)>n(Y_B)\rightarrow P(X_A)<P(X_B)$	・$n(Y_A)=n(Y_B)\rightarrow P(X_A)>P(X_B)\rightarrow n(X_A)>n(X_B)$	・$n(X_A)=n(X_B)\rightarrow P(X_A)<P(X_B)\rightarrow n(Y_A)>n(Y_B)$
2		・$n(X)=n(Y)\rightarrow H(X)$ ・$n(X)>n(Y)\rightarrow W(X)$ ・$n(X)<n(Y)\rightarrow L(X)$ ・$H(X_A)\wedge H(X_B)\rightarrow P(X_A)=P(X_B)$ ・$W(X_A)\wedge L(X_B)\rightarrow P(X_A)>P(X_B)$ ・$L(X_A)\wedge W(X_B)\rightarrow P(X_A)<P(X_B)$	・$n(X)=n(Y)\rightarrow H(X)$ ・$n(X)>n(Y)\rightarrow W(X)$ ・$n(X)<n(Y)\rightarrow L(X)$ ・$H(X_A)\wedge H(X_B)\rightarrow P(X_A)=P(X_B)$ ・$L(X_A)\wedge W(X_B)\rightarrow P(X_A)<P(X_B)$	・$n(X)=n(Y)\rightarrow H(X)$ ・$n(X)>n(Y)\rightarrow W(X)$ ・$n(X)<n(Y)\rightarrow L(X)$ ・$H(X_A)\wedge H(X_B)\rightarrow P(X_A)=P(X_B)$ ・$W(X_A)\wedge L(X_B)\rightarrow P(X_A)>P(X_B)$
		・$n(X_A)\div n(Y_A)=n(X_B)\div n(Y_B)\rightarrow P(X_A)=P(X_B)$ ・$n(X_A)\div n(Y_A)>n(X_B)\div n(Y_B)\rightarrow P(X_A)>P(X_B)$ ・$n(X_A)\div n(Y_A)<n(X_B)\div n(Y_B)\rightarrow P(X_A)<P(X_B)$	・$n(X_A)\div n(Y_A)=n(X_B)\div n(Y_B)\rightarrow P(X_A)=P(X_B)$ ・$n(X_A)\div n(Y_A)<n(X_B)\div n(Y_B)\rightarrow P(X_A)<P(X_B)$	・$n(X_A)\div n(Y_A)=n(X_B)\div n(Y_B)\rightarrow P(X_A)=P(X_B)$ ・$n(X_A)\div n(Y_A)>n(X_B)\div n(Y_B)\rightarrow P(X_A)>P(X_B)$
		・$n(X_A)\div n(S_A)=n(X_B)\div n(S_B)\rightarrow P(X_A)=P(X_B)$ ・$n(X_A)\div n(S_A)>n(X_B)\div n(S_B)\rightarrow P(X_A)>P(X_B)$ ・$n(X_A)\div n(S_A)<n(X_B)\div n(S_B)\rightarrow P(X_A)<P(X_B)$	・$n(S_A)\times P(X_A)>n(S_B)\times P(X_B)\rightarrow n(X_A)>n(X_B)$	・$n(S_A)\times P(Y_A)>n(S_B)\times P(Y_B)\rightarrow n(Y_A)>n(Y_B)$

表3-25　割合に関する手続き的知識についての児童の考え

水準	段階	割合に関する状況	比較量に関する状況	基準量に関する状況
0		・$n(S_A)=n(S_B)\to P(X_A)=P(X_B)$	・$n(S_A)=n(S_B)\to n(X_A)=n(X_B)$	・$P(X_A)=P(X_B)\to n(S_A)=n(S_B)$
1	1A	・$n(X_A)=n(X_B)\to P(X_A)=P(X_B)$ ・$n(X_A)>n(X_B)\to P(X_A)>P(X_B)$	・$P(X_A)=P(X_B)\to n(X_A)=n(X_B)$ ・$P(X_A)>P(X_B)\to n(X_A)>n(X_B)$ ・$P(X_A)<P(X_B)\to n(X_A)<n(X_B)$	・$n(X_A)=n(X_B)\to n(S_A)=n(S_B)$ ・$n(X_A)>n(X_B)\to n(S_A)>n(S_B)$ ・$n(X_A)<n(X_B)\to n(S_A)<n(S_B)$
	1B	・$n(X_A)=n(X_B)\to n(S_A)>n(S_B)\to P(X_A)<P(X_B)$ ・$n(X_A)=n(X_B)\to n(S_A)<n(S_B)\to P(X_A)>P(X_B)$	・$P(X_A)=P(X_B)\to n(S_A)<n(S_B)\to n(X_A)<n(X_B)$	・$n(X_A)=n(X_B)\to P(X_A)>P(X_B)\to n(S_A)<n(S_B)$
		・$n(Y_A)>n(Y_B)\to P(X_A)<P(X_B)$ ・$n(Y_A)<n(Y_B)\to P(X_A)>P(X_B)$		
	1C	・$n(X)=n(Y)\to H(X)$ ・$n(X)>n(Y)\to W(X)$ ・$n(X)<n(Y)\to L(X)$ ・$H(X_A)\wedge H(X_B)\to P(X_A)=P(X_B)$ ・$L(X_A)\wedge H(X_B)\to P(X_A)<P(X_B)$ ・$H(X_A)\wedge W(X_B)\to P(X_A)<P(X_B)$		
		・$n(X_A)-n(Y_A)<n(X_B)-n(Y_B)\to P(X_A)<P(X_B)$		
2		・$n(S_A)\times a=n(S_B)\times b\to n(X_A)\times a=n(X_B)\times b\to P(X_A)=P(X_B)$ ・$n(S_A)\times a=n(S_B)\times b\to n(X_A)\times a<n(X_B)\times b\to P(X_A)<P(X_B)$		
		・$n(X_A)\div n(S_A)=n(X_B)\div n(S_B)\to P(X_A)=P(X_B)$ ・$n(X_A)\div n(S_A)<n(X_B)\div n(S_B)\to P(X_A)<P(X_B)$	・$n(S_A)\times P(X_A)=n(S_B)\times P(X_B)\to n(X_A)=n(X_B)$ ・$n(S_A)\times P(X_A)>n(S_B)\times P(X_B)\to n(X_A)>n(X_B)$	・$n(X_A)\div P(X_A)=n(X_B)\div P(X_B)\to n(S_A)=n(S_B)$

表 3-24，表 3-25 より，割合に関する概念的知識と手続き的知識の３つの状況に共通して，Between な関係における大小比較を含めた加法的な考えと Within な関係における乗法的な考えが存在する。また，Between な関係における加法的な考えが Within な関係における乗法的な考えに先行している。これら２つの考えの間に，割合に関する概念的知識の３つの状況に共通して，Within な関係における大小比較を含めた加法的な考えが存在する。割合に関する手続き的知識の「割合に関する状況」に関

して，Within な関係における大小比較を含めた加法的な考えと Between な関係における乗法的な考えが存在する。また，Within な関係における加法的な考えが Between な関係における乗法的な考えに先行している。したがって，Within な関係よりも Between な関係の方が着目しやすく，乗法的な考えよりも加法的な考えの方が用いやすいと考えられる。また，Between な関係における加法的な考えから，Within な関係における加法的な考え, Between な関係における乗法的な考えへと移行し, さらに, Within な関係における乗法的な考えへと移行することを意味していると考えられる。

3.4.2　割合に関する状況，比較量に関する状況，基準量に関する状況の関係

(1) 再得点化と標準化

３つの状況間の関係を調べるために，割合に関する概念的知識及び手続き的知識についての６つの調査を全て受けた第５学年の児童 226 名，第６学年の児童 76 名，計 302 名の調査データを基に分析を行った。調査データにはエラーが含まれるため，６つの調査の得点の合計は児童の真の得点ではない場合がある。そこで，６つの調査データの各々について，スケログラムの区分線より左にある正答だけを真の得点として再得点化を行った。また，割合に関する概念的知識の調査は完答の場合６点，割合に関する手続き的知識の調査は完答の場合 12 点であるので，割合に関する概念的知識の調査の得点を２倍し，得点の換算を行った。割合に関する概念的知識及び手続き的知識の３つの状況の得点を X_i(i ＝１，２，３)，「割合に関する状況」の得点を X_1，「比較量に関する状況」の得点を X_2，「基準量に関する状況」の得点を X_3，X_i の平均を $\overline{X}_i$，X_i の標準偏差を S_i，X_i の分散を S_i^2 と表し，得点換算後の得点の概要を表 3-26 に示す。

表3-26　得点換算後の得点の概要

	割合に関する概念的知識			割合に関する手続き的知識		
状況(X_i)	X_1	X_2	X_3	X_1	X_2	X_3
5001	8	8	10	6	7	2
5002	4	0	2	0	1	3
5003	6	2	8	5	8	8
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
6074	10	6	2	7	6	8
6075	10	4	0	12	12	12
6076	10	8	10	12	12	12
合計	2434	1816	1756	2453	2087	2078
平均($\overline{X}_i$)	8.060	6.013	5.815	8.123	6.911	6.881
標準偏差(S_i)	3.133	2.795	3.083	3.435	4.220	3.815
分散(S_i^2)	9.817	7.814	9.507	11.796	17.809	14.551

(2) ３つの状況に関する相関

表 3-26 を基に，割合に関する概念的知識と手続き的知識の３つの状況の得点に関して，ピアソンの積率相関係数を算出した[186, pp.217-220]。X_i(i ＝１，２，３)と X_j(j ＝１，２，３)の相関を r_{ij}，X_1 と X_2 の相関を r_{12}，X_2 と X_3 の相関を r_{23}，X_3 と X_1 の相関を r_{31} と表し，３つの状況に関する相関を表 3-27 に示す。r_{12} ＝ r_{21}，r_{23} ＝ r_{32}，r_{31} ＝ r_{13} である。

表3-27　３つの状況に関する相関

	割合に関する概念的知識	割合に関する手続き的知識
r_{12}	0.520	0.359
r_{23}	0.526	0.554
r_{31}	0.434	0.513

割合に関する概念的知識において，X_1 と X_2 に関して r_{12} ＝ 0.520，X_2 と X_3 に関して r_{23} ＝ 0.526，X_3 と X_1 に関して r_{31} ＝ 0.434 であり，全て比較的強い相関がある。そこで，２つの状況間の直線的関係の有意性を調べるために，表 3-27 を基に無相関検定を行った[186, pp.223-224]。t 値は，相関係数を r，児童の総数を N と表すと，次式により求められる。なお，自由度は N －２である。

$$t = \frac{r\sqrt{N-2}}{\sqrt{1-r^2}}$$

X_1 と X_2 に関して，$t = 0.520\sqrt{302-2} / \sqrt{1-(0.520)^2} = 10.554$

X_2 と X_3 に関して，$t = 0.526\sqrt{302-2} / \sqrt{1-(0.526)^2} = 10.714$

X_3 と X_1 に関して，$t = 0.434\sqrt{302-2} / \sqrt{1-(0.434)^2} = 8.355$

有意水準５％において，自由度 300 の場合，t の臨界値は 1.96 である。X_1 と X_2 に関して t ＝ 10.554，X_2 と X_3 に関して t ＝ 10.714，X_3 と X_1 に関して t ＝ 8.355 であり，割合に関する概念的知識の３つの知識の得点間の全てに，有意な相関がある。

割合に関する手続き的知識において，X_1 と X_2 に関して r_{12} ＝ 0.359，X_2 と X_3 に関して r_{23} ＝ 0.554，X_3 と X_1 に関して r_{31} ＝ 0.513 である。「割合に関する状況」と「比較量に関する状況」の得点間に弱い相関があり，「比較量に関する状況」と「基準量に関する状況」の得点間及び「基準量に関する状況」と「割合に関する状況」の得点間に比較的強い相関がある。そこで，２つの状況間の直線的関係の有意性を調べるために，無相関検定を行った。

X_1 と X_2 に関して，$t = 0.359\sqrt{302-2} / \sqrt{1-(0.359)^2} = 6.668$

X_2 と X_3 に関して，$t = 0.554\sqrt{302-2} / \sqrt{1-(0.554)^2} = 11.516$

X_3 と X_1 に関して，$t = 0.513\sqrt{302-2} / \sqrt{1-(0.513)^2} = 10.362$

有意水準５％において，自由度 300 の場合，t の臨界値は 1.96 である。X_1 と X_2 に関して t ＝ 6.668，X_2 と X_3 に関して t ＝ 11.516，X_3 と X_1 に関して t ＝ 10.362 であり，割合に関する手続き的知識の３つの知識の得点間の全てに，有意な相関がある。

(3) ３つの状況に関する順序性

分散分析を行うためには，分散と共分散の同質性が前提となる。そこで，「分散がみな等しく，かつ共分散がみな等しい（Hvc）」ことを調べた[187, pp.211-212]。表 3-26 を基に，割合に関する概念的知識と手続き的知識における３つの状況の共分散を算出した。X_i と X_j の共分散を S_{ij}，X_1 と X_2 の共分散を S_{12}，X_2 と X_3 の共分散を S_{23}，X_3 と X_1 の共分散を S_{31} と表し，３つの状況に関する共分散を表 3-28 に示す。$S_{12} = S_{21}$，$S_{23} = S_{32}$，$S_{31} = S_{13}$，$S_{11} = S_1^2$，$S_{22} = S_2^2$，$S_{33} = S_3^2$ である。

表3-28　３つの状況に関する共分散

	割合に関する概念的知識	割合に関する手続き的知識
S_{12}	4.542	5.190
S_{23}	4.519	8.883
S_{31}	4.183	6.703

Hvc 検定には，児童の総数 N が大きいとき，近似的に χ^2 テストが利用される[187, p.212]。そこで，表 3-26，表 3-28 を基に Lvc を算出し，Lvc の対数を用いて χ^2vc を算出した。Lvc は次式により求められる。$|S_{ij}|$ は S_{ij} を要素とする行列式である。

$$S^2 = \sum_{i=1}^{k} S_{ii} / k$$

$$S^2 r = \sum_{i=1}^{k} S_{ij} / k(k-1) \quad (i \neq j)$$

$$Lvc = \frac{|S_{ij}|}{(S^2)^k (1-r)^{k-1} [1+(k-1)r]}$$

χ^2vc は Lvc の対数を用いて次式により求められる。対数は常用対数である。このときの自由度は〔k(k＋１)/２〕－２である。

$$\chi^2 vc = -2.3026 N \log Lvc$$

割合に関する概念的知識に関して，

$$|S_{ij}| = \begin{vmatrix} 9.817 & 4.542 & 4.183 \\ 4.542 & 7.814 & 4.519 \\ 4.183 & 4.519 & 9.507 \end{vmatrix} = 367.636$$

$$S^2 = (9.817 + 7.814 + 9.507) \div 3 = 9.046$$

$$S^2 r = (4.542 + 4.183 + 4.542 + 4.519 + 4.183 + 4.519) \div \{3 \times (3-1)\} = 4.415$$

$$r = 4.415 \div 9.046 = 0.488$$

$$Lvc = 367.636 / \{(9.046)^3 \times (1 - 0.488)^2 \times (1 + 2 \times 0.488)\} = 0.959$$

$$\chi^2 vc = -2.3026 \times 302 \times (-0.018) = 12.666$$

割合に関する手続き的知識に関して，

$$|S_{ij}| = \begin{vmatrix} 11.796 & 5.190 & 6.703 \\ 5.190 & 17.809 & 8.883 \\ 6.703 & 8.883 & 14.551 \end{vmatrix} = 1551.722$$

$S^2 = (11.796 + 17.809 + 14.551) \div 3 = 14.718$

$S^2r = (5.190 + 6.703 + 5.190 + 8.883 + 6.703 + 8.883) \div \{3 \times (3 - 1)\} = 6.925$

$r = 6.925 \div 14.718 = 0.471$

$Lvc = 1610.383 / \{(14.718)^3 \times (1 - 0.471)^2 \times (1 + 2 \times 0.471)\} = 0.894$

$\chi^2vc = - 2.3026 \times 302 \times (-0.048) = 33.721$

有意水準５％において，自由度４の場合，χ^2 の臨界値は 9.49 である。割合に関する概念的知識に関して $\chi^2vc = 12.666$，割合に関する手続き的知識に関して $\chi^2vc = 33.721$ であり，共に有意である。したがって，Hvc を受け入れることはできない。

割合に関する概念的知識と手続き的知識の３つの状況の分散と共分散の同質性が認められないため，分散分析を行うことができない。そこで，分散・共分散が等しくない場合の平均間の有意差検定を行った[187, pp.256-257]。この検定にはＦ検定が利用される。

表 3-26 を基に，割合に関する概念的知識と手続き的知識の３つの状況の得点間の差を算出した。割合に関する概念的知識及び手続き的知識の３つの状況の得点間の差を $Y_i (i = 1，2)$，X_1 を基準として $X_2 - X_1$ を Y_1，$X_3 - X_1$ を Y_2，Y_i の平均を $\overline{Y}_i$，Y_i の分散を S_i^2，Y_i と $Y_j (j = 1，2)$ の共分散を S_{ij} と表し，３つの状況に関する得点間の差の概要を表 3-29 に示す。

表3-29　３つの状況に関する得点間の差の概要

	割合に関する概念的知識		割合に関する手続き的知識	
状況 (Y_i)	Y_1	Y_2	Y_1	Y_2
5001	0	2	-4	1
5002	-4	-2	3	1
5003	-4	2	3	3
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
6074	-4	-8	1	-1
6075	-6	-10	0	0
6076	-2	0	0	0
平均 ($\overline{Y}_i$)	-2.046	-2.245	-1.212	-1.242
分散 (S_i^2)	8.516	10.930	19.191	12.895
共分散 (S_{ij})	5.578		8.747	

次に，表 3-29 を基にＦ値を算出した。Ｆ値は次式により求められる。このときの自由度は，$k - 1$ と $N - k + 1$ である。$S_{12} = S_{21}$，$S_{11} = S_1^2$，$S_{22} = S_2^2$ である。

$$F = \frac{(N - 2)N(S_{22}\overline{Y}_1^2 - 2 S_{12}\overline{Y}_1\overline{Y}_2 + S_{11}\overline{Y}_2^2)}{2(S_{11}S_{22} - S_{12}^2)}$$

割合に関する概念的知識に関して,

$$F = \frac{(302 - 2) \times 302 \times [\{10.930 \times (-2.046)^2\} - 2 \times 5.578 \times -2.046 \times -2.245 + \{8.516 \times (-2.245)^2\}]}{2 \times \{8.516 \times 10.930 - (5.578)^2\}}$$
$$= 27370.482$$

割合に関する手続き的知識に関して,

$$F = \frac{(302 - 2) \times 302 \times [\{12.895 \times (-1.212)^2\} - 2 \times 8.747 \times -1.212 \times -1.242 + \{19.191 \times (-1.242)^2\}]}{2 \times \{19.191 \times 12.895 - (8.747)^2\}}$$
$$= 5883.504$$

有意水準５％において, $F(2, 300) = 3.03$ である。割合に関する概念的知識に関して $F = 27370.482$, 割合に関する手続き的知識に関して $F = 5883.504$ であり，共に有意である。しかし，どの平均間に有意な差があるのかは分からない。そこで，Ryan の法による一対比較の検定を用いて多重比較を行った[186, pp.171-172]。表 3-26 を基に，$\overline{X}_1$，$\overline{X}_2$，$\overline{X}_3$ を大きさの順に並べび換え，３つの状況に関する平均の差の絶対値を表 3-30 に示す。

表3-30　３つの状況に関する平均の差の絶対値

割合に関する概念的知識			割合に関する手続き的知識		
	$\overline{X}_2$	$\overline{X}_3$		$\overline{X}_2$	$\overline{X}_3$
$\overline{X}_1$：8.060	2.046	2.245	$\overline{X}_1$：8.123	1.212	1.242
$\overline{X}_2$：6.013		0.199	$\overline{X}_2$：6.911		0.030
$\overline{X}_3$：5.815			$\overline{X}_3$：6.881		

表 3-26，表 3-27，表 3-30 を基に，名義水準における t の臨界値を算出し，平均の最大値と最小値の差について t 検定を行った。有意水準は５％とした。有意な差のある対がある限りステップ数が２になるまで比較を行った。名義水準は各ステップ数の比較における有意水準であり，ステップ数は比較の対象となっている２つの平均とそれらの間にある平均の数である。名義水準を α'_m，比較全体における有意水準を α，処理水準の数を k，ステップ数を m と表すと，α'_m は次式により求められる。

$$\alpha'_m = \frac{2\alpha}{k(m - 1)}$$

標準正規分布における両側確率の有意水準が α である標準得点を z_α と表すと，α'_m における t の臨界値及び２つの平均 $\overline{X}_i$，$\overline{X}_j$ の差に関するデータから算出される t 値は次式により求められる。このときの自由度は，$k(N - 1)$ である。

$$t_{\alpha,df} = z_\alpha + \frac{z_\alpha^3 + z_\alpha}{4(df - 2)}$$

$$t = \frac{|\overline{X}_i - \overline{X}_j|}{\sqrt{\dfrac{S_i^2 + S_j^2 - 2r_{ij}S_iS_j}{N - 1}}}$$

割合に関する概念的知識において，$\overline{X}_1$ と $\overline{X}_3$ に関するステップ数は３である。

$\alpha'_3 =（2 \times 0.05）/\{3 \times（3-1）\} = 0.017$

$z_{.017} = 2.39$

$t_{.017,903} = 2.39 + \{(2.39)^3 + 2.39\} / \{4 \times (903-2)\} = 2.395$

$$t = \frac{|2.245|}{\sqrt{\dfrac{9.817 + 9.507 - 2 \times 0.434 \times 3.133 \times 3.083}{302-1}}} = 11.781$$

割合に関する概念的知識において，$\overline{X}_1$ と $\overline{X}_2$ に関するステップ数は２である。

$\alpha'_2 =（2 \times 0.05）/\{3 \times（2-1）\} = 0.033$

$z_{.033} = 2.13$

$t_{.033,903} = 2.13 + \{(2.13)^3 + 2.13\} / \{4 \times (903-2)\} = 2.133$

$$t = \frac{|2.046|}{\sqrt{\dfrac{9.817 + 7.814 - 2 \times 0.520 \times 3.133 \times 2.795}{302-1}}} = 12.166$$

割合に関する概念的知識において，$\overline{X}_2$ と $\overline{X}_3$ に関するステップ数は２である。したがって，t の臨界値は 2.133 である。

$$t = \frac{|0.199|}{\sqrt{\dfrac{7.814 + 9.507 - 2 \times 0.526 \times 2.795 \times 3.083}{302-1}}} = 1.200$$

割合に関する手続き的知識において，$\overline{X}_1$ と $\overline{X}_3$ に関するステップ数は３である。

$\alpha'_3 =（2 \times 0.05）/\{3 \times（3-1）\} = 0.017$

$z_{.017} = 2.39$

$t_{.017,903} = 2.39 + \{(2.39)^3 + 2.39\} / \{4 \times (903-2)\} = 2.395$

$$t = \frac{|\ 1.242\ |}{\sqrt{\dfrac{11.796 + 14.551 - 2 \times 0.513 \times 3.435 \times 3.815}{302 - 1}}} = 5.999$$

割合に関する手続き的知識において，$\overline{X}_1$ と $\overline{X}_2$ に関するステップ数は２である。

$\alpha'_2 = (2 \times 0.05) / \{3 \times (2 - 1)\} = 0.033$

$z_{.033} = 2.13$

$t_{.033,903} = 2.13 + \{(2.13)^3 + 2.13\} / \{4 \times (903 - 2)\} = 2.133$

$$t = \frac{|\ 1.212\ |}{\sqrt{\dfrac{11.796 + 17.809 - 2 \times 0.359 \times 3.435 \times 4.220}{302 - 1}}} = 4.800$$

割合に関する手続き的知識において，$\overline{X}_2$ と $\overline{X}_3$ に関するステップ数は２である。したがって，t の臨界値は 2.133 である。

$$t = \frac{|\ 0.030\ |}{\sqrt{\dfrac{17.809 + 14.551 - 2 \times 0.554 \times 4.220 \times 3.815}{302 - 1}}} = 0.136$$

割合に関する概念的知識に関して，$\overline{X}_1$ と $\overline{X}_3$ 間及び $\overline{X}_1$ と $\overline{X}_2$ 間に，有意水準５％において有意な差がある。この場合，割合に関する概念的知識において，「割合に関する状況」が児童にとって一番分かりやすい場面であると考えられる。割合に関する手続き的知識に関して，$\overline{X}_1$ と $\overline{X}_3$ 間及び $\overline{X}_1$ と $\overline{X}_2$ 間に，有意水準５％において有意な差がある。この場合，割合に関する手続き的知識において，「割合に関する状況」が児童にとって一番分かりやすい場面であると考えられる。

第４章　割合に関する数理構造の理解を促進する教授法

4.1　割合に関する２つの知識の同時活性化を図る授業の構築

割合に関する数理構造の理解を促進させる教授法の構築にあたり，Dörfler, W.［22］の提唱する一般化モデルを考慮し，一般化の過程を重視した割合に関する授業設計を行う。また，Rittle-Johnson, B., Siegler, R. S., & Alibali, N. W.［11］の提唱する反復モデルを考慮し，授業における概念的知識と手続き的知識の反復過程を対応させる。これにより，割合に関する概念的知識と手続き的知識を同時活性化させる授業の構築を行う。割合に関する授業設計において，２つの数量の関係を把握する場合と２組の数量の関係を比較する場合を区別し，児童が潜在的に持っている比例的推論に基づいた割合の見方を顕在化させ，割合の理解を深める学習過程を位置付ける必要がある。また，２倍・1/2(半分)の関係である数量の提示は，２つの数量の関係を把握する場合及び２組の数量の関係を比較する場合に有効であること[176]，[178]，[179]，割合指導の導入場面において，３組以上の数量の関係を割合を用いて比較することは困難であること[177]を考慮する必要がある。

(1) 授業設計

割合に関する概念的知識と手続き的知識を同時活性化させることにより，割合に関する数理構造の理解を促進させるためには，Dörfler, W.［22］の提唱する一般化モデルを考慮した授業設計を行う必要がある。そこで，「速さ」の単元に関して，一般化モデルに基づく授業設計を行った廣瀬隆司の研究[25]を参考に，第５学年の「割合」の単元に関して，一般化の過程を重視した授業設計を行い，割合に関する学習内容を一般化モデルの各段階に位置付ける。一般化の過程を重視した割合に関する授業設計の概要を図 4-1 に示す。図 4-1 の１～９の段階は，２つの数量の関係を把握する場合に関して，割合を理解する学習過程である。また，２組の数量の関係を比較する場合を 10 の段階に設定し，割合の理解を深める学習過程を位置付けている。割合に関する概念的知識と手続き的知識の各水準及び各段階には，児童固有の考えが存在している。この児童固有の考えは，ミスコンセプションやプリコンセプションとして，割合に関する数理構造の理解に影響している。そこで，割合に関する概念形成過程を考慮し，２つの数量の関係を把握する場合と２組の数量の関係を比較する場合の両方において，加法的な考えと乗法的な考えの双方からアプローチできる場面を設定することにより，ミスコンセプションを修正したりプリコンセプションを発展させたりする学習過程を位置付けている。一般化モデルの各段階をつなぐ過程として，Rittle-Johnson, B., Siegler, R. S., & Alibali, N. W.［11］の提唱する反復モデルを考慮した反復過程を対応させる。反復過程における概念的知識と手続き的知識の知識の向上の様相を図 4-2 に示す。

割合の学習に先行して，児童は整数倍や小数倍について学習しているが，割合に関する手続き的知識は十分に理解していない。既知の何倍という言葉に対する手続き的知識は，乗法に関する概念的知識と関連が強い。しかし，割合を用いて２つの数量の関係を把握する場合，除法に関する概念的知識との関連は弱い。また，日常生活において，２つの数量の関係を把握する場合，児童は質的に大小関係を把握することが多い。量的に差を求めることはあるが，割合を求めることは殆どない。２組の数量の関係を比較する場合も同様，児童は差による比較を行うことが多く，割合による比較を行うことは殆どない。本来，概念的知識と手続き的知識の反復過程において，２つの知識のどちらからでもアプローチ可能であるが，図 4-2 においては，概念的知識から出発することにする。また，概念的知識→問題の表出→手続き的知識という過程において，概念的知識の向上は問題の表出を向上させ，手続き的知識の向上を導く。また，向上した手続き的知識→向上した問題の表出→向上した概念的知識という反復過程が繰り返される。向上した概念的知識と手続き的知識は，初期の概念的知識と手続き的知識を包含しながら拡大していると考えられる。

割合の問題場面は，割合，比較量，基準量，１倍の４項関係に基づいた乗法的構造を有している。割合の問題解決において，児童は「割合，比較量，基準量は何か」という情報を保持するが，これら

の情報は結び付いていない。また，基準量の割合である１倍は，問題場面において明示されていない。そこで，図 4-2 における問題の表出として，図 4-3 に示す４項関係に基づいた比の関係図をかくことにより，割合，比較量，基準量，１倍が統合された情報として再形成され，明示的な理解に至ると考えられる。割合に関する概念的知識は，割合，比較量，基準量，１倍の４項に注意させ，比の関係図という問題の表出における正しい情報の組織化の支えとなる。また，関係図という問題の表出は演算の決定に直結しているため，正しい手続きを導き，その使用を支える。

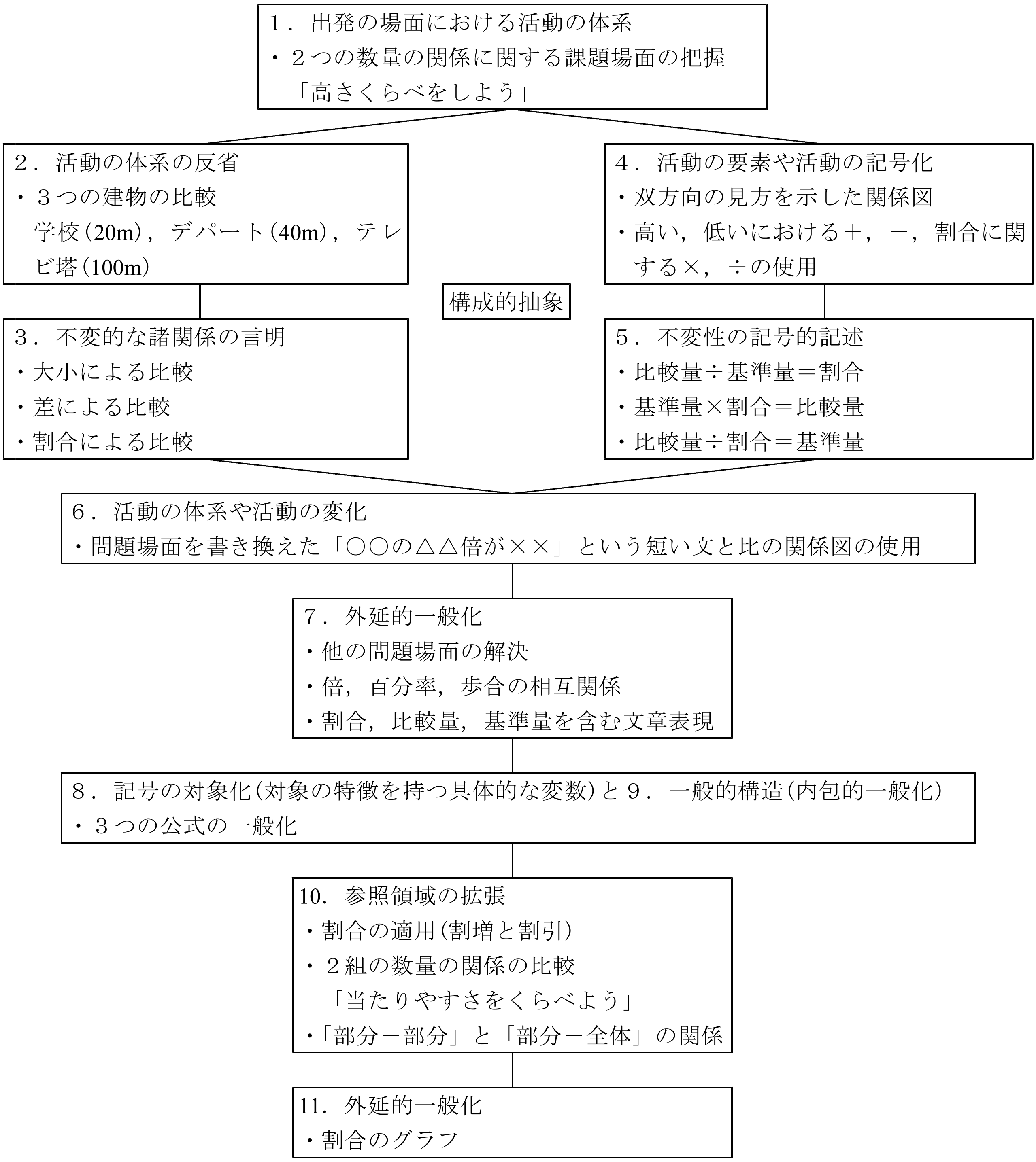


図4-1　割合に関する授業設計の概要

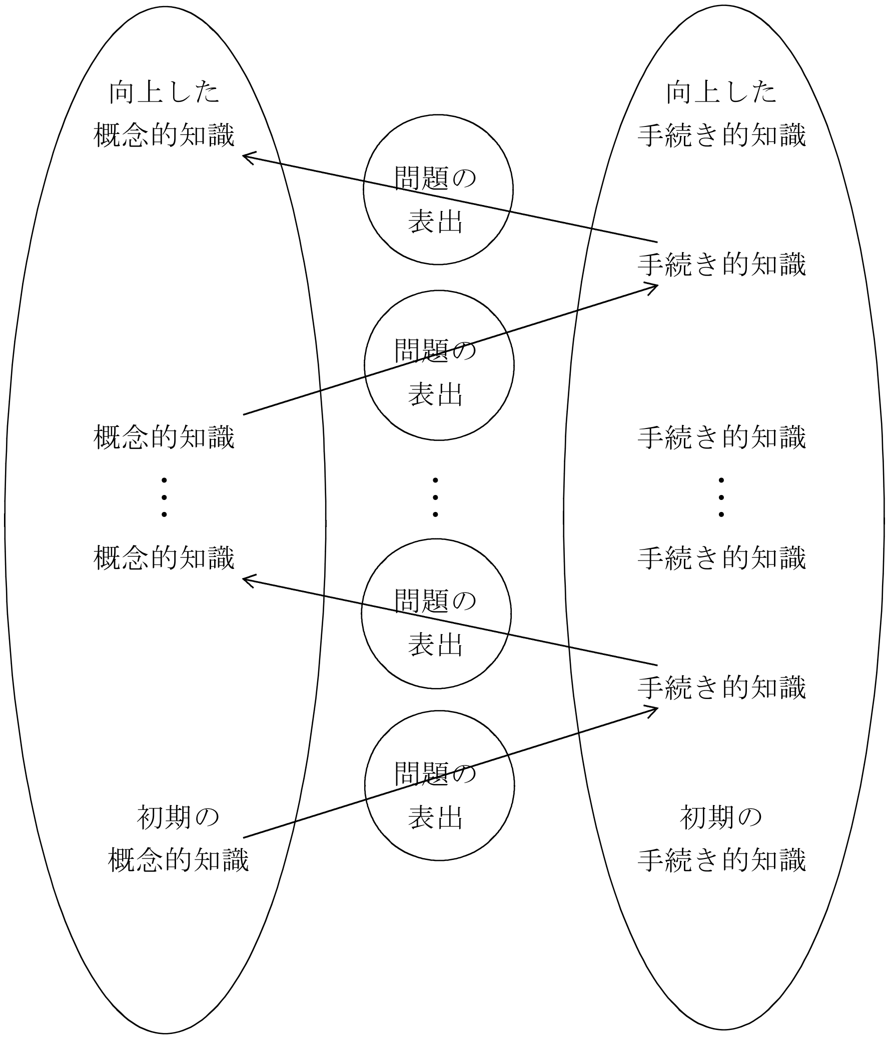


図4-2　反復過程における２つの知識の向上の様相

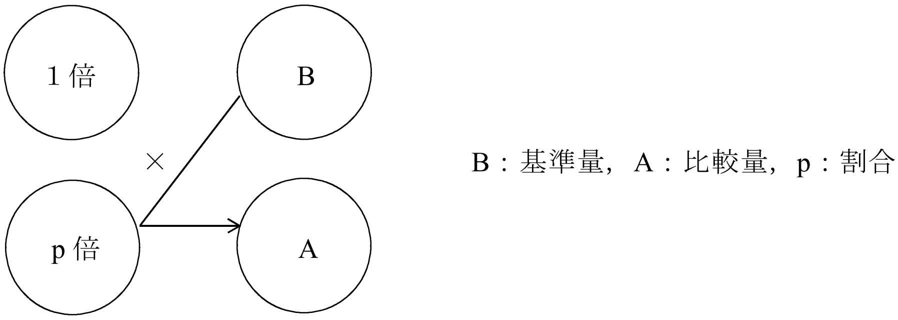


図4-3　４項関係に基づいた比の関係図

「割合」の単元の指導計画に一般化の過程と反復過程を位置づけ，問題の表出を通して，概念的知識と手続き的知識が向上していく詳細な過程を表 4-1 に示す。表 4-1 における C は概念的知識(Conceptual knowledge)，P は手続き的知識(Procedural knowledge)，RP は問題の表出(Representation of Problem)を表している。

表4-1　「割合」の単元の指導計画

時間	一般化の過程	反復過程	概念的知識と手続き的知識の具体例
1	1．出発の場面における活動の体系 ・２つの数量の関係に関する課題場面の把握 「高さくらべをしよう」	C_* ⟷ P_*	C_*：比較の場面把握 P_*：記号(言葉，＋，－，×，÷)の選択の予想
	2．活動の体系の反省 ・３つの建物の比較		
	3．不変的な諸関係の言明 ・大小による比較 ・差による比較 ・割合による比較	RP_1	RP_1：文章による(主観的な)表出
		P_1	P_1：記号(言葉，＋，－，×，÷)による関係付け
		RP_2	RP_2：分類による表出
		C_1	C_1：大小，差，割合により関係付ける考え方
	4．活動の要素や活動の記号化 ・双方向の見方を示した関係図 ・高い，低いにおける＋，－，割合に関する×，÷の使用	RP_3	RP_3：双方向の見方を示した関係図による表出
2		P_2	P_2：×，÷による関係付け
		RP_4	RP_4：双方向の見方を示した関係図による多様な表出
	5．不変性の記号的記述 ・比較量÷基準量＝割合 ・基準量×割合＝比較量 ・比較量÷割合＝基準量	C_2	C_2：割合，比較量，基準量を求める３つの式
3	6．活動の体系や活動の変化 ・問題場面を書き換えた「○○の△△倍が××」という短い文と比の関係図の使用	RP_5	RP_5：比の関係図による表出
		P_3	P_3：割合，比較量，基準量の各々を求める立式
		RP_6	RP_6：正しい比の関係図の表出
		C_3	C_3：割合，比較量，基準量を求める３つの式を統合した考え方

	7．外延的一般化 ・他の問題場面の解決 ・倍，百分率，歩合の相互関係 ・割合，比較量，基準量を含む文章表現	RP_7	RP_7：確実な比の関係図の表出
		P_4	P_4：割合，比較量，基準量の各々を求める確実な立式
		RP_8	RP_8：速く正確な比の関係図の表出
		C_4	C_4：割合が用いられる異なる場面
		RP_9	RP_9：倍，百分率，歩合の換算による正しい比の関係図の表出
		P_5	P_5：百分率や歩合を用いた場面における正しい立式
4 5 6 7 8 9 10		RP_{10}	RP_{10}：倍，百分率，歩合の換算による確実な比の関係図の表出
		C_5	C_5：倍，百分率，歩合の相互関係
		RP_{11}	RP_{11}：割合，比較量，基準量を含む文章表現の書き換えと正しい比の関係図の表出
		P_6	P_6：割合，比較量，基準量を含む文章表現における正しい立式
		RP_{12}	RP_{12}：割合，比較量，基準量を含む文章表現の正しい書き換えと確実な比の関係図の表出
		C_6	C_6：割合，比較量，基準量を含む文章表現
	8．記号の対象化（対象の特徴を持つ具体的な変数）	RP_{13}	RP_{13}：倍，百分率，歩合の換算，割合，比較量，基準量を含む文章表現の書き換えに基づいた確実な比の関係図の表出
		P_7	P_7：百分率，歩合を用いた割合，比較量，基準量を含む文章表現における確実な立式
		RP_{14}	RP_{14}：倍，百分率，歩合の換算，割合，比較量，基準量を含む文章表現の書き換えに基づいた速く正確な比の関係図の表出
	9．一般的構造（内包的一般化） ・３つの公式の一般化	C_7	C_7：割合の定義と定義から導かれる性質に関する３つの公式を統合した考え方

11 12 13 14 15 16	10．参照領域の拡張 ・割合の適用 （割増と割引） ・２組の数量の関係の比較 「当たりやすさをくらべよう」 ・「部分－部分」と「部分－全体」の関係	RP_{15} P_8 RP_{16} C_8 RP_{17} P_9 RP_{18} C_9	RP_{15}：割増と割引を考慮した比の関係図の表出 P_8：割増と割引の場面における正しい立式 RP_{16}：２つの比の関係図を組み合わせた図の表出 C_8：割増と割引の意味 RP_{17}：「部分－全体」に着目した正しい関係図の表出 P_9：「部分－全体」の関係における正しい立式 RP_{18}：「部分－全体」に着目した確実な関係図の表出 C_9：「部分－部分」と「部分－全体」の関係と２組の数量の関係の割合を用いた比較
17 18	11．外延的一般化 ・割合のグラフ	RP_{19} $C_{10} \longleftrightarrow P_{10}$	RP_{19}：「部分－全体」に着目した速く正確な関係図の表出 P_{10}：「部分－全体」の関係における確実な立式 C_{10}：「部分－全体」の関係における３つの公式を統合した考え方

２つの数量の関係を把握することに関して，場面の異なる複数の問題を，比の関係図を用いた問題の表出を通して解決することにより，割合の適用される場面の理解が深まる。これは概念的知識の向上を導く。また，何度も比の関係図を用いた問題の表出をすることにより，問題の表出にかかる時間の短縮や正確さが向上する。これは問題の表出の向上を意味する。百分率や歩合という別の割合の表現の仕方，「A は B の何倍です」，「A は B に対して何倍です」，「A は B と比べて何倍です」，「A は B をもとにすると何倍です」，「A は B の内の何倍です」といった割合，比較量，基準量を含む文章表現，割増と割引について知ることは，概念的知識の向上を導く。また，倍，百分率，歩合の換算による比の関係図の表出や，図 4-4 に示す２つの比の関係図を組み合わせた図の表出という問題の表出のさらなる向上につながる。

２組の数量の関係を比較することに関して，「部分－部分」と「部分－全体」について知ることは，割合のグラフの素地としての概念的知識の向上を導く。また，２組の数量の関係の比較を考えた時，既習の割合を用いることができることは，割合の適用される場面の理解をさらに深める。これは概念的知識のさらなる向上を意味する。

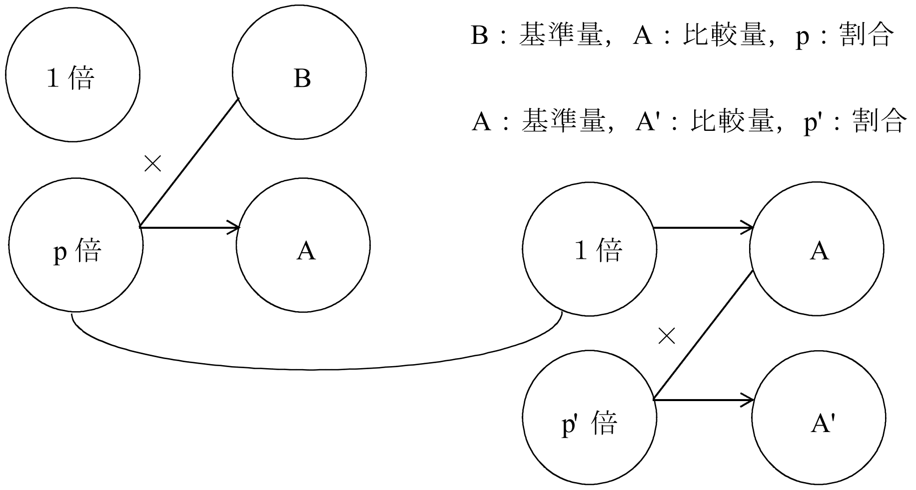


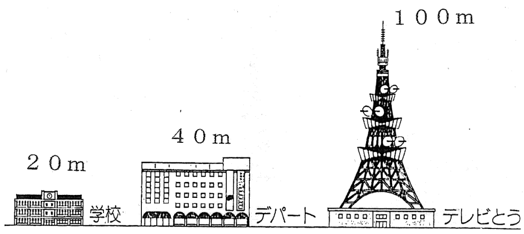
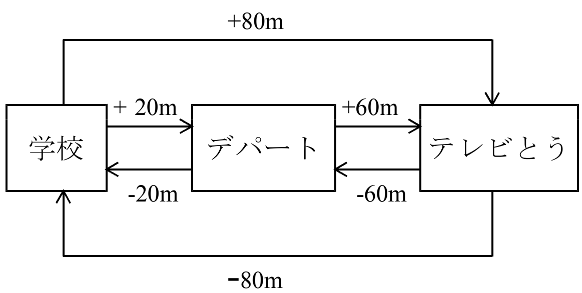
図4-4　２つの比の関係図を組み合わせた図

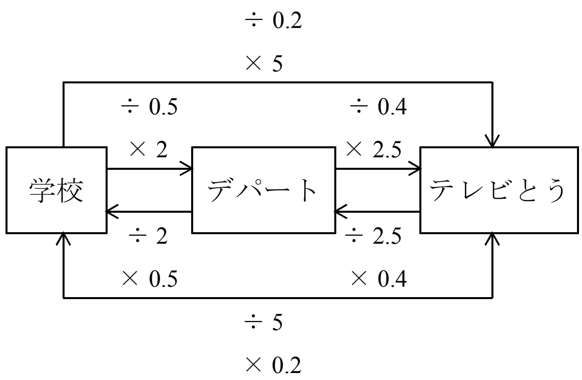
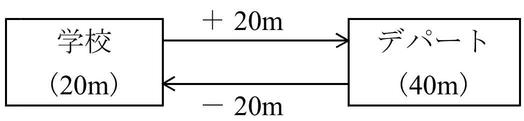
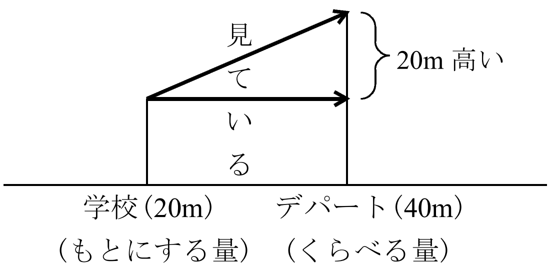
(2) 授業実践例

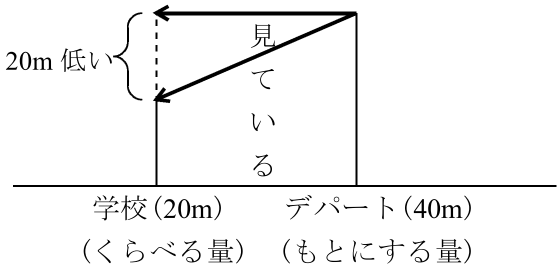
表 4-1 に示した指導計画にしたがって，全 18 時間の授業実践を行った。２つの数量の関係を把握する場合と２組の数量の関係を比較する場合のどちらにおいても，加法的な考えと乗法的な考えの双方からアプローチできる学習過程を位置付けたことが特徴である。そこで，第１時・第２時の授業展開及び第 15 時・第 16 時の授業展開を示す。なお，それ以外の学習については，第５学年の教科書[28]の「割合」の単元に記載されている内容を中心に，４項関係に基づいた比の関係図と２つの比の関係図を組み合わせた図を用いて指導を行った。詳細な学習指導案は付録 16 に掲載。

第１時・第２時では，加法的な考えと乗法的な考えの双方からアプローチした結果を全て取り上げることにより，２つの数量の関係の差による把握も認め，２つの数量の関係の割合による把握に気づかせることをねらいとしている。また，既習の何倍という考え方と割合を結びつけるために，双方向の見方に基づいて，基準量と１倍を意識させることをねらいとしている。この１倍は，基準量の割合であり乗法の単位元である。さらに，乗法的な考えの下で集められた情報を統合することにより，割合，比較量，基準量の関係を表す３つの式を捉えられるように展開を工夫している。「高さくらべ」の場面は，第５学年の教科書[28]でも取り扱われている。教科書では，学校：15m，デパート：30m，テレビ塔：90m である。児童は，既に商分数について学習しているが，分数倍で表す経験が少ないため，小数倍で表す方が理解しやすい。しかし，双方向の見方に基づいて，２つの建物の高さの関係を把握するとき，割合を有限小数で表すことができないものが含まれる。そこで，全ての割合を有限小数で表すことができるように，学校：20m，デパート：40m，テレビ塔：100m に変更している。

第１時・第２時の授業展開

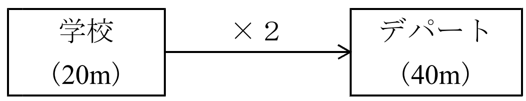
児童の活動	指導上の留意点と支援
〔第１時〕 １．課題を知る。 ３つの建物の高さくらべをしよう。  	○３つの建物の高さを捉えさせ，課題を提示する。
２．３つの建物の高さくらべをする。 《予想される児童の反応》 ・学校は，デパートより低い。 ・テレビとうは，３つの建物の中で一番高い。 ・学校は，デパートより 20m 低い。 ・テレビとうは，学校より 80m 高い。 ・学校は，デパートの半分。 ・テレビとうは，学校の５倍の高さ。	○ワークシートへの書き方の説明(ワークシート１枚に考えた結果を１つ書く。時間内にいくつも考えた結果を書く。)を行ってから，高さくらべの結果を書かせる。 ○高さくらべのできない児童には，「デパートから学校を見たら，どちらが高い？(どれくらい高い？)」などの具体的な発問を行う。また，学校からデパートのように一方向だけの見方に基づき，比べた結果を書いている児童には，「逆の方向から見たら，どのようなことが考えられるか？」などの発問をする。
３．３つの建物の関係を関係図にまとめる。 ○グループの中で同じ意見をまとめる。	○分類整理に困っているグループには，共通している観点を見つけるように助言を行う。
○分類整理を行い，高さくらべの結果を黒板に貼る。 ・数字を使わずに比べた意見 ・たし算やひき算を使って比べた意見 ・かけ算やわり算を使って比べた意見	○１つのグループを指名し，左から「数字を使わずに比べた意見」,「たし算やひき算を使って比べた意見」,「かけ算やわり算を使って比べた意見」の順に貼付するよう促す。他のグループが黒板に貼付するとき，同じ内容の意見は重ねて貼付するよう指示をする。
○３つの建物の関係を関係図に表す。 ・たし算やひき算を使って比べた意見  	○２つずつ建物を取り上げ，どのような関係になっているかを，児童とのやりとりを通して確認する。 ○２つの建物の関係を理解できない児童がいる場合，他の児童に説明をさせ，理解を促すようにする。

・かけ算やわり算を使って比べた意見  ４．まとめる。 ○本時の感想を書く。	○かけ算やわり算を使って比べた関係図において，２倍や５倍などがどのようにして算出されたのかが分からない児童のために，クラス全体で確認しながら，関係図に「40 ÷ 20」,「100 ÷ 20」などの式をかき入れていく。 ○関係図を基に，一方から他方を見る見方(左から右へ赤の矢印）と他方から一方を見る見方(右から左へ青の矢印)を確認し，合わせて「双方向の見方」と呼ぶことを知らせる。 ○机間巡視により，本時の理解度を知る。
〔第２時〕 １．課題を知る。 ３つの建物の関係を考えてみよう。 ２．たし算やひき算を使って比べた関係図から，もとにする量とくらべる量の関係を考える。 ○たし算やひき算を使って比べた関係図において，学校とデパートに関する＋ 20m やー 20m の意味を考える。  ・学校よりデパートの方が 20m 高い。 ・学校からデパートを見ている。  ・デパートより学校の方が 20m 低い。 ・デパートから学校を見ている。	 ○前時において，３つの建物の図を基に，学校，デパート，テレビとうの関係を，たし算やひき算を使って比べた関係図，かけ算わり算を使って比べた関係図にまとめたこと，２つの関係図の共通した特徴として双方向の見方があったことを確認し，本時の課題を提示する。 ○たし算やひき算を使って比べた関係図において，学校とデパートを取り上げ，「＋ 20m(－20m)というのは，どのような意味ですか？」,「学校とデパートの内，どちらから見て 20m 高い(20m 低い)のですか？」と発問する。それぞれの発問において，児童の意見を板書した後，線分図を提示し，「20m 高い(20m 低い)というのは，この線分図でどの部分ですか？」と発問し，線分図により 20m 高い(20m 低い)という意味を捉えさせる。 ○見る方が「もとにする量」であり，見られる方が「くらべる量」であることを知らせる。なお， 線分図において＋ 20m の意味を考えさせた後，－ 20m の意味を考えさせるようにする。

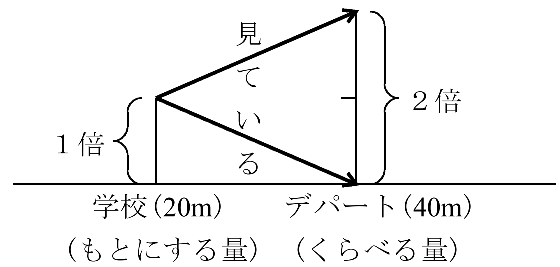


３．かけ算やわり算を使って比べた関係図から，もとにする量，くらべる量，割合の関係を考える。

○かけ算やわり算を使って比べた関係図において，学校とデパートに関する×２の意味を考える。



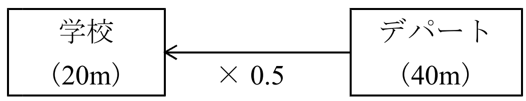
・学校から見て２倍がデパート。
・見る方がもとにする量なので，学校がもとにする量で，くらべる量はデパート。
・２倍は２つ分なので，学校は１つ分。
・学校は１倍。



○かけ算やわり算を使って比べた関係図において，学校とデパートを取り上げ，学校の２倍がデパートという場合，「２倍はどちらから見て２倍なのですか？」，「もとにする量は，学校ですか？デパートですか？」と発問する。それぞれの発問において，児童の意見を板書した後，線分図を提示し，「２倍というのは，この線分図でどの部分ですか？」と発問する。線分図により２倍という意味を捉えさせる。

○「２倍とはいくつ分のことですか？」，「学校はいくつ分ですか？」と発問し，児童の意見を板書した後，もとにする量は必ず１倍であることを押さえる。

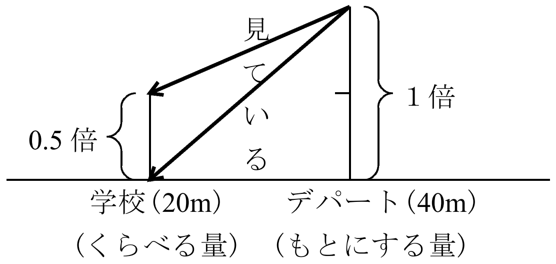
○かけ算やわり算を使って比べた関係図において，学校とデパートに関する× 0.5 の意味を考える。



・デパートから見たら 0.5 が学校。
・デパートから見ているので，デパートがもとにする量で，学校がくらべる量

○かけ算やわり算を使って比べた関係図を基に，「デパートから見たら学校は何倍ですかと発問し，0.5 倍であることを押さえた後，「もとにする量は学校とデパートの内，どちらですか？」と発問する。児童の意見を板書した後，線分図を提示し，「デパートと学校は，それぞれ何倍と言えばよいでしょう？」と発問する。デパートが１倍であり，学校が 0.5 倍であることを押さえ，線分図に記入する。

○１倍，２倍を取り上げ，くらべる量がもとにする量の何倍（～倍）に当たるかを表した数を「割合」と言うことを知らせる。



○かけ算やわり算を使って比べた関係図における式を整理し，もとにする量，くらべる量，割合の関係を表す公式を捉える。

40	÷	20	＝	2	20	×	2	＝	40
100	÷	40	＝	2.5	40	×	2.5	＝	100
100	÷	20	＝	5	20	×	5	＝	100
20	÷	40	＝	0.5	40	×	0.5	＝	20
40	÷	100	＝	0.4	100	×	0.4	＝	40
20	÷	100	＝	0.2	100	×	0.2	＝	20
「くらべる量	÷	もとにする量	＝	割合」	「もとにする量	×	割合	＝	くらべる量」

40	÷	2	＝	20
100	÷	2.5	＝	40
100	÷	5	＝	20
20	÷	0.5	＝	40
40	÷	0.4	＝	100
20	÷	0.2	＝	100
「くらべる量	÷	割合	＝	もとにする量」

4．まとめる。 ○本時の感想を書く。	○机間巡視により，本時の理解度を知る。

第 15 時・第 16 時では，大小比較を含めた加法的な考えと乗法的な考えの双方からアプローチした結果を全て取り上げることにより，２組の数量の関係の大小による比較も認め，２組の数量の関係の割合による比較に気づかせることをねらいとしている。また，くじ全体の総数，当たりくじの本数，はずれくじの本数のいずれか１つが等しい場合，なぜ２組の数量の関係の大小による比較が可能なのかを考えさせる。これにより，割合の等価性の認識や２組の数量の関係の割合による比較の理解を深め，ミスコンセプションを修正したりプリコンセプションを発展させたりすることをねらいとしている。割合に関する概念的知識と手続き的知識を同時活性化させるために，数値を設定して割合を求める必要性を感じさることが重要であり，敢えて数値を含まない問題場面を設定している。

第15時・第16時の授業展開

児童の活動	指導上の留意点と支援
〔第15時〕	
１．学習の課題を知る。 ２つのくじ A・B の当たりやすさについて考えよう。 ○くじの当たりやすさにはどのようなことが関係するかを考える。 ・全体のくじの数 ・当たりくじの数 ・はずれくじの数	○課題を読ませた後，くじに関係する要素について捉えさせる。 ○「当たりやすい」とは，「くじを１本引くとき，当たりくじが出やすい」ということを確認する。
２．２つのくじにおいて，全体のくじの数，当たりくじの数，はずれくじの数の１つだけが同じ場面の問題について考える。 《全体のくじの数が同じ場面》 くじ A とくじ B の全体のくじの数は，同じ。 くじ A は，くじ B より当たりくじの数が多い。 くじ A は，くじ B よりはずれくじの数が少ない。 A［約 60%｜約 40%］ B［約 40%｜約 60%］ 答：全体のくじの数が同じなので，当たりくじの数が多いくじ A の方が，当たりやすい。 《当たりくじの数が同じ場面》 くじ A とくじ B の全体のくじの数は，異なる。 くじ A とくじ B は，当たりくじの数が同じ。 くじ A は，くじ B よりはずれくじの数が多い。 A［約 40%｜約 60%］ B［50%｜50%］ 答：くじ A とくじ B の当たりくじの数は同じなので，はずれくじの数が少ないくじ B の方が当たりやすい。	○問題場面をイメージしにくい児童も考えられるので，全体のくじの数が同じ場面について，モデルとなる問題場面を表したテープ図を教師が提示する。当たりくじの数が同じ場面とはずれくじの数が同じ場面についは，同じ部分のみを提示し，異なる部分については自分でかかせる。 ○テープ図において，赤の部分が当たりくじの数を表し，白の部分がはずれをくじの数を表すことを共通理解する。 ○ワークシートに，くじ A とくじ B の内，どちらが当たりやすいかを記入させ，理由も書かせる。 ○「全体のくじの数が同じ場面」と「はずれくじの数が同じ場面」の当たりやすさは，当たりくじの数の大小関係によって決まり，「当たりくじの数が同じ場面」は，当たりやすさは，はずれくじの数の大小関係によって決まることを捉えさせる。 ○「当たりくじの数が同じ場面」は，テープ図の例として，くじ B の当たりくじの数が全体のくじの数の半分になる場合を提示する。また，「はずれくじの数が同じ場面」は，テープ図の例として，くじ B のはずれくじの数が全体のくじの数の半分になる場合を提示する。

《はずれくじの数が同じ場面》

> くじＡとくじＢの全体のくじの数は，異なる。
> くじＡは，くじＢより当たりくじの数が多い。
> くじＡとくじＢは，はずれくじの数が同じ。

答：くじ A とくじ B のはずれくじの数は同じなので，「当たりくじの数」が多いくじ A の方が当たりやすい。

○「半分」という言葉が出た場合は，「当たりくじの数が全体のくじの数のどれくらいにあたるか」につながる考えとして取り上げる。ここで，当たりくじの数とはずれくじの数という「部分－部分」への着目から，当たりくじの数と全体のくじの数という「部分－全体」への着目に変わったことに気づかせるようにする。

３．「当たりくじの数が全体のくじの数のどれくらいにあたるか」により，当たりやすさの理由を捉え直す。

《全体のくじの数が同じ場面》

答：全体のくじの数が同じ場合は，当たりくじの数が多いほど，当たりくじの割合が大きくなる。

《当たりくじの数が同じ場面》

答：当たりくじの数が同じ場合は，はずれくじの数が少ないほど，当たりくじの割合が大きくなる。

《はずれくじの数が同じ場面》

答：はずれくじの数が同じ場合は，当たりくじの数が多いほど，当たりくじの割合が大きくなる。

○「当たりくじの数が全体のくじの数のどれくらいにあたるか」という考え方は，教師の方から提示する。

○テープ図を帯グラフに見立て，当たりくじが全体の約何％にあたるかを考えさせる。これがくじ全体に対する当たりくじの割合であることを確認する。

○「当たりくじの数が全体のくじの数のどれくらいにあたるか」は，それぞれのくじにおいて考えなければならないことを捉えさせる。

４.「全体のくじの数」,「当たりのくじの数」,「はずれのくじの数」について考え，問題づくりをする。

○ワークシートの(　　)の中の「多い」と「少ない」という言葉のどちらかを選択する。

○「くじＡとくじＢの全体の数は異なる。くじＡは，くじＢより当たりくじが(多い・少ない)。くじ A は，くじ B よりはずれくじが(多い・少ない)。くじ A とくじ B の内，どちらのくじが当たりやすいでしょう。」という問題場面を提示したワークシートを配布する。

〔第16時〕

１．前時に作成した問題を確認する。

> 問題１
> くじＡとくじＢの全体の数は異なる。
> くじＡは，くじＢより当たりくじが(多い)。
> くじＡは，くじＢよりはずれくじが(少ない)。
> くじ A とくじ B の内，どちらのくじが当たりやすいでしょう。

○第１時において，テープ図を基に「当たりくじの数が全体のくじの数のどれくらいにあたるか」を％で表すことにより比較できたことを確認する。この後，問題１と問題２を提示し，問題を音読させる。

問題２
くじＡとくじＢの全体の数は異なる。
くじＡは，くじＢより当たりくじが(多い)。
くじＡは，くじＢよりはずれくじが(多い)。
くじＡとくじＢの内，どちらのくじが当たりやすいでしょう。

２．問題１と問題２において，テープ図をかき，問題解決をする。

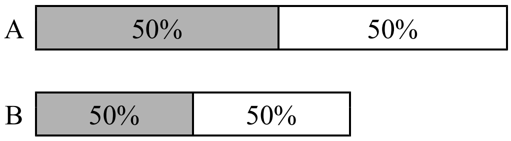
○ワークシートを用意し，どちらが当たりやすいか，また，そのわけを書かせる。

問題１

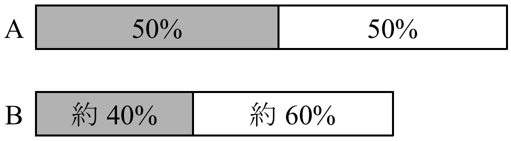
答：くじＡはくじＢより，当たりくじの割合が大きいので，くじＡの方が当たりやすい。

○問題１については，第１時の「はずれくじの数が同じ場合」と仮定すると，当たりくじの数の多いくじＡの方が当たりやすいことを基に，くじＡはさらにはずれくじの数が少ないことから，くじＡの方が当たりやすいことを捉えさせる。

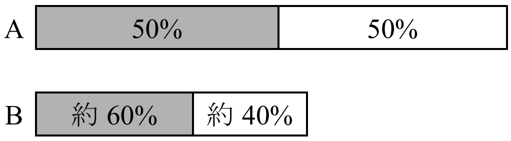
問題２



答：くじＡもくじＢも，当たりくじの割合が同じなので，同じだけ当たりやすい。



答：くじＡはくじＢより，当たりくじの割合が大きいので，くじＡの方が当たりやすい。

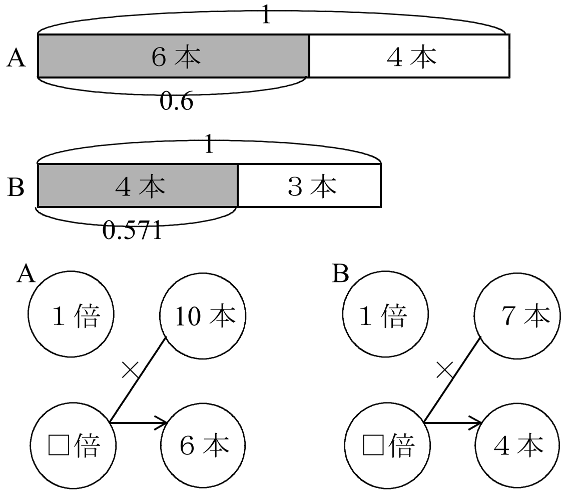


答：くじＢはくじＡより，当たりくじの割合が大きいので，くじＢの方が当たりやすい。

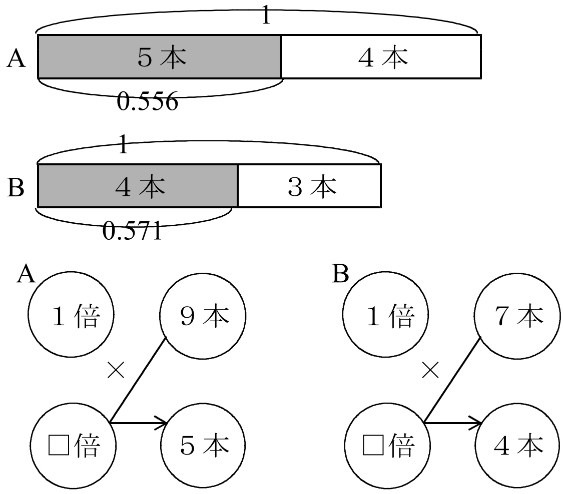
○問題２については，児童の意見から３つの場合があることを引き出す。
○問題２については，割合の等価性を認識できるように，当たりくじの数が全体のくじの数の半分であり，当たりやすさが等しい場合から取り上げ，条件を満たす範囲で，くじＢのはずれくじの数を増減させることにより，３つの場合全てが当てはまることを捉えさせる。

３．当たりくじが全体の約何％にあたるかにより当たりやすさを判断しにくい場面について，適切な数量を記入し，問題解決をする。

○当たりくじが全体の約何％にあたるかにより当たりやすさを判断しにくい場面を提示することで，数値を設定して割合を求める必要性を感じさせる。



A：６÷10＝0.6
B：４÷７＝0.571
答：くじ A の方が当たりやすい。



A：５÷９＝0.556
B：４÷７＝0.571
答：くじ B の方が当たりやすい。

○場面については，できる限り児童の示した数量の中から適切な数量を採り上げ，クラス全体の問題として解決する。
○当たりやすさとは，「当たりくじの数が全体のくじの数のどれくらいにあたるか」である，つまり，「当たりくじの数÷全体のくじの数」であることを確認する。
○「６÷ 10 ＝ 0.6」の「0.6」は，「当たりくじの数が全体のくじの数の 0.6 倍」という意味であることを捉えさせることにより，「全体を１とする」ことの意味を捉えさせる。

４．練習問題を解く。

【練習１】
くじ A とくじ B の全体の数は異なる。
くじ A は，くじ B より当たりくじが(少ない)。
くじ A は，くじ B よりはずれくじが(多い)。
くじ A とくじ B の内，どちらのくじが当たりやすいでしょう。
【練習２】
くじ A とくじ B の全体の数は異なる。
くじ A は，くじ B より当たりくじが(少ない)。
くじ A は，くじ B よりはずれくじが(少ない)。
くじ A とくじ B の内，どちらのくじが当たりやすいでしょう。

○個別指導を行う。
○机間巡視により，本時の理解度を知る。

4.2　割合に関する２つの知識の同時活性化を図る授業の効果

(1)割合に関する教科書で学習した知識の調査問題

割合に関する２つの知識の同時活性化を図る授業には，２つの数量の関係を把握する場合と２組の数量の関係を比較する場合の両方が位置付けられている。２つの数量の関係を把握する場合で扱う内容の多くは，教科書の内容を対象としている。２つの数量の関係を把握する場合に関して児童が身に付けた知識は，割合に関する教科書で学習した知識という意味において，基礎・基本と考えることができる。一方，２組の数量の関係を比較する場合は，活用と考えることができる。この活用に関する知識を測定する問題として，第３章において，割合に関する概念的知識及び手続き的知識の調査問題を開発した。そこで，割合に関する教科書で学習した知識を測定するために，「割合に関する状況」，「比較量に関する状況」，「基準量に関する状況」から成る基本問題を作成した。

割合に関する教科書で学習した知識を測定するための基本問題は，教科書に掲載された問題の中から３つの状況に関して各１題，計３題を問題の難易度順に出題する。問題１は「比較量に関する状況」，問題２は「割合に関する状況」，問題３は「基準量に関する状況」である。また，解答は次の５つの項目について記述するようにした。

①もとにする量が何かを書く。
②「○○の～倍が△△です」という短い文を書く。
③関係図をかく。
④式を立てる。
⑤計算をして答を書く。

①と②は割合に関する概念的知識と関連がある項目であり，④と⑤は割合に関する手続き的知識と関連がある項目である。③は反復過程における割合に関する概念的知識と手続き的知識を結び付ける問題の表出に当たる。このような考えに基づいて作成した調査問題を以下に示す。問題２と問題３において，①～⑤の項目は問題１と同じであるため，異なる問題文のみを示す。

〔問題１〕陸上クラブの定員は 15 人です。希望者は定員の 0.8 倍あったそうです。
陸上クラブの希望者は何人ですか。

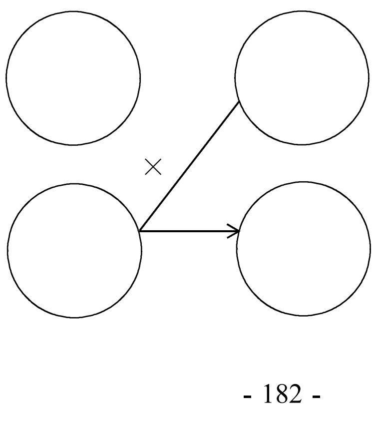
①　もとにする量が何かを書く。

もとにする量は，________________ です。

②　「○○の～倍が△△です」という短い文を書く。

____________ の ______ 倍が ____________ です。

③　関係図をかく。



④　式を立てる。	（式）
⑤　計算をして答を書く。	（答）
〔問題２〕５年生全体の人数は 125 人です。75 人が運動クラブに入りました。 運動クラブの人数は，５年生全体の人数の何倍ですか。	
〔問題３〕理科図かんは 1800 円です。これは，国語辞典の 1.2 倍にあたるそうです。 国語辞典は何円ですか。	

(2)調査対象

割合に関する２つの知識の同時活性化を図る授業を受けた第５学年の児童 72 名を対象とした。基本問題は事後調査のみ，割合に関する概念的知識と手続き的知識の問題は事前調査と事後調査を実施した。

(3)各知識の得点化

割合に関する教科書で学習した知識に関して，反復モデルを考慮する場合，最も重要な項目は③「関係図をかく」である。また，関係図をかくためには，②「○○の～倍が△△です」という短い文を書く」が関連し，関係図がかけることにより，④「式を立てる」につながっている。そこで，項目ごとに正答を１点，誤答を０点とし，その後，①と⑤の得点はそのまま，②と④の得点を２倍，③の得点を３倍し，各項目の得点の重み付けを行った。５つの項目の内，③の正答を３点，②と④の正答を２点，①と⑤の正答を１点，各問題の最高得点を９点とした。また，正答と誤答の判断は次のように行った。①に関して，もとにする量に対応する物事の名称とその量の両方を記述することができた場合に正答とする。なお，数量が未知の場合は□等を使用して記述する。②に関して，くらべる量に対応する物事の名称とその量，もとにする量に対応する物事の名称とその量，割合に対応する数の全てを，適切な箇所に記述することができた場合に正答とする。③に関して，割合，くらべる量，もとにする量に対応する数量及び１倍の全てを，比の関係図の適切な箇所に記述することができた場合に正答とする。④に関して，比の関係図を基にした式であるため，基準量×割合の式のみを正答とする。計算結果については⑤で判断するため，フレーズ型の式でよい。⑤に関して，正しい計算結果と正しい単位を付した答の両方を記述することができた場合に正答とする。①～⑤に関して，上記以外のものは誤答とする。３つの状況に関する知識を総合して，割合に関する教科書で学習した知識とする場合，３つの状況の得点の平均点を割合に関する教科書で学習した知識の得点とした。

割合に関する概念的知識と手続き的知識の３つの状況は，水準０～水準２までの３つに区分されており，水準内において段階に区分される場合がある。児童が，ある水準または段階に属する問題の 50 %以上を正答した場合，その水準または段階を通過したと判断する。最終的に通過した最も高い水準または段階を，その児童が属する水準または段階とする。表 4-2，表 4-3 に示す基準にしたがって，児童が通過した水準または段階により得点化を行った。３つの状況に関する知識を総合して割合に関する概念的知識とする場合，３つの状況の得点の平均点を割合に関する概念的知識の得点とした。また，３つの状況に関する知識を総合して割合に関する手続き的知識とする場合，「割合に関する状況」のみ最高得点が４点であるので，この状況の得点を 3/4 倍することにより得点の換算を行い，３つの状況の得点の平均点を割合に関する手続き的知識の得点とした。

表4-2　割合に関する概念的知識の得点化

水準	段階	割合に関する状況	比較量に関する状況	基準量に関する状況	得点
0					0点
1	1A	問題2 問題1 問題3 問題5	問題2 問題1	問題2 問題1	1点
	1B	問題6	問題6 問題4	問題6 問題3	2点
2		問題4	問題5 問題3	問題5 問題4	3点

表4-3　割合に関する手続き的知識の得点化

水準	段階	割合に関する状況	得点
0			0点
1	1A	問題1 問題4	1点
	1B	問題6 問題3 問題12	2点
	1C	問題2 問題8 問題9 問題7	3点
2		問題5 問題10 問題11	4点

水準	段階	比較量に関する状況	基準量に関する状況	得点
0				0点
1	1A	問題1 問題4 問題11 問題9 問題10 問題8 問題7	問題2 問題5 問題7 問題11 問題8 問題9 問題10 問題12	1点
	1B	問題2 問題5	問題3 問題6	2点
2		問題6 問題12 問題3	問題1 問題4	3点

(4) 調査結果の分析と考察

割合に関する２つの知識の同時活性化を図る授業の効果を調べるために，割合に関する教科書で学習した知識の獲得の程度について分析を行った。割合に関する教科書で学習した知識の得点の概要を表 4-4 に示す。①～⑤の項目全てが正解である完答を正答とすると，３つの状況の正答率は,「割合に関する状況」に関して 94.4%,「比較量に関する状況」に関して 98.6%,「基準量に関する状況」に関して 87.5%である。全国学力・学習状況調査において，同様のタイプの問題の正答率は,「割合に関する状況」に関して，平成 20 年度：55.7 %，平成 21 年度：57.1 %，平成 22 年度：57.8 %である。「比較量に関する状況」に関して，平成 20 年度：55.1 %，平成 25 年度：76.9 %と 77.1 %，平成 26 年度：72.1%である。「基準量に関する状況」に関して，平成 24 年度：41.3 %と 58.7 %である。平成 20 年度，平成 21 年度，平成 24 年度，平成 25 年度の調査において割合が百分率で表されていたことを考慮しても，今回の調査結果は，児童が割合に関する教科書で学習した知識を十分獲得していることを意味している。割合に関する２つの知識の同時活性化を図る授業は，基礎・基本としての割合に関する教科書で学習した知識の獲得に効果がある。

表4-4　教科書で学習した知識の得点の概要

児童番号	割合に関する状況	比較量に関する状況	基準量に関する状況	教科書で学習した知識
5001	9	9	9	9.000
5002	9	9	9	9.000
5003	9	9	8	8.667
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
5070	9	9	9	9.000
5071	9	9	9	9.000
5072	9	9	9	9.000
平均点	8.736	8.986	8.486	8.736
標準偏差	1.311	0.118	1.728	0.708

基礎・基本としての割合に関する教科書で学習した知識が十分に獲得されていることが明らかになったので, 活用としての割合に関する概念的知識と手続き的知識の向上の程度について分析を行った。割合に関する概念的知識と手続き的知識の得点の概要を事前調査と事後調査に分けて, 表 4-5 ～表 4-8 に示す。

表4-5　事前調査における割合に関する概念的知識の得点の概要

児童	割合に関する状況	比較量に関する状況	基準量に関する状況	概念的知識
5001	2	2	2	2.000
5002	2	2	2	2.000
5003	1	2	1	1.333
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
5070	2	2	1	1.667
5071	0	2	1	1.000
5072	1	1	0	0.667
平均	1.611	1.806	1.833	1.750
標準偏差	0.703	0.833	0.993	0.647
分散	0.495	0.694	0.986	0.419

表4-6　事前調査における割合に関する手続き的知識の得点の概要

児童	割合に関する状況	比較量に関する状況	基準量に関する状況	手続き的知識
5001	2	3	2	2.167
5002	2	2	0	1.167
5003	2	3	0	1.500
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
5070	4	2	2	2.333
5071	4	3	1	2.333
5072	3	3	2	2.417
平均	2.847	1.819	1.611	1.855
標準偏差	1.274	1.155	1.056	0.753
分散	1.624	1.333	1.114	0.567

表4-7　事後調査における割合に関する概念的知識の得点の概要

児童	割合に関する状況	比較量に関する状況	基準量に関する状況	概念的知識
5001	2	2	2	2
5002	2	2	2	2
5003	0	2	2	1.333
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
5070	1	1	2	1.333
5071	2	3	2	2.333
5072	2	3	3	2.667
平均	1.944	2.222	2.278	2.148
標準偏差	0.554	0.655	0.655	0.491
分散	0.307	0.429	0.429	0.241

表4-8　事後調査における割合に関する手続き的知識の得点の概要

児童	割合に関する状況	比較量に関する状況	基準量に関する状況	手続き的知識
5001	4	3	1	2.333
5002	2	0	1	0.833
5003	3	0	3	1.750
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
5070	4	3	3	3.000
5071	4	3	3	3.000
5072	4	3	3	3.000
平均	3.361	2.181	2.014	2.238
標準偏差	0.893	1.105	1.000	0.688
分散	0.797	1.221	1.000	0.473

表 4-5 ～表 4-8 を基に，割合に関する概念的知識と手続き的知識の得点について，事前調査と事後調査の相関及び平均の差に関する t 値を算出し，表 4-9，表 4-10 に示す。なお，自由度は N － 1 である。表中の「*」は，５％水準で有意であることを表す。

表4-9　割合に関する概念的知識における事前調査と事後調査の相関とt値

	割合に関する状況	比較量に関する状況	基準量に関する状況	概念的知識
相関係数	0.269	0.261	0.246	0.345
t 値	3.652*	3.835*	3.578*	5.057*

表4-10　割合に関する手続き的知識における事前調査と事後調査の相関とt値

	割合に関する状況	比較量に関する状況	基準量に関する状況	手続き的知識
相関係数	0.458	0.446	0.225	0.568
t 値	3.686*	3.133*	2.162*	4.803*

有意水準５％において，自由度 70 の場合，t の臨界値は 1.99 である。割合に関する概念的知識と手続き的知識の３つの状況の得点，３つの状況に関する知識を総合した割合に関する概念的知識の得点と手続き的知識の得点の全てにおいて，事前調査と事後調査の平均間に有意な差がある。割合に関

する２つの知識の同時活性化を図る授業は，基礎・基本としての割合に関する教科書で学習した知識の獲得だけでなく，活用としての割合に関する概念的知識と手続き的知識の向上にも効果がある。

4.3　割合に関する３つの知識の関係

(1) ３つの知識に関する分析モデル

基礎・基本としての割合に関する教科書で学習した知識の得点，活用としての割合に関する概念的知識の得点，活用としての割合に関する手続き的知識の得点という３つの知識の得点の関係を調べるために，割合に関する概念的知識と手続き的知識の事後調査，割合に関する教科書で学習した知識に関する基本問題による調査のデータを用いて，重回帰分析とパス解析を行った。「パス解析を行うに当たっては，使用するモデルを予め明らかにしておかなければならない」[188, p.48]。そこで，図 4-5 に示す３つの知識に関する分析モデルを考えた。なお，分析モデルにおける基礎・基本としての教科書で学習した知識は，図 4-6 に示す反復過程を通して構成された教科書の内容に関する知識であると捉える。

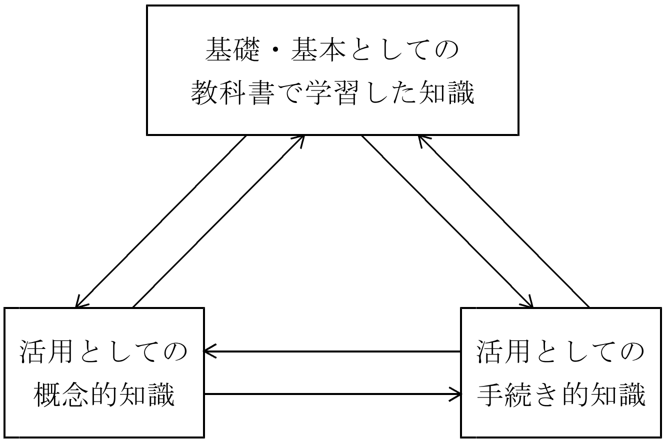


図4-5　３つの知識に関する分析モデル

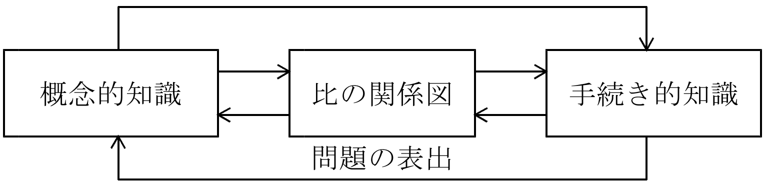


図4-6　基礎・基本としての知識に関する反復過程

(2) ３つの知識に関する相関

表 4-4，表 4-7，表 4-8 を基に，割合に関する３つの知識の得点の相関を表 4-11 に示す。活用としての割合に関する概念的知識の得点を X_1，活用としての割合に関する手続き的知識の得点を X_2，基礎・基本としての割合に関する教科書で学習した知識の得点を X_3 と表す。また，X_1 と X_2 の相関係数を r_{12}，X_1 と X_3 の相関係数を r_{13}，X_2 と X_3 の相関係数を r_{23} と表す。

表4-11　３つの知識に関する相関

	X_1	X_2	X_3
X_1	1.000		
X_2	0.322	1.000	
X_3	0.322	0.325	1.000

X_1 と X_2 に関して $r_{12} = 0.322$，X_1 と X_3 に関して $r_{13} = 0.322$，X_2 と X_3 に関して $r_{23} = 0.325$ であり，全て弱い相関がある。そこで，割合に関する３つの知識の得点間の直線的関係の有意性を調べるために，表 4-11 を基に無相関検定を行った［186, pp.223-224］。

X_1 と X_2 に関して，$t = 0.322 \sqrt{72-2} \,/\, \sqrt{1-(0.322)^2} = 2.844$

X_1 と X_3 に関して，$t = 0.322 \sqrt{72-2} \,/\, \sqrt{1-(0.322)^2} = 2.842$

X_2 と X_3 に関して，$t = 0.325 \sqrt{72-2} \,/\, \sqrt{1-(0.325)^2} = 2.875$

有意水準５％において，自由度 70 の場合，t の臨界値は 1.99 である。X_1 と X_2 に関して $t = 2.844$，X_1 と X_3 に関して $t = 2.842$，X_2 と X_3 に関して $t = 2.875$ であり，割合に関する３つの知識の得点間の全てに有意な相関がある。

(3) ３つの知識に関する重回帰分析

重回帰分析［187, pp.402-406］，［189, pp.3-33］として，標準偏回帰係数，重相関係数，決定係数の算出，標準偏回帰係数及び重相関係数の有意性の検定，重回帰分析の結果の考察を行った。

1) 標準偏回帰係数

「モデルに組み込まれた変数の内のあるものは，他の変数に影響を与えるものと考えられ，他の変数を説明するのに用いられる。説明する方の変数は独立変数と呼ばれ，説明される方の変数は従属変数と呼ばれる」［188, p.17］。割合に関する３つの知識の得点 X_1，X_2，X_3 を変数とする。X_1 を従属変数，X_2，X_3 を独立変数としたとき，X_2，X_3 からの X_1 の予測値を $\hat{X}_1$ と表し，$\hat{X}_1$ が X_2 及び X_3 とそれぞれ直線的関数関係にあれば，$\hat{X}_1$ は式①（重回帰等式）で示される。このとき，$b_{12\cdot3}$ は X_3 の影響を取り除いたときの X_2 から $\hat{X}_1$ への影響の大きさと向きを表した偏回帰係数である。また，$b_{13\cdot2}$ は X_2 の影響を取り除いたときの X_3 から $\hat{X}_1$ への影響の大きさと向きを表した偏回帰係数である。

$$\hat{X}_1 = \overline{X}_1 + b_{12\cdot3}(X_2 - \overline{X}_2) + b_{13\cdot2}(X_3 - \overline{X}_3) \quad \cdots①$$

式①において，$\hat{X}_1 - \overline{X}_1$ を $\hat{x}_1$，$X_2 - \overline{X}_2$ を x_2，$X_3 - \overline{X}_3$ を x_3 と表す。このとき，式①は式②と表される。

$$\hat{x}_1 = b_{12\cdot3}x_2 + b_{13\cdot2}x_3 \quad \cdots②$$

x_1，x_2，x_3 の分散を u_1^2，u_2^2，u_3^2，標準偏差を u_1，u_2，u_3 と表し，式②の両辺を $u_1u_2u_3$ で割る。このとき，式②は式③と表される。

$$\frac{\hat{x}_1}{u_1u_2u_3} = \frac{b_{12\cdot3}x_2}{u_1u_2u_3} + \frac{b_{13\cdot2}x_3}{u_1u_2u_3} \quad \cdots③$$

式③において，$\hat{x}_1 / u_1$，x_2 / u_2，x_3 / u_3 は，それぞれ標準得点である。$\hat{x}_1 / u_1$ を $\hat{z}_1$，x_2 / u_2 を z_2，x_3 / u_3 を z_3 と表し，式③の両辺に u_2u_3 をかける。このとき，式③は式④と表される。

$$\hat{z}_1 = \left[b_{12\cdot3}\left(\frac{u_2}{u_1}\right) \right] z_2 + \left[b_{13\cdot2}\left(\frac{u_3}{u_1}\right) \right] z_3 \quad \cdots④$$

式④において，$b_{12\cdot3}\left(\frac{u_2}{u_1}\right)$ を $b'_{12\cdot3}$，$b_{13\cdot2}\left(\frac{u_3}{u_1}\right)$ を $b'_{13\cdot2}$ と表す。このとき，式④は式⑤と表される。

$$\hat{z}_1 = b'_{12\cdot3}z_2 + b'_{13\cdot2}z_3 \quad \cdots ⑤$$

式⑤において，$b'_{12\cdot3}$ と $b'_{13\cdot2}$ は，標準得点の偏回帰係数である標準偏回帰係数を表し，次式により求められる。なお，$r_{12} = r_{21}$，$r_{13} = r_{31}$，$r_{23} = r_{32}$ である。

$$b'_{12\cdot3} = \frac{r_{12} - r_{13}r_{23}}{1 - r^2_{23}} \qquad b'_{12\cdot3} = \frac{0.322 - 0.322 \times 0.325}{1 - (0.325)^2} = 0.243$$

$$b'_{13\cdot2} = \frac{r_{13} - r_{12}r_{32}}{1 - r^2_{32}} \qquad b'_{13\cdot2} = \frac{0.322 - 0.322 \times 0.325}{1 - (0.325)^2} = 0.243$$

同様に，X_2 を従属変数，X_1，X_3 を独立変数とした場合の標準偏回帰係数 $b'_{21\cdot3}$，$b'_{23\cdot1}$，X_3 を従属変数，X_1，X_2 を独立変数とした場合の標準偏回帰係数 $b'_{31\cdot2}$，$b'_{32\cdot1}$ も次式により求められる。

$$b'_{21\cdot3} = \frac{r_{21} - r_{23}r_{13}}{1 - r^2_{13}} \qquad b'_{21\cdot3} = \frac{0.322 - 0.325 \times 0.322}{1 - (0.322)^2} = 0.242$$

$$b'_{23\cdot1} = \frac{r_{23} - r_{21}r_{31}}{1 - r^2_{31}} \qquad b'_{23\cdot1} = \frac{0.325 - 0.322 \times 0.322}{1 - (0.322)^2} = 0.247$$

$$b'_{31\cdot2} = \frac{r_{31} - r_{32}r_{12}}{1 - r^2_{12}} \qquad b'_{31\cdot2} = \frac{0.322 - 0.325 \times 0.322}{1 - (0.322)^2} = 0.242$$

$$b'_{32\cdot1} = \frac{r_{32} - r_{31}r_{21}}{1 - r^2_{21}} \qquad b'_{32\cdot1} = \frac{0.325 - 0.322 \times 0.322}{1 - (0.322)^2} = 0.247$$

2) 重相関係数と決定係数

測定値 X_i と X_i の予測値 $\hat{X}_i$ との相関係数が重相関係数 R である。また，R^2 は決定係数であり，測定値 X_i の予測値 $\hat{X}_i$ に対する適合度を示している。X_1 を従属変数，X_2，X_3 を独立変数とした場合の決定係数 $R^2_{1\cdot23}$ は，次式により求められる。

$$R^2_{1\cdot23} = \frac{r^2_{12} + r^2_{13} - 2\ r_{12}\ r_{13}r_{23}}{1 - r^2_{23}} \qquad R^2_{1\cdot23} = \frac{(0.322)^2 + (0.322)^2 - 2 \times 0.322 \times 0.322 \times 0.325}{1 - (0.325)^2}$$

$$= 0.156$$

$$R_{1\cdot23} = 0.395$$

同様に X_2 を従属変数，X_1，X_3 を独立変数とした場合の決定係数 $R^2_{2\cdot13}$，X_3 を従属変数，X_1，X_2 を独立変数とした場合の決定係数 $R^2_{3\cdot12}$ も次式により求められる。

$$R^2_{2\cdot 13} = \frac{r^2_{21} + r^2_{23} - 2\ r_{21}\ r_{23} r_{13}}{1 - r^2_{13}} \qquad R^2_{2\cdot 13} = \frac{(0.322)^2 + (0.325)^2 - 2 \times 0.322 \times 0.325 \times 0.322}{1 - (0.322)^2}$$

$$= 0.158$$

$$R_{2\cdot 13} = 0.398$$

$$R^2_{3\cdot 12} = \frac{r^2_{31} + r^2_{32} - 2\ r_{31}\ r_{32} r_{12}}{1 - r^2_{12}} \qquad R^2_{3\cdot 12} = \frac{(0.322)^2 + (0.325)^2 - 2 \times 0.322 \times 0.325 \times 0.322}{1 - (0.322)^2}$$

$$= 0.158$$

$$R_{3\cdot 12} = 0.398$$

3）標準偏回帰係数の有意性の検定

$b'_{12\cdot 3}$ の有意性の検定には，N を児童数とし，次式による t 検定を用いる。なお，自由度は N － 3 である。

$$t = \frac{b'_{12\cdot 3}}{\sqrt{\dfrac{1 - R^2_{1\cdot 23}}{(1 - r^2_{23})(N - 3)}}} \qquad t = \frac{0.243}{\sqrt{\dfrac{1 - 0.156}{\{1 - (0.325)^2\}(72 - 3)}}} = 2.078$$

同様に $b'_{13\cdot 2}$，$b'_{21\cdot 3}$，$b'_{23\cdot 1}$，$b'_{31\cdot 2}$，$b'_{32\cdot 1}$ の有意性の検定も，次式による t 検定を用いる。

$$t = \frac{b'_{13\cdot 2}}{\sqrt{\dfrac{1 - R^2_{1\cdot 23}}{(1 - r^2_{23})(N - 3)}}} \qquad t = \frac{0.243}{\sqrt{\dfrac{1 - 0.156}{\{1 - (0.325)^2\}(72 - 3)}}} = 2.075$$

$$t = \frac{b'_{21\cdot 3}}{\sqrt{\dfrac{1 - R^2_{2\cdot 13}}{(1 - r^2_{13})(N - 3)}}} \qquad t = \frac{0.242}{\sqrt{\dfrac{1 - 0.158}{\{1 - (0.322)^2\}(72 - 3)}}} = 2.078$$

$$t = \frac{b'_{23\cdot 1}}{\sqrt{\dfrac{1 - R^2_{2\cdot 13}}{(1 - r^2_{13})(N - 3)}}} \qquad t = \frac{0.247}{\sqrt{\dfrac{1 - 0.158}{\{1 - (0.322)^2\}(72 - 3)}}} = 2.118$$

$$t = \frac{b'_{31\cdot 2}}{\sqrt{\dfrac{1 - R^2_{3\cdot 12}}{(1 - r^2_{12})(N - 3)}}} \qquad t = \frac{0.242}{\sqrt{\dfrac{1 - 0.158}{\{1 - (0.322)^2\}(72 - 3)}}} = 2.075$$

$$t = \frac{b'_{32\cdot 1}}{\sqrt{\dfrac{1 - R^2_{3\cdot 12}}{(1 - r^2_{12})(N - 3)}}} \qquad t = \frac{0.247}{\sqrt{\dfrac{1 - 0.158}{\{1 - (0.322)^2\}(72 - 3)}}} = 2.118$$

有意水準５％において，自由度 60 の場合，t の臨界値は 2.00 である。$b'_{12\cdot 3}$ に関して t ＝ 2.078，$b'_{13\cdot 2}$ に関して t ＝ 2.075，$b'_{21\cdot 3}$ に関して t ＝ 2.078，$b'_{23\cdot 1}$ に関して t ＝ 2.118，$b'_{31\cdot 2}$ に関して t ＝ 2.075，$b'_{32\cdot 1}$ に関して t ＝ 2.118 であり，$b'_{12\cdot 3}$，$b'_{13\cdot 2}$，$b'_{21\cdot 3}$，$b'_{23\cdot 1}$，$b'_{31\cdot 2}$，$b'_{32\cdot 1}$ は有意である。

4)重相関係数の有意性の検定

重相関係数 $R_{1\cdot 23}$ の有意性の検定には，一般的に $R^2_{1\cdot 23}$ が用いられる。N を児童数，k を変数の数とし，次式による F 検定を用いる。なお，自由度は k − 1 と N − k である。

$$F=\left(\frac{R^2_{1\cdot 23}}{1-R^2_{1\cdot 23}}\right)\left(\frac{N-k}{k-1}\right) \qquad F=\left(\frac{0.156}{1-0.156}\right)\left(\frac{72-3}{3-1}\right)$$

$$=6.389$$

同様に，$R_{2\cdot 13}$，$R_{3\cdot 12}$ の有意性の検定も，次式による F 検定を用いる。

$$F=\left(\frac{R^2_{2\cdot 13}}{1-R^2_{2\cdot 13}}\right)\left(\frac{N-k}{k-1}\right) \qquad F=\left(\frac{0.158}{1-0.158}\right)\left(\frac{72-3}{3-1}\right)$$

$$=6.488$$

$$F=\left(\frac{R^2_{3\cdot 12}}{1-R^2_{3\cdot 12}}\right)\left(\frac{N-k}{k-1}\right) \qquad F=\left(\frac{0.158}{1-0.158}\right)\left(\frac{72-3}{3-1}\right)$$

$$=6.482$$

有意水準５％において，$F(2, 65)=3.91$ である。$R_{1\cdot 23}$ に関して $F=6.389$, $R_{2\cdot 13}$ に関して $F=6.488$, $R_{3\cdot 12}$ に関して $F=6.482$ であり，$R_{1\cdot 23}$，$R_{2\cdot 13}$，$R_{3\cdot 12}$ は有意である。

5)重回帰分析の結果の考察

割合に関する３つの知識の得点 X_1，X_2，X_3 のそれぞれを従属変数とした場合の重回帰分析の結果として，相関係数，標準偏回帰係数，寄与率，重相関係数をまとめ，表 4-12 〜表 4-14 に示す。なお，寄与率は，「ある独立変数が単独で説明している従属変数の分散の割合」［188, p.41］を意味し，標準偏回帰係数×相関係数× 100 により求められる。表中の「*」は，５%水準で有意であることを表す。

表4-12　X_1を従属変数とした場合

	標準偏回帰係数	相関係数	寄与率
X_2	0.243*	0.322	7.820
X_3	0.243*	0.322	7.805
重相関係数	0.395*		

表4-13　X_2を従属変数とした場合

	標準偏回帰係数	相関係数	寄与率
X_1	0.242*	0.322	7.801
X_3	0.247*	0.325	8.029
重相関係数	0.398*		

表4-14　X_3を従属変数とした場合

	標準偏回帰係数	相関係数	寄与率
X_1	0.242*	0.322	7.787
X_2	0.247*	0.325	8.030
重相関係数	0.398*		

表 4-12 より，X_1 を従属変数，X_2 を独立変数とした場合の寄与率は 7.820 である。活用としての割

合に関する概念的知識の得点の分散の 7.820 %が，活用としての割合に関する手続き的知識の得点の高低のみによって説明される。表 4-13 より, X_2 を従属変数, X_1 を独立変数とした場合の寄与率は 7.801 である。活用としての割合に関する手続き的知識の得点の分散の 7.801 %が，活用としての割合に関する概念的知識の得点の高低のみによって説明される。つまり，活用としての割合に関する概念的知識の得点と活用としての割合に関する手続き的知識の得点は，相互に若干の影響を及ぼす。表 4-12 ～表 4-14 より，X_1 を従属変数，X_3 を独立変数とした場合，X_3 を従属変数，X_1 を独立変数とした場合，X_2 を従属変数，X_3 を独立変数とした場合，X_3 を従属変数，X_2 を独立変数とした場合の全てにおいて，寄与率は同程度である。したがって，割合に関する３つの知識の得点 X_1，X_2，X_3 は，相互に若干の影響を及ぼす。

(4) ３つの知識に関するパス解析

ここでは，パス解析[188, pp.48-54]として，パス・ダイアグラムの作成，相関関係の分割，パス解析の結果の考察を行った。

1) パス・ダイアグラムの作成

重回帰分析によって算出された標準偏回帰係数をパス係数とし，割合に関する３つの知識について作成したパス・ダイアグラムを図 4-7 に示す。なお，パス解析において，「パス係数の絶対値が.05 未満のパスは削除されることが多い」[188, p.51]が，全てのパス係数は.05 以上であるため，削除されるパスはない。図中の「*」は，５%水準で有意であることを表す。

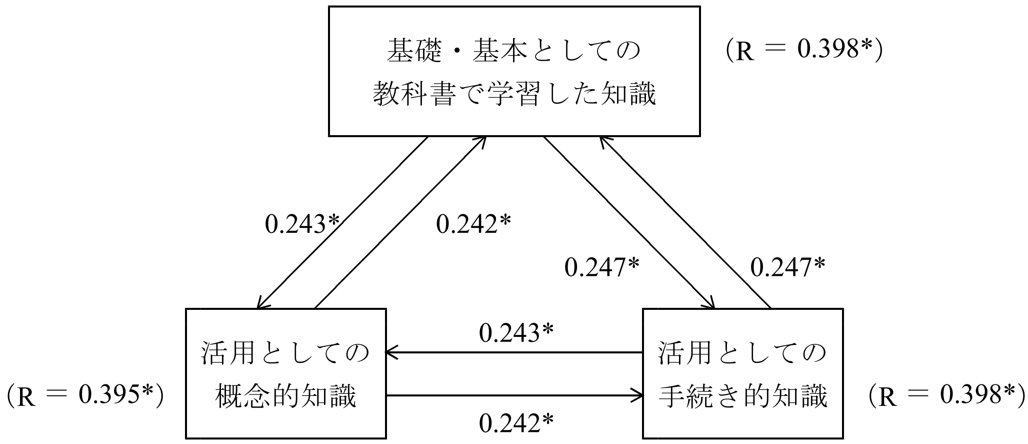


図4-7　３つの知識に関するパス・ダイアグラム

2) 相関関係の分割

変数間の相関係数を直接効果，間接効果，総効果，みかけの相関に分割し，表 4-15 に示す。直接効果は他の変数を介さない単独での影響を意味し，パス係数の値と同じである。間接効果は他の変数を介して伝えられる影響を意味し，パス係数の積によって求められる。総効果は直接効果と間接効果の和である。みかけの相関は，相関係数と総効果の差である。

表4-15　相関関係の分割

従属変数	独立変数	直接効果	間接効果	総効果	相関係数	みかけの相関
X_1	X_2	0.243	0.060	0.303	0.322	0.019
X_1	X_3	0.243	0.060	0.303	0.322	0.019
X_2	X_1	0.242	0.060	0.302	0.322	0.020
X_2	X_3	0.247	0.059	0.306	0.325	0.019
X_3	X_1	0.242	0.060	0.302	0.322	0.020
X_3	X_2	0.247	0.059	0.306	0.325	0.019

3) パス解析の結果の考察

図 4-7 より，割合に関する３つの知識について，次の 12 通りのパス経路がある。

①基礎・基本としての教科書で学習した知識→活用としての手続き的知識
②活用としての手続き的知識→基礎・基本としての教科書で学習した知識
③活用としての概念的知識→活用としての手続き的知識
④活用としての手続き的知識→活用としての概念的知識
⑤基礎・基本としての教科書で学習した知識→活用としての概念的知識
⑥活用としての概念的知識→基礎・基本としての教科書で学習した知識
⑦基礎・基本としての教科書で学習した知識→活用としての手続き的知識→活用としての概念的知識
⑧活用としての概念的知識→活用としての手続き的知識→基礎・基本としての教科書で学習した知識
⑨活用としての手続き的知識→基礎・基本としての教科書で学習した知識→活用としての概念的知識
⑩活用としての概念的知識→基礎・基本としての教科書で学習した知識→活用としての手続き的知識
⑪活用としての手続き的知識→活用としての概念的知識→基礎・基本としての教科書で学習した知識
⑫基礎・基本としての教科書で学習した知識→活用としての概念的知識→活用としての手続き的知識

表 4-15 より，X_1 を従属変数，X_2 を独立変数とした場合，X_2 を従属変数，X_1 を独立変数とした場合，X_1 を従属変数，X_3 を独立変数とした場合，X_3 を従属変数，X_1 を独立変数とした場合，X_2 を従属変数，X_3 を独立変数とした場合，X_3 を従属変数，X_2 を独立変数とした場合の全てにおいて，間接効果が小さく，みかけの相関も殆どない。したがって，上記の 12 の経路の内，①～⑥の経路が有効であり，割合に関する３つの知識の得点 X_1，X_2，X_3 は，互いに弱い相関を持ちながら直接的に影響し合っている。

第５章　考察

5.1　割合の概念

算数教育において，ある領域の概念を概念的知識と手続き的知識という２つの側面から捉えることは，知識獲得の過程における知識の変化のメカニズムとして本質的である。概念的知識と手続き的知識の定義は様々であるが，概念的知識はある領域に関連する知識が相互に結びついた暗黙的または明示的な体系であり，手続き的知識は問題を解決するために要求される一連の実行の体系である。本研究においても，割合の概念を概念的知識と手続き的知識の２つの側面から捉えることとした。しかし，同種の２量の商と異種の２量の商に関して，比例的推論における領域一般性と内包量比較における領域固有性が存在する。したがって，割合に関する領域固有の概念的知識と手続き的知識を定義する必要がある。

２つの数量 A，B の割合を表す方法は，A : B のように２数の組で表す方法と A/B のように１つの数で表す方法がある。本研究において，内包としての割合の定義は，「同種の２つの数量 A，B があり，A が B の何倍であるかを表した数 p を割合という」である。また，割合の概念の適用される範囲としての外延は，「諸事物の関係についての倍，百分率，歩合のような割合を用いた表記の仕方」である。B を基準量，A を比較量とすると，「p ＝ A ÷ B」，「A ＝ B × p 」，「B ＝ A ÷ p 」という関係が成り立つ。この定義から分かるように，割合は乗法的構造と関連がある。割合，比較量，基準量の関係を表す式は３項から成るが，乗法的構造においては，乗法の単位元である１を含めた４項関係から成るという理解が重要である。また，基準量が変わることによって割合が異なるため，双方向の見方による割合の理解が重要である。

算数教育における概念的知識と手続き的知識の定義，割合の定義，割合に関連する数理構造の認識を基に，割合に関する概念的知識と手続き的知識を次のように定義した。割合に関する概念的知識を「初等レベルとしての割合，比較量，基準量の相互の関係や内省的レベルとしての一般化された原理である乗法的構造についての暗黙的または明示的な体系」と定義し，割合に関する概念的知識の具体例として，次のことを示した。

・同種の２つの数量の関係の把握における基準量と比較量の意味
・同種の２つの数量の関係の把握における双方向の見方
・割合の定義
・割合＝比較量÷基準量，比較量＝基準量×割合，基準量＝比較量÷割合という式
・倍，百分率，歩合の意味
・割合，比較量，基準量を含む文章表現
・問題場面に対応する２組の数量の関係の割合による比較

また，割合に関する手続き的知識を「割合の問題解決における順序や方法に関して，原理的・統一的に組織づけられ，客観的妥当性を要求し得る判断・実行の体系」と定義し，割合に関する手続き的知識の具体例として，次のことを示した。

・割合の問題解決における立式に対する記号と構文上のルール
・割合の問題解決における手続き上のルールやアルゴリズム
・割合の問題解決の方略

割合は，２つの数量の関係を把握する場合や２組の数量の関係を比較する場合に用いられる。本研究では，論理数学的認識としての割合の概念を調べることができる課題として，２組の数量の関係の

比較に関する確率比較課題を用いることとした。確率と割合は異なる概念である。しかし，確率について未習の児童は，割合を用いることにより確率に関する場面にアプローチできる。確率に関する場面において，基準量は全体であり比較量は部分でなければならない。しかし，児童は「部分－全体」よりも「部分－部分」に着目して比較する傾向がある。したがって，確率という観点から俯瞰的に児童の思考過程を分析することが重要である。また，児童が用いる比例的推論の方略として，Within 方略，Between 方略，building-up 方略，Fall-Back 方略は，確率比較等の内包量比較に関する研究に共通して見出されている。特に，基準方略としての「半分」は，比例的推論に関する児童の認識や発達段階において重要な意味を持っており，確率比較課題における「部分－全体」の比較へとつながると考えられる。

割合に関する概念的知識と手続き的知識のそれぞれにおいて，「割合に関する状況」，「比較量に関する状況」，「基準量に関する状況」がある。しかし，これまでの研究では，「割合に関する状況」のみを取り扱っており，３つの状況に関する児童の認識を統合的に分析する研究は行われていない。また，これまでの研究の多くは，児童の割合の認識をプロトコルから分析しており，数学的に児童の思考過程を示した研究ではない。さらに，数値を含んだ調査問題を用いているため，児童の割合の認識における概念的知識と手続き的知識の関係が捉えにくい。したがって，割合に関する概念的知識と手続き的知識を区別した調査問題の開発が必要である。これらの調査問題を開発し，児童の思考過程を数学的に示すことにより，割合に関する概念的知識と手続き的知識の構造や２つの知識間の関係，それぞれの知識における３つの状況間の関係を明らかにできると考えられる。

5.2　割合に関する数理構造の理解過程

２組の数量の関係の比較に関する課題として，確率比較課題を用いた６つの調査問題の開発を行った。これらの調査問題は，割合に関する概念的知識と手続き的知識の調査問題に区別され，さらに，割合に関する概念的知識と手続き的知識のそれぞれにおいて，上記の３つの状況の調査問題に区分される。全ての調査問題に関してスケログラム分析を行った結果，調査問題の妥当性と信頼性が保証された。また，児童の考え方の構造的変化としての水準及び水準内における児童の考え方の質的変化としての段階という観点から，全ての調査問題に関して水準及び段階の区分を行った。これらの調査問題を用いて,割合に関する概念的知識と手続き的知識についての児童の思考過程を調べると共に，児童の知識水準を判定することが可能となった。

問題解決において，仮定としての条件がインプットされ，結論としての解答がアウトプットされる。その処理過程はプロダクションシステムに基づいた論理的な思考過程である。そこで，論理学の観点から，各調査問題における仮定から結論への正しい解答が導かれる過程を，命題論理と述語論理を用いて数学的に証明を行った。その結果，全ての調査問題において矛盾した仮定はなく，調査問題における正しい推論過程を示すことができた。したがって，児童の行った推論過程を同様に示すことにより，確率の定義に基づいた正しい考えと自作の定理に基づいた児童固有の考えを明確に比較することが可能となった。推論過程を数学的に示すための推論規則と推論法則等は，一般的に命題論理や述語論理に用いられる推論規則と推論法則，変数の演算に関する推論規則と推論法則，変数の演算に関する単位元，零元，反射律，対称律，推移律から構成されている。この推論規則の１つに，本研究において新たに設定した次の「演推」の規則がある。

$a * b = c$ のとき，　$\dfrac{f(a * b)}{f(c)}$　　$\dfrac{f(c)}{f(a * b)}$　を認める。

この推論規則は，児童の思考過程を分析する上で有効であった。思考過程において，演算処理のミスと誤った推論の両方が関連し，誤った結論が導かれる場合がある。この場合，演算処理のミスは児童の思考過程を分析する上で阻害要因となる。しかし，「演推」の規則を用いることにより，演算処

理のミスと誤った推論とを分離させ，児童の思考過程に焦点を当てることが可能となった。「演推」の規則は確率比較課題以外の課題に対する児童の推論過程を示すことにも有効に活用することが期待できる。

推論過程を記述するために，くじを１本引くという思考に関する記号化は必要不可欠であった。それだけでなく，児童のプロトコルのままでは困難であった児童固有の考えを抽出し，比較することを容易にした。記号化された児童の考えの比較から，割合に関する概念的知識と手続き的知識の３つの状況に共通して，Between な関係における大小比較を含めた加法的な考えと Within な関係における乗法的な考えが認められた。また，Between な関係における加法的な考えが Within な関係における乗法的な考えに先行していた。これら２つの考えの間に，割合に関する概念的知識の３つの状況に共通して，Within な関係における大小比較を含めた加法的な考えが認められた。割合に関する手続き的知識の「割合に関する状況」に関して，Within な関係における大小比較を含めた加法的な考えと Between な関係における乗法的な考えが認められた。また，Within な関係における加法的な考えが Between な関係における乗法的な考えに先行していた。したがって，Within な関係よりも Between な関係の方が着目しやすく，乗法的な考えよりも加法的な考えの方が用いやすいと考えられる。また，Between な関係における加法的な考えから，Within な関係における加法的な考え，Between な関係における乗法的な考えへと移行し，最終的に，Within な関係における乗法的な考えへと移行することを意味していると考えられる。Within な関係における加法的な考えは，基準方略としての「部分－全体」に関する「半分」の活用であり，これまでの研究において見出されてきた比例的推論に関する児童の認識や発達段階と一致する。また，２つのくじの当たりくじの本数やくじの総数が２倍・1/2(半分)の関係である場合，それらの数値に着目し，Between な関係における乗法的な考えに基づいて推論を行う児童がいた。数値を含まない問題においても，(４，２)，(６，３)，(８，４)，(10，５)など，当たりくじの本数とはずれくじの本数に関して２倍・1/2(半分)の関係である具体的な数値を自ら設定し，Within な関係における乗法的な考えに基づいて推論を行う児童がいた。これらは，基準方略の「半分」ではなく，「部分－部分」に関する割合としての「半分」の活用である。したがって，Within な関係における加法的な考えから Between な関係における乗法的な考え，Within な関係における乗法的な考えへと移行する原動力として，「半分」は重要な役割を果たしていると考えられる。

Between な関係における加法的な考えと Within な関係における乗法的な考えは，割合に関する概念的知識と手続き的知識の３つの状況に共通していることから，割合に関する概念的知識と手続き的知識は，３つの状況のそれぞれにおいて，加法的な考えの下で関連付けられ，児童の考え方の構造的変化により，乗法的な考えの下で新たに関連付けられると考えられる。この構造的変化は加法的構造から乗法的構造という児童の考え方の基盤を成す代数的構造の変化を意味し，水準区分に対応している。また，Within な関係における加法的な考えは，加法的な考えの下での Between な関係から Within な関係への質的変化，Between な関係における乗法的な考えは，乗法的な考えの下での Between な関係から Within な関係への質的変化に位置付けられる。さらに，加法的な考えの下での Between な関係において，１つの事象から２つの事象へ着目する事象の数の増加が認められた。但し，割合に関する概念的知識と手続き的知識の３つの状況に共通して，２つの事象に着目するが，１つの事象に関して相等関係が成り立つ場合，もう１つの事象だけに基づいて判断する傾向があることが認められた。これらの質的変化は１つの事象から２つの事象，Between な関係から Within な関係という児童の着目の仕方の変化を意味し，段階区分に対応している。加法的な考えから乗法的な考えへ構造的変化が起きるまでは，児童は一貫して加法的な考えに基づいて推論する。したがって，３つの状況のそれぞれにおいて，割合に関する概念的知識と手続き的知識が加法的な考えの下で関連づけられた後，３つの状況が加法的な考えとして統合されると考えられる。

割合に関する概念的知識と手続き的知識の３つの状況の相関に関して，２つの知識に共通して，「割合に関する状況」と「比較量に関する状況」，「割合に関する状況」と「基準量に関する状況」，「比較量に関する状況」と「基準量に関する状況」の全てに有意な相関が認められた。また，割合に関す

る概念的知識と手続き的知識における３つの状況の平均間の差の検定と多重比較から，２つの知識に共通して，「割合に関する状況」と「基準量に関する状況」の平均間及び「割合に関する状況」と「比較量に関する状況」の平均間に有意な差があった。しかし，「比較量に関する状況」と「基準量に関する状況」の平均間に有意な差はなかった。したがって，「割合に関する状況」が最初に理解され，その後，「比較量に関する状況」または「基準量に関する状況」と統合され，最終的に３つの状況全てが統合されると考えられる。

割合に関する概念的知識と手続き的知識は，水準及び段階の区分により重層的構造を成しており，加法的な考えの下で，３つの状況のそれぞれにおいて，割合に関する概念的知識と手続き的知識が関連付けられた後，「割合に関する状況」を中心に「比較量に関する状況」または「基準量に関する状況」と統合され，最終的に３つの状況が加法的な考えとして統合される。さらに，児童の考え方の構造的変化により，乗法的な考えの下で，３つの状況のそれぞれにおいて，割合に関する概念的知識と手続き的知識が関連付けられた後，「割合に関する状況」を中心に「比較量に関する状況」または「基準量に関する状況」と統合され，最終的に３つの状況が乗法的な考えとして統合されると考えられる。

5.3　割合指導の問題点

割合は，整数，小数，分数の乗法・除法，比・比例，確率という多様な教科内容と関連している。図的表現を基にした乗法と除法の意味の拡張において，整数倍から小数倍，分数倍へと割合の意味の理解を促進させる研究は多くなされている。しかし，全国学力・学習状況調査の結果において，約半数の児童しか割合を理解できていない状況である。特に，基準量の認識と図を基にした割合，比較量，基準量の相互関係の理解に課題がある。つまり，割合に関する概念的知識と手続き的知識が結び付いていない。概念的知識が先行している児童もいれば，手続き的知識が先行している児童もいる。これらを考慮すると，Rittle-Johnson, B., Siegler, R. S., & Alibali, N. W.［11］の提唱する反復モデルを考慮し，概念的知識と手続き的知識のどちらからでもアプローチ可能な問題の表出の場を，単元を通して設定する必要がある。

２つの数量の関係を把握する場合に関して，一般的に「比較量に関する状況」，「割合に関する状況」，「基準量に関する状況」の順に難しくなる。一方，２組の数量の関係を比較する場合に関して，「割合に関する状況」が最も簡単であり，「比較量に関する状況」と「基準量に関する状況」において順序性はない。このことは，割合による比較を理解しない限り，比較量の比較における基準量と割合の関係づけ，基準量の比較における比較量と割合の関係づけが難しいことを意味している。割合に関する概念的知識と手続き的知識の各水準及び各段階における児童固有の考えや大きい数を小さい数で割る考えなど，児童は，割合に関するミスコンセプションやプリコンセプションを有している。割合に関する概念形成過程を考慮し，加法的な考えと乗法的な考えの双方からアプローチできる場面を通して，ミスコンセプションを修正したりプリコンセプションを発展させたりする学習過程が必要である。

多くの教科書は，割合の必要性やよさを実感できるように，２組の数量の関係を比較する場合を導入場面として用い，その後，２つの数量の関係を把握する場合を学習する授業設計となっている。しかし，割合について理解できていない児童に，２組の数量の関係を割合により比較するアイデアはなく，児童はミスコンセプションやプリコンセプションに固執する傾向にある。まず，２つの数量の関係を把握する場合において割合を理解することが重要である。次に，２組の数量の関係を比較する場合において，児童が潜在的に持っている比例的推論に基づいた割合の見方を顕在化させ，割合の理解を深める学習過程が必要である。このような授業設計は，２つの数量の関係を把握する場合に関して内包的一般化が成され，２組の数量の関係を比較する場合に関して参照領域の拡張及が成されることから，一般化の過程を重視した授業設計である。割合に関する概念的知識と手続き的知識を同時活性化させるためには，Dörfler, W.［22］の提唱する一般化モデルを考慮し，一般化の過程を重視した授業設計を行うと共に，一般化モデルの各段階をつなぐ過程として Rittle-Johnson, B., Siegler, R. S., & Alibali,

N. W. [11]の提唱する反復モデルを考慮した反復過程を対応させる必要がある。これにより，割合に関する数理構造の理解を促進する教授法を構築することができると考えられる。

5.4 割合に関する数理構造の理解を促進する教授法

割合に関する数理構造の理解を促進する教授法として，「割合」の単元の指導計画に一般化の過程と反復過程を位置づけ，問題の表出を通して，概念的知識と手続き的知識が向上していく詳細な過程を設定した。また，２つの数量の関係を把握する場合と２組の数量の関係を比較する場合の両方を位置付けた。この指導計画に基づき，割合に関する２つの知識の同時活性化を図る全 18 時間の授業実践を行った。２つの数量の関係を把握する場合で扱う内容の多くは，教科書の内容を対象とした。２つの数量の関係を把握する場合に関して児童が身に付けた知識は，割合に関する教科書で学習した知識という意味において，基礎・基本と考えることができる。一方，２組の数量の関係を比較する場合は，活用と考えることができる。

基礎・基本に関して，教科書に掲載された問題から成る基本問題を用いて，事後調査を行った。３つの状況の正答率は,「割合に関する状況」に関して 94.4%,「比較量に関する状況」に関して 98.6%,「基準量に関する状況」に関して 87.5%であった。全国学力・学習状況調査において，同様のタイプの問題の正答率は，60 %程度であることを考えると，児童が割合に関する教科書で学習した知識を十分獲得していると言える。割合に関する２つの知識の同時活性化を図る授業では，双方向の見方に基づいて基準量を把握し，その割合が１倍であることを捉えた。また，割合，比較量，基準量を含む様々な文章表現を「○○の～倍が△△です」という短い文に書き換えることにより，割合，比較量，基準量を捉え，１倍を位置付けた比の関係図にそれらを表し，図に基づいて立式する指導を行った。比の関係図という問題の表出において，割合に関する２つの知識が同時活性化したと考えられる。さらに，単元を通して，この一連の手順に基づいた問題解決を繰り返し行うことにより，割合に関する２つの知識の向上が導かれたと考えられる。

活用に関して，割合に関する概念的知識と手続き的知識の調査問題を用いて，事前調査と事後調査を行った。事前調査と事後調査における平均の差の検定を行った結果，割合に関する概念的知識と手続き的知識は共に，事前調査と事後調査における平均間に有意な差が認められた。つまり，割合に関する２つの知識が向上したと言える。割合に関する２つの知識の同時活性化を図る授業では，数値を含まない問題場面において，児童自らが数値を設定して割合を求めることにより，割合に関する概念的知識と手続き的知識が同時活性化したと考えられる。また，加法的な考えと乗法的な考えの双方からアプローチできる場面を設定し,ミスコンセプションの修正やプリコンセプションの発展を試みた。これにより，割合を用いて２組の数量の関係を比較することの意味や方法を理解できたことが，割合に関する２つの知識の向上につながったと考えられる。

割合に関する２つの知識の同時活性化を図る授業は，基礎・基本としての割合に関する教科書で学習した知識の獲得だけではなく，活用としての割合に関する概念的知識と手続き的知識の向上にも効果があった。つまり，割合に関する数理構造の理解を促進することができた。

割合に関する教科書で学習した知識，割合に関する概念的知識，割合に関する手続き的知識という３つの知識間の全てに弱い相関があった。３つの知識のそれぞれを従属変数とした場合の重回帰分析とパス解析の結果，各知識の得点の分散の７～８%が独立変数により説明された。また，３つの知識に関して作成したパス・ダイアグラムにおける全てのパス係数は有意であり，他の独立変数を介して従属変数に伝えられる間接効果が小さく，みかけの相関も殆どなかった。つまり，３つの知識は互いに弱い相関を持ちながら直接的に影響し合っており，３つの知識に関するパス経路の内，次の６つの経路が有効であった。

①基礎・基本としての教科書で学習した知識→活用としての手続き的知識
②活用としての手続き的知識→基礎・基本としての教科書で学習した知識

③活用としての概念的知識→活用としての手続き的知識
④活用としての手続き的知識→活用としての概念的知識
⑤基礎・基本としての教科書で学習した知識→活用としての概念的知識
⑥活用としての概念的知識→基礎・基本としての教科書で学習した知識

割合に関する２つの知識の同時活性化を図る授業は，比の関係図という問題の表出を通して，基礎・基本としての割合に関する概念的知識と基礎・基本としての割合に関する手続き的知識を向上させた。基礎・基本に関する内容は教科書の問題に基づいている。教科書の問題には必ず具体的な数値が示されており，児童はそれらの数値を手続き的に処理し，問題解決を行う。活用としての割合に関する手続き的知識の問題解決は，割合を求め，それを用いて比較するという２段階の操作を必要とする。しかし，活用としての割合に関する手続き的知識の調査問題にも，教科書の問題と同様に具体的な数値が示されており，手続き的処理が可能である。基礎・基本としての割合に関する教科書で学習した知識の得点と活用としての割合に関する手続き的知識の得点は，相互に影響すると考えることは妥当である。

また，活用としての割合に関する概念的知識と活用としての割合に関する手続き的知識は，調査問題の内容に数値を含むか否かという違いはある。割合に関する概念的知識は抽象的であり，割合に関する手続き的知識は具体的である。しかし，どちらも確率比較課題であり，具体から抽象，抽象から具体という思考において，双方向に関連している。活用としての割合に関する概念的知識の得点と活用としての割合に関する手続き的知識の得点は，相互に影響すると考えることも妥当である。

さらに，基礎・基本としての割合に関する教科書で学習した知識の問題には具体的な数値が示されているのに対して，活用としての割合に関する概念的知識の調査問題には，大小関係と相等関係が示されているだけで，数値を含んでいない。この場合，条件を満たすように全体に対する部分のおよその割合を想定することによって，問題解決が可能である。また，条件を満たすように数値を自ら設定し，手続き的な処理を行うことによって，問題解決が可能である。基礎・基本としての割合に関する教科書で学習した知識の得点と活用としての割合に関する概念的知識の得点は相互に影響すると考えることも妥当である。

5.5　今後の課題

今後の課題として，次の３点について研究を深める。

・アクションリサーチによる実証的研究を推進し，本研究の成果を教育現場へフィードバックする。
・割合に対する児童の信念や態度を測定する尺度を開発し，割合に関する概念的知識と手続き的知識を同時活性化させる授業の割合に対する信念や態度に関する効果を検証する。
・単位量当たりの大きさに関して本研究の成果を援用し，同種の２量の商と異種の２量の商を合わせた乗法・除法の数理構造の理解を促進させる教授法を構築する。

全国学力・学習状況調査の結果から分かるように，割合指導は厳しい現状に直面している。本研究において作成した割合に関する概念的知識と手続き的知識の調査問題を用いることにより，児童の知識水準を把握し，授業実践における授業展開や個別指導の工夫と改善に役立てることができる。また，割合に関する概念的知識と手続き的知識を同時活性化させる授業は，割合に関する数理構造の理解を促進するための指針となる。本研究の成果を教育現場へフィードバックすることにより，割合指導の現状を克服することが重要である。また，研究協力校との連携を図り，アクションリサーチによる実証的研究を推進する必要がある。そこで，本研究において作成した割合に関する概念的知識と手続き的知識の調査問題を難易度順に配列し直した調査を作成し，研究協力校において，第５学年の担任または算数の教科担任による調査の実施と分析のサポートを行うと共に，分析結果に基づいて，「割合」の単元の授業展開や個別指導の工夫と改善のためのアドバイスを行う。学校現場で調査を実施したり

調査結果の分析をしたりする際の問題点についても検討し，他の研究協力校での実施に活用する。また，割合に関する概念的知識と手続き的知識を同時活性化させる授業を実施するために，全 18 時間の学習指導案の配付と解説を行う。ポイントとなる「高さくらべをしよう」と「当たりやすさをくらべよう」の小単元について，自ら指導を行うことにより，割合に関する概念的知識と手続き的知識を同時活性化させる授業の具体を示すと共に，授業場面のビデオ撮影を行う。第５学年の担任または算数の教科担任による授業場面についても，授業展開上の改善点に関して情報交換を行い，学習指導案の修正を行う。ビデオの映像と全 18 時間の学習指導案を他の研究協力校に配付することにより，割合に関する概念的知識と手続き的知識を同時活性化させる授業の普及に活用する。

本研究において，割合に関する概念的知識と手続き的知識を同時活性化させる授業は，割合に関する認知に効果的であることを明らかにした。しかし，割合に対する信念や態度のような情意に関する効果は明らかにしていない。割合に対する情意の向上は，児童が学習や生活に割合を活用し，さらに割合の認知を向上させるために重要である。割合に関する概念的知識と手続き的知識を同時活性化させる授業の割合に対する情意に関する効果及び割合に関する認知と割合に対する情意の関係を明らかにすることにより，さらなる授業改善を行うことが可能になると考えられる。そこで，これまでに行った児童の数学に対する情意に関する研究[190]-[194]の知見を生かし，割合の領域固有性を考慮した割合に対する児童の信念や態度を測定する尺度を開発し，割合に関する概念的知識と手続き的知識を同時活性化させる授業とあわせて，割合に関する概念的知識と手続き的知識の調査及び割合に対する信念と態度の事前調査と事後調査を行う。事前と事後の平均値の差の検定を行い，割合に対する信念や態度に関する授業の効果を検証すると共に，割合に関する概念的知識と手続き的知識，割合に対する信念と態度の４つを変数とする重回帰分析とパス解析を行い，４つの変数間の関係を明らかにする。割合に対する信念や態度に関して数値の低い項目について，４つの変数間の関係を基に，さらなる学習指導案の修正を行う。これらの研究成果について，学会で報告する。

論理学の観点から児童の思考過程を詳細に分析したことは，大きな成果であった。割合と同様，指導が難しいとされる単位量当たりの大きさに関して本研究の成果を援用し，同種の２量の商と異種の２量の商を合わせた乗法・除法の数理構造の理解を促進させる教授法について，研究を推進する必要がある。そこで，これまでに行った児童の「小数×小数，小数÷小数」の学習理解度尺度の開発に関する研究[195]を基に，単位量当たりの大きさに関する概念的知識と手続き的知識の調査問題を開発し，調査の実施と論理学の観点からの児童の思考過程の分析を行い，知識水準を区分する。同種の２量の商と異種の２量の商に関して，比例的推論における領域一般性と内包量比較における領域固有性が存在することを考慮し，割合に関する知識水準と単位量当たりの大きさに関する知識水準の関係を明らかにすると共に，本研究の成果を含め，乗法・除法の数理構造の理解を促進させる教授法を構築する。

謝辞

本論文は，多くの先生方からのご指導やご助言によって作られたものである。
甲南大学の高橋正教授には，指導教員として，児童の数理認識の観点から多くのご教示をいただきましたことに，深く感謝いたします。また，甲南大学の岳五一教授，森元勘治教授，北村達也教授，才脇直樹教授には，多くのご教示をいただきました。特に，岳五一教授には，各所に渡り丁寧なご指導を賜りましたことに，深く感謝いたします。
四天王寺大学の廣瀬隆司教授には，「割合」の授業実践について多くのご教示と有益なご助言をいただきましたことに，深く感謝いたします。また，神戸大学の岡部恭幸准教授には，算数・数学教育における授業理論及び確率比較課題における児童の認識について有益なご助言と温かいご支援をいただきましたことに，深く感謝いたします。さらに，甲南大学の平井崇晴講師には，児童の推論過程の分析において，論理学の観点から有益なご助言と丁寧なご指導をいただきましたことに，深く感謝いたします。そして，「割合」に関する認識調査及び授業実践にご協力をいただいた神戸市小学校教育研究会算数部並びに神戸市小学校教育研究会統計情報教育部の先生方に深く感謝いたします。
最後に，本研究は，基盤研究(C)平成 25 ～ 27 年度科学研究費助成事業(学術研究助成基金助成金)「算数教育における割合に関する数理構造の理解を促進するメカニズムに関する研究」（課題番号25381204，研究代表者　坂井武司）の研究成果の一部である。

参考論文

［1］日本数学教育学会算数興味調査委員会, “児童の算数に対する意識,” 日本数学教育学会, pp. 23-29, 1998.

［2］平成 15 年度小・中学校教育課程実施状況調査質問紙調査集計結果－算数・数学－, https://www.nier.go.jp/kaihatsu/katei_h15/H15/03001030000007003.pdf

［3］Anderson, J. R., Language, Memory, and Thought, Mahwah, N. J., Lawrence Erlbaum Associates, 1976.

［4］Anderson, J. R., The Architecture of Cognition, Cambridge, M. A., Harvard University Press, 1983.

［5］佐伯胖, 鈴木宏昭, “心理学における「工学的」アプローチの可能性と限界,” 知識の獲得と学習, 大須賀節雄, 佐伯胖編, オーム社, pp. 26-33, 1995.

［6］Hiebert, J., &Lefevre, P., “Conceptual and Procedural Knowledge in Mathematics: An Introductory Analysis,” in Hiebert, J.（ed） Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics, Hillsdale, N. J.: Lawrence Erlbaum Associates, pp. 1-27, 1986.

［7］Hiebert, J., &Wearne, D., “A Model of Students' Decimal Computation Procedures,” Cognition and Instruction, Lawrence Erlbaum Associates, pp. 175-205, 1985.

［8］Hiebert, J., “A Theory of Developing Competence with Written Mathematical Symbols,” Educational Studies in Mathematics, Vol. 19, pp. 333-355, 1988.

［9］Byrnes, J. P., & Wasik, B. A., “Role of Conceptual Knowledge in Mathematical Procedual Learning,” Developmental Psychology, Vol. 27, No. 5, pp. 777-786, 1991.

［10］Rittle-Johnson, B., & Alibali, N. W., “Conceptual and Procedual Knowledge of Mathematics: Does One Lead to the Other ?,” Journal of Educational Psychology, Vol. 91, No. 1, pp. 175-189, 1999.

［11］Rittle-Johnson, B., Siegler, R. S., & Alibali, N. W., “Developing Conceptual Understanding and Procedural Skill in Mathematics: An Iterative Process,” Journal of Educational Psychology, Vol. 93, No. 2, pp. 346-362, 2001.

［12］Fischbein, E., Deri, M., Nells, M. S., & Mario, M. S., “The Role of Implicit Models in Solving Verbal Problems in Multiplication and Division,” Journal of Research in Mathematics Education, Vol. 16, No. 1, pp. 3-17, 1985.

［13］Clement, J., “Using Bridging Analogies and Anchoring Intuitiona to Deal with Students' Preconceptions in Physics,” Journal of Research in Science Teaching, Vol. 30, No. 10, pp. 1241-1257, 1993.

［14］高垣マユミ, “台形概念の形成過程における確率的表象に関する研究,” 全国数学教育学会誌数学教育学研究, 全国数学教育学会, 第 4 巻, pp. 177-185, 1998.

［15］Clement, J., “Students' Preconceptions in Introductory Mechanics,” American Association of Physics Teachers, Vol. 50, No. 1, pp. 66-71, 1982.

［16］高垣マユミ, “高さ概念における児童のもつプリコンセプションに関する研究,” 科学教育研究, 日本科学教育学会, Vol. 24, No. 2, pp. 98-105, 2000.

［17］高垣マユミ, “高さのプリコンセプションを変容させる教授ストラテジーの研究,” 教育心理学研究, 日本教育心理学会, 第 49 巻, 第 3 号, pp. 274-284, 2001.

［18］Hashweh, M. Z., “Descriptive Studies of Students' Conceptions in Science,” Journal of Research in Science Teaching, Vol. 25, No. 2, pp. 121-134, 1988.

［19］高垣マユミ, “図形概念の拡張に関わる子どもの日常的概念について－高さ概念の獲得過程に関する調査研究－,” 日本数学教育学会誌算数教育, 日本数学教育学会, 第 48 巻, 第 4 号, pp. 2-9, 1999.

［20］高垣マユミ, “小学生は高さをどのようにとらえているのか :「日常的経験から得た高さ」と「平面図形における三角形の高さ」との関連,” 発達心理学研究, 日本発達心理学会, 第 11 巻, 第 2 号, pp. 112-121, 2000.

［21］de Jong, T., & Ferguson-Hessler, M. G. M., “Types and qualities of Knowledge,” Educational

Psychologist, Vol. 32, No. 2, pp. 105-113, 1996.
[22] Dörfler, W., “Forms and Means of Generalization in Mathematics,” Bishop, A. j.（ed）, Mathematical Knowledge: Its Growth Through Teaching, Kluwer Academic Publishers, pp. 63-85, 1991.
[23] 岩崎秀樹, 数学教育学の成立と展望, ミネルヴァ書房, 2007.
[24] 岩崎秀樹, “一般化の過程に関する認知論的・記号論的分析,” 日本数学教育学会誌数学教育学論究, 日本数学教育学会, Vol. 75, pp. 1-20, 2000.
[25] 廣瀬隆司, “子供の速さに関する知識の研究（12）－子供の速さに関する概念的知識と手続き的知識の同時活性化についてー,” 数学教育学研究, 全国数学教育学会, 第 8 巻, pp. 55-67, 2002.
[26] 日本数学教育学会, 和英/英和算数・数学用語活用辞典, 東洋館出版社, 2000.
[27] 東京書籍, 新しい算数 5 下, 藤井斉亮, 飯高茂他 40 名編, pp. 50-69, 2010.
[28] 啓林館, わくわく算数 5 下, 清水静海, 船越俊介他 49 名編, pp. 41-59, 2010.
[29] 学校図書, みんなと学ぶ小学校算数 5 年下, 一松信他 45 名編, pp. 82-101, 2010.
[30] 教育出版, 小学算数 5 下, 澤田利夫他 27 名編, pp. 30-50, 2010.
[31] 大日本図書, たのしい算数 5 下, 橋本吉彦他 18 名編, pp. 80-102, 2010.
[32] 日本文教出版, 小学算数 5 年下, 小山正孝, 中原忠男他 23 名編, pp. 68-85, 2010.
[33] 直芳子, “小学校における「割合」指導の変遷（1）,” 日本数学教育学会誌算数教育, 日本数学教育学会, 第 39 巻, 第 6 号, pp. 22-27, 1990.
[34] 直芳子, “小学校における「割合」指導の変遷（2）,” 日本数学教育学会誌算数教育, 日本数学教育学会, 第 40 巻, 第 1 号, pp. 2-10, 1991.
[35] 前田隆一, “割合の概念,” 新算数教育講座第 3 巻（数量関係）, 赤羽千鶴他編, 吉野書房, pp. 239-247, 1960.
[36] 田端輝彦, “同種の量の割合と異種の量の割合の指導順序に関する考察,” 日本数学教育学会誌算数教育, 日本数学教育学会, 第 51 巻, 第 4 号, pp. 22-29, 2002.
[37] Hart, K., “Ratio and Proportion,” Hiebert, J., & Behr, M.（Eds.）, Number Concepts and Operations in the Middle Grades, Lawrence Erlbaum Associates, pp. 198-219, 1988.
[38] Tourniaire, F., & Pulos, S., “Proportional Reasoning: A Review of the Literature,” Educational Studies in Mathematics, Vol. 16, pp. 181-204, 1985.
[39] Copeland, R. W., ピアジェを算数指導にどう生かすか, 佐藤俊太郎訳, 明治図書, 1974.
[40] Jane-Jane, L., & Watanabe, T, “Developing Ratio and Proportion Schemes: A AStory of a Fifth Grader,” Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 28, No. 2, pp. 216-236, 1997.
[41] Vergnaud, G., “Multiplicative Structures,” Hiebert, J., & Behr, M.（Eds.）, Number Concepts and Operations in the Middle Grades, Lawrence Erlbaum Associates, pp. 141-161, 1988.
[42] Vergnaud, G., “Multiplicative Structures,” In Lesh, R., & Landau, M.（Eds.）, Acquisition of Mathematics Concepts and Process, New York: Academic Press, pp. 127-174, 1983.
[43] 渡会陽平, “小学校算数科における乗除法の意味に関する学習過程の分析－ G. Vergnaud の概念野理論の枠組みとしてー,” 日本数学教育学会誌数学教育学論究, 日本数学教育学会, Vol. 93, pp. 3-15, 2012.
[44] 蒔苗直道, “水色表紙教科書における除法の導入教材の再評価－緑表紙教科書との比較を通してー,” 日本数学教育学会誌算数教育, 日本数学教育学会, 第 61 巻, 第 5 号, pp. 2-10, 2012.
[45] 中村享史, “割合概念の理解における児童の思考の様相－ノート記述の分析を通してー,” 日本数学教育学会誌算数教育, 日本数学教育学会, 第 57 巻, 第 2 号, pp. 2-10, 2008.
[46] 菅村暾, “数と計算の指導－特に乗除計算の意味の指導を中心に,” 日本数学教育学会誌算数教育, 日本数学教育学会, 第 13 巻, 第 5 号, pp. 11-14, 1964.
[47] 伊藤武, “数と計算指導上の問題点,” 日本数学教育学会誌算数教育, 日本数学教育学会, 第 12 巻, 第 4 号, pp. 2-4, 1963.

［48］野本久夫, やさしい確率論, 現代数学社, 1995.
［49］Steinbring, H., “The Concept of Chance in Everyday Teaching: Aspects of a Social Epistemology of Mathematical Knowledge,” Educational Studies in Mathematics, Vol. 22, pp. 503-522, 1991.
［50］Steinbring, H., “Epistemological Investigation of Classroom Interaction in Elementary Mathematics Teaching,” Educational Studies in Mathematics, Vol. 32, pp. 49-92, 1997.
［51］Steinbring, H., “What Makes a Sign a Mathematical Sign? － An Epistemological Perspective on Mathematical Interaction,” Educational Studies in Mathematics, Vol. 61, pp. 133-162, 2006.
［52］岡部恭幸, “ 確率概念の認識における「方法の対象化」,” 数学教育学会誌, 数学教育学会, Vol. 47, No. 3・4, pp. 45-51, 2006.
［53］三角富士夫, “ 小学校における確率指導のすすめかた,” 日本数学教育学会誌算数教育, 日本数学教育学会, 第 19 巻, 第 2 号, pp. 16-21, 1970.
［54］口分田政史, 渡邉伸樹, “ 初等教育段階における系統的な確率カリキュラムの開発（そのⅠ）－小学校低学年における確率に関する子どものとらえの様相－,” 数学教育学会誌, 数学教育学会, Vol. 50, No. 1・2, pp. 27-39, 2009.
［55］Streefland, L., “Search for the Roots of Ratio: some Thoughts on the Long Term Learning Process（Towards … a Theory）Part Ⅱ: The Outline of the Long Term Learning Process,” Educational Studies in Mathematics, Vol. 16, pp. 75-94, 1985.
［56］梶光雄, 岩田義孝, 川瀬喜生ほか, “ 不確定な事象を的確に判断していく力をどのように育てたらよいか,” 日本数学教育学会誌算数教育, 日本数学教育学会, 第 26 巻, 第 4 号, pp. 15-17, 1977.
［57］Clark, M. R., Berenson, S. B., & Cavey, L. O., “A Comparison of Ratios and Fractions and Their Roles as Tools in Proportional Reasoning,” Journal of Mathematical Behavior, Vol. 22, pp. 297-317, 2003.
［58］Jones, G. A., Thornton, C. A., & Mogill, A. T., “Students' Probabilistic Thinking in Instruction,” Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 30, No. 5, pp. 487-519, 1999.
［59］Singer, J. A., & Resnick, L. B., “Representations of Proportional Relationships: Are Children Part-Part or Part-Whole Reasoners ?,” Educational Studies in Mathematics, Vol. 23, pp. 231-246, 1992.
［60］Spinillo, A. G., “Children's Use of Part-part Comparisons to Estimate Probability,” Journal of Mathematical Behavior, Vol. 21, pp. 357-369, 2002.
［61］Lesh, R., Post, T., & Behr, M., “Proportional Reasoning,” Hiebert, J., & Behr, M.（Eds.）, Number Concepts and Operations in the Middle Grades, Lawrence Erlbaum Associates, pp. 93-118, 1988.
［62］Tourniaire, F., “Proportions in Elementary School,” Educational Studies in Mathematics, Vol. 17, pp. 401-412, 1986.
［63］Singh, P., “Understanding the Concepts of Proportion and Ratio Constructed by Two Grade Six Students,” Educational Studies in Mathematics, Vol. 43, pp. 271-292, 2000.
［64］Lamon, S. J., “Ratio and Proportion: Connecting Content and Children's Thinking,” Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 24, No. 1, pp. 41-61, 1993.
［65］Singer, J. A., Kohn, A. S., & Resnick, L. B., “Knowing about Proportions in Different Contexts,” In Nunes, T., & Bryant, P.（Eds.）, Learning and Teaching Mathematics: An International Perspective, Hove: Psychology Press, pp. 115-132, 1997.
［66］平山秀人, “ 児童の割合に対する理解の深化を促す学習指導－加法方略との対峙に焦点を当てて－,” 日本数学教育学会誌算数教育, 日本数学教育学会, 第 52 巻, 第 6 号, pp. 14-22, 2003.
［67］Noelting, G., “The Development of Proportional Reasoning and the Ratio Concept, Part Ⅰ － Differentiation of Stages,” Educational Studies in Mathematics, Vol. 11, pp. 217 -253, 1980.
［68］Noelting, G., “The Development of Proportional Reasoning and the Ratio Concept, Part Ⅱ － Problem-structure at Successive Stages: Problem-solving Strategies and the Mechanism of Adaptive Restructuring,” Educational Studies in Mathematics, Vol. 11, pp. 331-363, 1980.

[69] Siegler, R. S., “Developmental Sequences Within and Between Concepts,” Monographs of the Society for Research in Child Development, Vol. 46, No. 2, pp. 1-84, 1981.
[70] Karplus, R., “Proportional Reasoning in Early Adlescents',” In Lesh, R., & Landau, M.（Eds.）, Acquisition of Mathematics Concepts and Process, New York: Academic Press, pp. 45-90, 1983.
[71] 日野圭子, “一人の児童を通してみた数学的表記の内化の過程の分析－比例的推論との関わりにおいて－（Ⅰ）,” 日本数学教育学会誌算数教育, 日本数学教育学会, 第 46 巻, 第 1 号, pp. 2-10, 1997.
[72] 日野圭子, “一人の児童を通してみた数学的表記の内化の過程の分析－比例的推論との関わりにおいて－（Ⅱ）,” 日本数学教育学会誌算数教育, 日本数学教育学会, 第 46 巻, 第 2 号, pp. 2-10, 1997.
[73] Hart, K., “Ratio and Proportion,” Children's Understanding of Mathematics: 11-16, John Murray Ltd, London, pp. 88-101, 1981.
[74] Steffe, L. P., “Children's Construction of Number Sequences and Multiplying Schemes,” Hiebert, J., & Behr, M.（Eds.）, Number Concepts and Operations in the Middle Grades, Lawrence Erlbaum Associates, pp. 119-140, 1988.
[75] 藤村宣之, “児童の比例的推理に関する発達的研究,” 教育心理学研究, 日本教育心理学会, 第 40 巻, 第 3 号, pp. 276-286, 1992.
[76] 藤村宣之, 児童の数学的概念の理解に関する発達的研究－比例, 内包量, 乗除法概念の理解を中心に－, 風間書房, 1997.
[77] 藤村宣之, “児童期の比例概念の発達における領域固有性の検討,” 教育心理学研究, 日本教育心理学会, 第 41 巻, 第 2 号, pp. 115-124, 1993.
[78] 中垣啓, “子どもは如何に割合の大小を判断しているか？－その発達的研究,” 国立教育研究所研究集録, 国立教育研究所, 第 13 号, pp. 35-55, 1986.
[79] Piaget, J., & Inhelder, B., The Origin of the Idea of Chance in Children, Trans by Leake, L.Jr., Burrell, P., & Fishbein, H. D., New York: W. W. Norton & Company, Inc, 1975.
[80] Offenbach, S. I., Gruen, G. E., & Caskey, B. J., “Development of Proportional Response Strategies,” Child Development, Vol. 55, No. 3, pp. 963-972, 1984.
[81] Gruen, G. E., Offenbach, S. I., & Keane, T., “Hypothesis Testing on a Proportional Reasoning Task by Children at Different Piagetian Stage Levels,” International Journal of Behavioral Development, Vol. 9, pp. 91-104, 1986.
[82] Schlottmann, A., “Children's Probability Intuitions: Understanding the Expected Value f Complex Gambles,” Child Development, Vol. 72, No. 1, pp. 963-972, 2001.
[83] Falk, R., & Wilkening, F., “Children's Construction of Fair Chances: Adjusting Probabilities,” Developmental Psychology, Vol. 34, No. 6, pp. 1340-1357, 1998.
[84] 藤村宣之, “児童期における内包量概念の形成過程,” 教育心理学研究, 日本教育心理学会, 第 38 巻, 第 3 号, pp. 277-286, 1990.
[85] 中垣啓, “割合比較課題にみる認知システムのダイナミズム,” 国立教育研究所研究集録, 国立教育研究所, 第 34 号, pp. 31-51, 1997.
[86] Spinillo, A. G., & Bryant, P., “Children's Proportional Judgments: The Importance of "Half",” the Society for Research in Child Development, Vol. 62, pp. 427-440, 1991.
[87] Lembke, L. O., & Reys, B. J., “The Development of, and Interaction Between, Intuitive and School-Taught Ideas about Percent,” Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 25, No. 3, pp. 237-259, 1994.
[88] 早川健, “「同じ割合」に焦点を当てた割合指導の導入,” 日本数学教育学会誌算数教育,日本数学教育学会, 第 52 巻, 第 6 号, pp. 23-30, 2003.
[89] 佐伯胖, “プランと実行－その情報処理過程,” 認識し行動する脳, 伊藤正男, 佐伯胖編, 東京大学出版会, pp. 71-90, 1988.
[90] Moss, J., & Case, R., “Developing Children's Understanding of the Rational Numbers: A New Model and

an Experimental Curriculum," Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 30, No. 2, pp. 122-147, 1991.
[91] 中村享史, " 割合指導に関する研究の動向と今後の方向," 日本数学教育学会誌算数教育, 日本数学教育学会, 第 51 巻, 第 4 号, pp. 14-21, 2002.
[92] Siegler, R. S., "Three Aspects of Cognitive Development," Cognitive Psychology, Vol. 8, pp. 481-520, 1976.
[93] Siegler, R. S., "The Origins of Scientific Reasoning," In Siegler, R. S.（ed.）, Children's Thinking: What Develop?, Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, N. J., pp. 109-149, 1978.
[94] Siegler, R. S., & Vago, S., "The Development of Proportionality Concept: Judging Relative Fullness," Journal of Experimental Chuld Psychology, Vol. 25, pp. 371-395, 1978.
[95] Siegler, R. S., & Richards, D. D., "Development of Time, Speed and Distance Concepts," Developmental Psychology, Vol. 15, pp. 288-298, 1979.
[96] 波多野完治, ピアジェ派心理学の発展Ⅱ認知発達研究, 国土社, 1982.
[97] 浅川伸一, 椎名乾平, " ルール評価アプローチの再検討," 教育心理学研究, 日本教育心理学会, 第 41 巻, 第 1 号, pp. 1-10, 1993.
[98] 坂本美紀, " 算数・数学の授業過程の理解," 認知心理学からみた授業過程の理解, 多鹿秀継編, 北大路書房, pp. 77-100, 1999.
[99] Case, R., "The Underlying Mechanism of Intellectual Development," In Kirby, J. R., & Biggs, J. B.（Eds.）, Cognition, Development, and Instruction, Academic Press, pp. 5-37, 1980.
[100] 金井寛文, " 割合に関する児童・生徒の理解の実態についての一考察," 日本数学教育学会誌算数教育, 日本数学教育学会, 第 51 巻, 第 4 号, pp. 3-13, 2002.
[101] 多鹿秀継, 石田淳一, " 子どもにおける算数文章題の理解・記憶," 教育心理学研究, 日本教育心理学会, 第 37 巻, 第 2 号, pp. 126-134, 1989.
[102] 麻柄啓一, " 割合文章題の指導に関する実験的試み," 千葉大学教育学部研究紀要, 千葉大学教育学部, 第 36 巻, pp. 65-83, 1988.
[103] 多鹿秀継, 石田淳一, " 算数割合文章題の課題分析と解法の過程," 愛知教育大学教科教育センター研究報告, 愛知教育大学教科教育センター, 第 16 号, pp. 291-298, 1992.
[104] Mayer, R. E., Thinking, Problemsolving, Cognition, Second Edition, New York: W. H. Freeman and Company, 1992.
[105] 佐伯胖, " 認知科学からの接近," 認識し行動する脳, 伊藤正男, 佐伯胖編, 東京大学出版会, pp. 10-30, 1988.
[106] 多鹿秀継, 算数問題解決過程の認知心理学的研究, 風間書房, 1996.
[107] Riley, M. S., Greeno, J. G., & Heller, J. I., "Development of Chuldren's Problem-Solving Ability in Arithmetic," Ginsburg, H. G.（Ed.）, The Development of Mathematical Thinking, New York: Academic Press, pp. 153-196, 1983.
[108] 石田淳一, 多鹿秀継, " 算数文章題解決における下位過程の分析," 科学教育研究, 日本科学教育学会, 第 17 巻, 第 1 号, pp. 18-25, 1993.
[109] 坂本美紀, " コンピュータ提示による文章題のつまずきの解明－割合文章題を用いて－," 教育心理学研究, 日本教育心理学会, 第 45 巻, 第 1 号, pp. 87-95, 1997.
[110] 多鹿秀継, 中津楢男, 算数問題解決と転移を促す知識構成の研究, 風間書房, 2009.
[111] 山岸洋介, " 文章題における文章構造について," 日本数学教育学会誌算数教育, 日本数学教育学会, 第 12 巻, 第 1 号, pp. 29-36, 1963.
[112] 寺良夫, " 数の指導と割合," 日本数学教育学会誌算数教育, 日本数学教育学会, 第 13 巻, 第 2 号, pp. 18-21, 1964.
[113] 渡辺正八, " 割合の問題点," 日本数学教育学会誌算数教育, 日本数学教育学会, 第 14 巻, 第 3 号,

p. 14, 1965.
[114] 金松剛, “割合の問題点,” 日本数学教育学会誌算数教育, 日本数学教育学会, 第 15 巻, 第 4 号, p. 14, 1966.
[115] 金松剛, “割合指導の問題点,” 日本数学教育学会誌算数教育, 日本数学教育学会, 第 16 巻, 第 3 号, p. 12, 1967.
[116] 蛯名正司, “割合の対比的な数量関係の提示が児童の文章代解決に及ぼす影響,” 東北大学大学院教育学研究科研究年報, 東北大学大学院教育学研究科, 第 58 集, 第 2 号, pp. 105-119, 2010.
[117] 寺岡利幸, 横山真智子, “割合指導における導入の工夫,” 日本数学教育学会誌算数教育, 日本数学教育学会, 第 32 巻, 第 3 号, pp. 15-18, 1983.
[118] 後藤学, “割合文章題の解決過程について－基準量・比較量の関係判断－,” 数学教育学会誌臨時増刊, 数学教育学会春季年会発表論文集, 数学教育学会, pp. 42-44, 2011.
[119] 後藤学, “割合文章題における基準量・比較量の関係判断,” 数学教育学会誌臨時増刊, 数学教育学会春季年会発表論文集, 数学教育学会, pp. 82-84, 2012.
[120] 渡辺正八, “割合について,” 日本数学教育学会誌算数教育, 日本数学教育学会, 第 6 巻, 第 4 号, pp. 26-29, 1957.
[121] 原弘道, “乗除の意味の拡張について,” 日本数学教育学会誌算数教育, 日本数学教育学会, 第 4 巻, 第 5 号, pp. 4-6, 1955.
[122] 渡辺正八, “割合について(2),” 日本数学教育学会誌算数教育, 日本数学教育学会, 第 6 巻, 第 5 号, pp. 2-5, 1957.
[123] 堀川掬, “小学校における割合の指導について,” 日本数学教育学会誌算数教育, 日本数学教育学会, 第 6 巻, 第 6 号, pp. 5-8, 1957.
[124] 田上昇, “割合概念の発達段階に関する調査研究,” 日本数学教育学会誌算数教育, 日本数学教育学会, 第 8 巻, 第 4 号, pp. 18-21, 1959.
[125] 宮本滋, “第 1 学年の指導計画の改善,” 日本数学教育学会誌算数教育, 日本数学教育学会, 第 11 巻, 第 3 号, pp. 6-8, 1962.
[126] 矢野稔, “第 2 学年の指導計画の改善,” 日本数学教育学会誌算数教育, 日本数学教育学会, 第 11 巻, 第 3 号, pp. 8-10, 1962.
[127] 山下智, “整数の乗法・除法の意味の指導－小数・分数・の乗法・除法への段階の研究－,” 日本数学教育学会誌算数教育, 日本数学教育学会, 第 11 巻, 第 3 号, pp. 24-29, 1962.
[128] 柳瀬修, “低学年割合指導の基本的考察－幼児の割合概念の調査を中心として－,” 日本数学教育学会誌算数教育, 日本数学教育学会, 第 18 巻, 第 1 号, pp. 25-29, 1964.
[129] 田端輝彦, “小数倍の導入についての一考察－小数倍に表すよさに焦点をあてて－,” 日本数学教育学会誌算数教育, 日本数学教育学会, 第 50 巻, 第 6 号, pp. 2-12, 2001.
[130] 内海庄三, “分数指導のねらいと乗除の指導,” 日本数学教育学会誌算数教育, 日本数学教育学会, 第 7 巻, 第 3 号, pp. 9-14, 1958.
[131] 杉山吉茂, “わり算は包含除－割合の理解の素地として－,” 日本数学教育学会誌算数教育, 日本数学教育学会, 第 57 巻, 第 1 号, pp. 2-6, 2008.
[132] 渡辺正八, “分数小数の用法とその計算,” 日本数学教育学会誌算数教育, 日本数学教育学会, 第 8 巻, 第 2 号, pp. 7-11, 1959.
[133] 南哲男, “割合についての実験的研究,” 日本数学教育学会誌算数教育, 日本数学教育学会, 第 12 巻, 第 6 号, pp. 15-20, 1963.
[134] 田岡草生, “4 年生の割合指導について－割合指導の考え方と，実践研究の一部分の公開からの一提案－,” 日本数学教育学会誌算数教育, 日本数学教育学会, 第 13 巻, 第 4 号, pp. 4-7, 1964.
[135] 岡田いずみ, “割合文章題における介入授業の効果－分数表示方略の提案－,” 教授学習心理学研究, 日本教授学習心理学会, 第 5 巻, 第 1 号, pp. 32-41, 2009.

[136] 渡辺敏, “児童が潜在的に持っている割合の見方を生かした導入についての研究,” 日本数学教育学会誌算数教育, 日本数学教育学会, 第 60 巻, 第 1 号, pp. 11-21, 2011.
[137] 渡辺裕, “６年の文章題指導,” 日本数学教育学会誌算数教育, 日本数学教育学会, 第 9 巻, 第 4 号, pp. 20-22, 1960.
[138] 中藪悦郎, “数と計算の指導－とくに乗除計算の意味の指導を中心として－,” 日本数学教育学会誌算数教育, 日本数学教育学会, 第 13 巻, 第 6 号, pp. 10-15, 1964.
[139] 丹波武雄, “比の三用法の指導について,” 日本数学教育学会誌算数教育, 日本数学教育学会, 第 18 巻, 第 5 号, pp. 9-13, 1969.
[140] 長友昭雄, “割合の見方・考え方に基づく乗法・除法の指導はどのようにしたらよいか,” 日本数学教育学会誌算数教育, 日本数学教育学会, 第 19 巻, 第 2 号, pp. 2-6, 1970.
[141] 長須一紘, “計算方法を自ら考える力を育てる指導－小数の乗法の意味指導を中心として－,” 日本数学教育学会誌算数教育, 日本数学教育学会, 第 28 巻, 第 5 号, pp. 16-18, 1979.
[142] 吉川正弘, “既習事項を活用し新しいものを創り出す力，深める力を育てる指導法－乗法の拡張指導を通して－,” 日本数学教育学会誌算数教育, 日本数学教育学会, 第 29 巻, 第 4 号, pp. 21-24, 1980.
[143] 向山宣義, “算数をつくることを目指した学習指導－乗法の意味の指導を通して－,” 日本数学教育学会誌算数教育, 日本数学教育学会, 第 29 巻, 第 4 号, pp. 25-28, 1980.
[144] 向山宣義, “除法の意味理解の指導の課題と改善－小数，分数の除法を中心に－,” 日本数学教育学会誌算数教育, 日本数学教育学会, 第 55 巻, 第 3 号, pp. 2-9, 2006.
[145] 名取祐二, “分数教材の指導を通して数学的な考え方を育てる指導－割り算と分数－,” 日本数学教育学会誌算数教育, 日本数学教育学会, 第 30 巻, 第 3 号, pp. 15-18, 1981.
[146] 松村秀彦, “割合の概念を育てる指導の工夫,” 日本数学教育学会誌算数教育, 日本数学教育学会, 第 33 巻, 第 6 号, pp. 13-18 1984.
[147] 山本英一, “小数の乗法について－小数倍への拡張をめざして－,” 日本数学教育学会誌算数教育, 日本数学教育学会, 第 37 巻, 第 6 号, pp. 2-7, 1988.
[148] 白井一之, “乗法・除法の演算決定に有効にはたらく数直線の指導,” 日本数学教育学会誌算数教育, 日本数学教育学会, 第 46 巻, 第 3 号, pp. 51-56, 1997.
[149] 浅田真一, “乗法の意味に関する児童の理解の実態調査－小数の乗法における意味の拡張を中心に－,” 日本数学教育学会誌算数教育, 日本数学教育学会, 第 55 巻, 第 6 号, pp. 2-10, 2006.
[150] 師澄江, “数直線・線分図指導の小単元作成のための研究,” 日本数学教育学会誌算数教育, 日本数学教育学会, 第 56 巻, 第 5 号, pp. 12-19, 2007.
[151] 石田淳一, 神田恵子, 林真理恵, “小数の乗除の演算決定及び計算の仕方の指導に関する研究－小数倍の意味と関係図の指導に焦点をあてて－,” 日本数学教育学会誌算数教育, 日本数学教育学会, 第 57 巻, 第 4 号, pp. 2-12, 2008.
[152] 渡邉良典, “意味理解に重点をおいた分数乗除の指導法について－演算決定と計算方法の指導に着目して－,” 日本数学教育学会誌算数教育, 日本数学教育学会, 第 57 巻, 第 6 号, pp. 2-10, 2008.
[153] 松丸剛, “分数の乗除の意味を実感的に理解し，説明できるようにする指導,” 日本数学教育学会誌算　数教育, 日本数学教育学会, 第 61 巻, 第 6 号, pp. 2-12, 2012.
[154] 田村弘, “割合指導における数直線の利用について,” 日本数学教育学会誌算数教育, 日本数学教育学会, 第 14 巻, 第 6 号, pp. 12-14, 1965.
[155] 加藤康順, “割合の指導についての一考察－２本の数直線を組み合わせた図の利用－,” 日本数学教育学会誌算数教育, 日本数学教育学会, 第 29 巻, 第 5 号, pp. 25-30, 1980.
[156] 土谷利美, “比例の見方を用いた「割合」の指導実践,” 日本数学教育学会誌算数教育, 日本数学教育学会, 第 51 巻, 第 4 号, pp. 30-37, 2002.
[157] 田端輝彦, “同種の量の割合の導入に関する一考察,” 日本数学教育学会誌算数教育, 日本数学教

育学会, 第 52 巻, 第 6 号, pp. 3-13, 2003.
[158] 市川啓, “割合の見方を育てる小数倍の意味指導,” 日本数学教育学会誌算数教育, 日本数学教育学会, 第 52 巻, 第 6 号, pp. 31-41, 2003.
[159] 中村享史, “小数の乗法の割合による意味付け,” 日本数学教育学会誌算数教育, 日本数学教育学会, 第 45 巻, 第 5 号, pp. 7-13, 1996.
[160] 青山尚司, “割合の見方・考え方を育てる指導の工夫,” 日本数学教育学会誌算数教育, 日本数学教育学会, 第 62 巻, 第 5 号, pp. 2-10, 2013.
[161] 高橋丈夫, 田端輝彦, 市川啓, “割合の導入時における比例関係の顕在化に関する一考察－同じ割合の数対を作ることを通して－,” 日本数学教育学会誌算数教育, 日本数学教育学会, 第 63 巻, 第 2 号 pp. 4-15, 2014.
[162] 多鹿秀継, 石田淳一, 岡本ゆかり, “子どもの算数文章題解決における文章理解の分析,” 日本教科教育学会誌, 日本教科教育学会, 第 17 巻, 第 3 号, pp. 23-130, 1994.
[163] 佐藤俊太郎, “乗除計算に用いる平行２直線の対応目盛りはわかりやすいか,” 日本数学教育学会誌算数教育, 日本数学教育学会, 第 58 巻, 第 6 号, pp. 16-19, 2009.
[164] 小林章子, “文章題の指導－とくに割合の問題について－,” 日本数学教育学会誌算数教育, 日本数学教育学会, 第 35 巻, 第 1 号, pp. 2-7, 1986.
[165] 廣瀬隆司, 齋藤昇, 藤原伸彦, 長谷川勝久, 林隆宏, 坂井武司, “児童の数学に対する信念・価値・素質・感情・態度の向上を図る授業実践の効果,” 日本数学教育学会誌算数教育, 日本数学教育学会, 第 58 巻, 第 4 号, pp. 2-13, 2009.
[166] 平成 19 年度全国学力・学習状況調査【小学校】報告書　算数, https://www.nier.go.jp/tyousakekka/gaiyou_shou/19shou_houkoku4_2.pdf
[167] 平成 20 年度全国学力・学習状況調査【小学校】報告書　算数, https://www.nier.go.jp/08chousakekkahoukoku/08shou_data/houkokusho/05_shou_bunseki_sansuu.pdf
[168] 平成 21 年度全国学力・学習状況調査【小学校】報告書　算数, https://www.nier.go.jp/09chousakekkahoukoku/09shou_data/shiryou/04_2_shou_bunseki_sansuu.pdf
[169] 平成 22 年度全国学力・学習状況調査【小学校】報告書　算数, https://www.nier.go.jp/10chousakekkahoukoku/02shou/shou_4s.pdf
[170] 平成 24 年度全国学力・学習状況調査【小学校】報告書　算数 A, https://www.nier.go.jp/12chousakekkahoukoku/03shou-gaiyou/24_shou_houkokusyo-4_sansuua.pdf
[171] 平成 25 年度全国学力・学習状況調査報告書《小学校/算数》, https://www.nier.go.jp/13chousakekkahoukoku/data/13-p-math.html
[172] 平成 26 年度全国学力・学習状況調査報告書【小学校/算数】, https://www.nier.go.jp/14chousakekkahoukoku/report/data/pmath.pdf
[173] 平成 24 年度全国学力・学習状況調査【小学校】報告書　算数 B, https://www.nier.go.jp/12chousakekkahoukoku/03shou-gaiyou/24_shou_houkokusyo-4_sansuub.pdf
[174] 坂井武司, “子供の「割合」における概念獲得過程に関する研究（Ⅰ）－２つの対象物の比較に関する調査結果の分析と考察－,” 全国数学教育学会誌数学教育学研究, 全国数学教育学会, 第 11 巻, pp. 141-159, 2005.
[175] 坂井武司, “子供の「割合」における概念獲得過程に関する研究（Ⅱ）－比較における着目の仕方と方略に関する調査結果の分析と考察－,” 全国数学教育学会誌数学教育学研究, 全国数学教育学会, 第 12 巻, pp. 51-64, 2006.
[176] 坂井武司, “子供の「割合」における概念獲得過程に関する研究（Ⅳ）－「全体」への着目に関する調査結果の分析と考察－,” 全国数学教育学会誌数学教育学研究, 全国数学教育学会, 第 14 巻, pp. 129-138, 2008.

[177] 坂井武司, 齋藤昇, 高橋正, 廣瀬隆司, “割合についての児童の認識に関する研究,” 数学教育学会誌, 数学教育学会, Vol. 53, No. 3・4, pp. 97-106, 2013.
[178] 坂井武司, “子供の「割合」における概念獲得過程に関する研究(Ⅲ)－「２倍・1/2」を活用した類似探求授業の結果の分析と考察－,” 全国数学教育学会誌数学教育学研究, 全国数学教育学会, 第 13 巻, pp. 89-97, 2007.
[179] 坂井武司, “色テープ図を活用した割合の指導に関する研究,” 日本数学教育学会誌算数教育, 日本数学教育学会, 第 90 巻, 第 8 号, pp. 13-21, 2008.
[180] 田村三郎, 荒金憲一, 平井崇晴, 論理と思考－記号論理学入門－, 大阪教育図書, 1997.
[181] 戸田山和久, 論理学をつくる, 名古屋大学出版会, 2000.
[182] White, B. W., & Saltz, E., “Measurement of Reproducibility,” Psychological Bulletin, Vol. 54, pp. 81-99, 1957.
[183] 大塚雄作, “テスト項目の構造を探る－ S-P 表・尺度開発,” 心理・教育データの解析法 10 講応用編, 海保博之編, 福村出版, pp. 54-76, 1986.
[184] 依田新, 新・教育心理学事典, 金子書房, 1979.
[185] 東條光彦, “心理尺度の作成,” 心理学マニュアル質問紙法, 鎌原雅彦, 宮下一博, 大野木裕明, 中澤潤編, 北大路書房, pp. 100-108, 1998.
[186] 森敏昭, 吉田寿夫, 心理学のためのデータ解析テクニカルブック, 北大路書房, 1990.
[187] 岩原信九郎, 新訂版教育と心理のための推計学, 日本文化科学社, 1965.
[188] 古谷野亘, 数学が苦手な人のための多変量解析ガイド, 川島書店, 1988.
[189] 河口至商, 多変量解析入門 I , 森北出版, 1973.
[190] 廣瀬隆司, 齋藤昇, 藤原伸彦, 長谷川勝久, 松下弘二, 林隆宏, 坂井武司, “算数教育における数学に対する態度測定尺度の開発－小学校の教師と児童を対象にして－,” 数学教育学会誌, 数学教育学会, Vol. 49, No. 1・2, pp. 33-44, 2008.
[191] 廣瀬隆司, 齋藤昇, 長谷川勝久, 坂井武司, “算数教育における数学的価値の測定尺度の開発－小学校教師と児童を対象にして－,” 日本科学教育学会誌科学教育研究, 日本科学教育学会, Vol. 33, No. 3, pp. 277-287, 2009.
[192] 廣瀬隆司, 齋藤昇, 藤原伸彦, 長谷川勝久, 坂井武司, 林隆宏, 松下弘二, “算数教育における数学的信念尺度の開発－小学校教師と児童を対象にして－,” 日本教育実践学会誌教育実践学研究, 日本教育実践学会, 第 11 巻, 第 1 号, pp. 1-11, 2009.
[193] 廣瀬隆司, 齋藤昇, 松寄昭雄, 石内久次, 佐伯昭彦, 長谷川勝久, 坂井武司, “数学に対する感情尺度の開発に関する研究－小学校教師と児童を対象にして－,” 数学教育学会誌, 数学教育学会, Vol. 50, No. 3・4, pp. 79-89, 2009.
[194] 廣瀬隆司, 坂井武司, 石内久次, 齋藤昇, 松寄昭雄, 長谷川勝久, “数学に対する素質尺度の開発に関する研究－小学校教師と児童を対象にして－,” 数学教育学会誌, 数学教育学会, Vol. 51, No. 3・4, pp. 103-116, 2010.
[195] 廣瀬隆司, 坂井武司, 石内久次, 齋藤昇, 松寄昭雄, 長谷川勝久, 清水翔太, “児童の「小数×小数, 小数÷小数」の学習理解度尺度の開発－第５学年・第６学年の児童における水準及び水準内での段階区分に焦点を当てて－,” 数学教育学会誌, 数学教育学会, Vol. 55, No. 3・4, pp. 77-88, 2014.

付録１　割合に関する概念的知識の「割合に関する状況」の調査問題の証明

【問題１】

仮定の候補	定理	結論
A_1 B_2 C_3	（Ⅰ）$A_1 \wedge B_2 \to C_3$ （Ⅱ）$A_1 \wedge C_3 \to B_2$	D_2

証明

（Ⅰ）は第３章の「3.2.1　割合に関する状況」を参照。

（Ⅱ）
$$\dfrac{A_1 : n(S_A) = n(S_B) \qquad C_3 : n(Y_A) < n(Y_B)}{n(S_A) - n(Y_A) > n(S_B) - n(Y_B)}\ (>=2)$$

$$\dfrac{\dfrac{\text{定理７}: n(X) = n(S) - n(Y) \qquad n(X) = n(X_A) \quad n(Y) = n(Y_A) \quad n(S) = n(S_A)}{n(X_A) = n(S_A) - n(Y_A)}\ (=\text{代入})}{n(S_A) - n(Y_A) = n(X_A)}\ (\text{対称律})$$

$$\dfrac{\dfrac{\text{定理７}: n(X) = n(S) - n(Y) \qquad n(X) = n(X_B) \quad n(Y) = n(Y_B) \quad n(S) = n(S_B)}{n(X_B) = n(S_B) - n(Y_B)}\ (=\text{代入})}{n(S_B) - n(Y_B) = n(X_B)}\ (\text{対称律})$$

$$\dfrac{n(S_A) - n(Y_A) > n(S_B) - n(Y_B) \qquad n(S_A) - n(Y_A) = n(X_A) \quad n(S_B) - n(Y_B) = n(X_B)}{B_2 : n(X_A) > n(X_B)}\ (=\text{代入})$$

$$\dfrac{B_2 : n(X_A) > n(X_B)}{C_3 \to B_2}\ (\to\text{入})$$

$$\dfrac{C_3 \to B_2}{A_1 \to (C_3 \to B_2)}\ (\to\text{入})$$

$$\dfrac{A_1 \to (C_3 \to B_2)}{A_1 \wedge C_3 \to B_2}\ (\text{移入})$$

仮定の候補の内，矛盾した条件はない。A_1 と C_3 を仮定する場合，B_2 は仮定として必要ない。

（Ⅱ）
$$\dfrac{C_3 : n(Y_A) < n(Y_B) \qquad A_1 : n(S_A) = n(S_B)}{n(Y_A) \div n(S_A) < n(Y_B) \div n(S_B)}\ (>=1)$$

$$\dfrac{\dfrac{\text{定義}: P(Z) = n(Z) \div n(S) \qquad n(Z) = n(Y_A) \quad n(S) = n(S_A) \quad P(Z) = P(Y_A)}{P(Y_A) = n(Y_A) \div n(S_A)}\ (=\text{代入})}{n(Y_A) \div n(S_A) = P(Y_A)}\ (\text{対称律})$$

$$\dfrac{\dfrac{\text{定義}: P(Z) = n(Z) \div n(S) \qquad n(Z) = n(Y_B) \quad n(S) = n(S_B) \quad P(Z) = P(Y_B)}{P(Y_B) = n(Y_B) \div n(S_B)}\ (=\text{代入})}{n(Y_B) \div n(S_B) = P(Y_B)}\ (\text{対称律})$$

$$\dfrac{n(Y_A) \div n(S_A) < n(Y_B) \div n(S_B) \qquad n(Y_A) \div n(S_A) = P(Y_A) \qquad n(Y_B) \div n(S_B) = P(Y_B)}{E_3 : P(Y_A) < P(Y_B)}\ (=\text{代入})$$

$$\dfrac{1 = 1 \qquad E_3 : P(Y_A) < P(Y_B)}{1 - P(Y_A) > 1 - P(Y_B)}\ (>=2)$$

$$\dfrac{\text{定理２：}P(X)=1-P(Y) \qquad P(X)=P(X_A) \quad P(Y)=P(Y_A)}{\dfrac{P(X_A)=1-P(Y_A)}{1-P(Y_A)=P(X_A)}\text{（対称律）}}\text{（＝代入）}$$

$$\dfrac{\text{定理２：}P(X)=1-P(Y) \qquad P(X)=P(X_B) \quad P(Y)=P(Y_B)}{\dfrac{P(X_B)=1-P(Y_B)}{1-P(Y_B)=P(X_B)}\text{（対称律）}}\text{（＝代入）}$$

$$\dfrac{1-P(Y_A)>1-P(Y_B) \qquad 1-P(Y_A)=P(X_A) \quad 1-P(Y_B)=P(X_B)}{D_2\text{：}P(X_A)>P(X_B)}\text{（＝代入）}$$

A_1 と C_3 を仮定し，結論として証明されるのは，D_2 である。

【問題２】

仮定の候補	定理	結論
A_1 B_1 C_1	（Ⅰ）$A_1 \wedge B_1 \to C_1$ （Ⅱ）$A_1 \wedge C_1 \to B_1$	D_1

証明

（Ⅰ）

$$\dfrac{A_1\text{：}n(S_A)=n(S_B) \qquad B_1\text{：}n(X_A)=n(X_B)}{n(S_A)-n(X_A)=n(S_B)-n(X_B)}\text{（＝＝）}$$

$$\dfrac{\text{定理６：}n(Y)=n(S)-n(X) \qquad n(X)=n(X_A) \quad n(Y)=n(Y_A) \quad n(S)=n(S_A)}{\dfrac{n(Y_A)=n(S_A)-n(X_A)}{n(S_A)-n(X_A)=n(Y_A)}\text{（対称律）}}\text{（＝代入）}$$

$$\dfrac{\text{定理６：}n(Y)=n(S)-n(X) \qquad n(X)=n(X_B) \quad n(Y)=n(Y_B) \quad n(S)=n(S_B)}{\dfrac{n(Y_B)=n(S_B)-n(X_B)}{n(S_B)-n(X_B)=n(Y_B)}\text{（対称律）}}\text{（＝代入）}$$

$$\dfrac{n(S_A)-n(X_A)=n(S_B)-n(X_B) \qquad n(S_A)-n(X_A)=n(Y_A) \quad n(S_B)-n(X_B)=n(Y_B)}{\dfrac{\dfrac{\dfrac{C_1\text{：}n(Y_A)=n(Y_B)}{B_1 \to C_1}\text{（→入）}}{A_1 \to (B_1 \to C_1)}\text{（→入）}}{A_1 \wedge B_1 \to C_1}\text{（移入）}}\text{（＝代入）}$$

仮定の候補の内，矛盾した条件はない。A_1 と B_1 を仮定する場合，C_1 は仮定として必要ない。

（Ⅰ）

$$\dfrac{B_1\text{：}n(X_A)=n(X_B) \qquad A_1\text{：}n(S_A)=n(S_B)}{n(X_A)\div n(S_A)=n(X_B)\div n(S_B)}\text{（＝＝）}$$

$$\dfrac{\text{定義：}P(Z)=n(Z)\div n(S) \qquad n(Z)=n(X_A) \quad n(S)=n(S_A) \quad P(Z)=P(X_A)}{\dfrac{P(X_A)=n(X_A)\div n(S_A)}{n(X_A)\div n(S_A)=P(X_A)}\text{（対称律）}}\text{（＝代入）}$$

$$\dfrac{\dfrac{\text{定義}:P(Z)=n(Z)\div n(S)\qquad n(Z)=n(X_B)\quad n(S)=n(S_B)\quad P(Z)=P(X_B)}{P(X_B)=n(X_B)\div n(S_B)}\,(=\text{代入})}{n(X_B)\div n(S_B)=P(X_B)}\,(\text{対称律})$$

$$\dfrac{n(X_A)\div n(S_A)=n(X_B)\div n(S_B)\qquad n(X_A)\div n(S_A)=P(X_A)\quad n(X_B)\div n(S_B)=P(X_B)}{D_1:P(X_A)=P(X_B)}\,(=\text{代入})$$

A_1 と B_1 を仮定し，結論として証明されるのは，D_1 である。

（II） $$\dfrac{A_1:n(S_A)=n(S_B)\qquad C_1:n(Y_A)=n(Y_B)}{n(S_A)-n(Y_A)=n(S_B)-n(Y_B)}\,(==)$$

$$\dfrac{\dfrac{\text{定理７}:n(X)=n(S)-n(Y)\qquad n(X)=n(X_A)\quad n(Y)=n(Y_A)\quad n(S)=n(S_A)}{n(X_A)=n(S_A)-n(Y_A)}\,(=\text{代入})}{n(S_A)-n(Y_A)=n(X_A)}\,(\text{対称律})$$

$$\dfrac{\dfrac{\text{定理７}:n(X)=n(S)-n(Y)\qquad n(X)=n(X_B)\quad n(Y)=n(Y_B)\quad n(S)=n(S_B)}{n(X_B)=n(S_B)-n(Y_B)}\,(=\text{代入})}{n(S_B)-n(Y_B)=n(X_B)}\,(\text{対称律})$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{n(S_A)-n(Y_A)=n(S_B)-n(Y_B)\qquad n(S_A)-n(Y_A)=n(X_A)\quad n(S_B)-n(Y_B)=n(X_B)}{B_1:n(X_A)=n(X_B)}\,(=\text{代入})}{C_1\rightarrow B_1}\,(\rightarrow\text{入})}{A_1\rightarrow(C_1\rightarrow B_1)}\,(\rightarrow\text{入})}{A_1\wedge C_1\rightarrow B_1}\,(\text{移入})$$

仮定の候補の内，矛盾した条件はない。A_1 と C_1 を仮定する場合，B_1 は仮定として必要ない。

（II） $$\dfrac{C_1:n(Y_A)=n(Y_B)\qquad A_1:n(S_A)=n(S_B)}{n(Y_A)\div n(S_A)=n(Y_B)\div n(S_B)}\,(==)$$

$$\dfrac{\dfrac{\text{定義}:P(Z)=n(Z)\div n(S)\qquad n(Z)=n(Y_A)\quad n(S)=n(S_A)\quad P(Z)=P(Y_A)}{P(Y_A)=n(Y_A)\div n(S_A)}\,(=\text{代入})}{n(Y_A)\div n(S_A)=P(Y_A)}\,(\text{対称律})$$

$$\dfrac{\dfrac{\text{定義}:P(Z)=n(Z)\div n(S)\qquad n(Z)=n(Y_B)\quad n(S)=n(S_B)\quad P(Z)=P(Y_B)}{P(Y_B)=n(Y_B)\div n(S_B)}\,(=\text{代入})}{n(Y_B)\div n(S_B)=P(Y_B)}\,(\text{対称律})$$

$$\dfrac{n(Y_A)\div n(S_A)=n(Y_B)\div n(S_B)\qquad n(Y_A)\div n(S_A)=P(Y_A)\qquad n(Y_B)\div n(S_B)=P(Y_B)}{E_1:P(Y_A)=P(Y_B)}\,(=\text{代入})$$

$$\dfrac{1=1\qquad E_1:P(Y_A)=P(Y_B)}{1-P(Y_A)=1-P(Y_B)}\,(==)$$

$$\dfrac{\dfrac{\text{定理２：}P(X)=1-P(Y) \qquad P(X)=P(X_A) \quad P(Y)=P(Y_A)}{P(X_A)=1-P(Y_A)}\ (=\text{代入})}{1-P(Y_A)=P(X_A)}\ (\text{対称律})$$

$$\dfrac{\dfrac{\text{定理２：}P(X)=1-P(Y) \qquad P(X)=P(X_B) \quad P(Y)=P(Y_B)}{P(X_B)=1-P(Y_B)}\ (=\text{代入})}{1-P(Y_B)=P(X_B)}\ (\text{対称律})$$

$$\dfrac{1-P(Y_A)=1-P(Y_B) \qquad 1-P(Y_A)=P(X_A) \quad 1-P(Y_B)=P(X_B)}{D_1\text{：}P(X_A)=P(X_B)}\ (=\text{代入})$$

A_1 と C_1 を仮定し，結論として証明されるのは，D_1 である。

【問題３】

仮定の候補	定理	結論
$\neg A_1$ B_2 C_3		D_2

証明

$$\dfrac{\neg A_1 \qquad \dfrac{\neg A_1 \equiv A_2 \veebar A_3}{\neg A_1 \to A_2 \veebar A_3}\ (\equiv\text{除})}{\dfrac{A_2 \veebar A_3}{A_2 \vee A_3}\ (\veebar\to\vee)}\ (\to\text{除})$$

A_2 と A_3 の２つの場合に分けて考える。

A_2の場合

$$\dfrac{A_2\text{：}n(S_A)>n(S_B) \qquad \dfrac{C_3\text{：}n(Y_A)<n(Y_B)}{n(Y_B)>n(Y_A)}\ (<>)}{n(S_A)-n(Y_A)>n(S_B)-n(Y_B)}\ (>>2)$$

$$\dfrac{\dfrac{\text{定理７：}n(X)=n(S)-n(Y) \qquad n(X)=n(X_A) \quad n(Y)=n(Y_A) \quad n(S)=n(S_A)}{n(X_A)=n(S_A)-n(Y_A)}\ (=\text{代入})}{n(S_A)-n(Y_A)=n(X_A)}\ (\text{対称律})$$

$$\dfrac{\dfrac{\text{定理７：}n(X)=n(S)-n(Y) \qquad n(X)=n(X_B) \quad n(Y)=n(Y_B) \quad n(S)=n(S_B)}{n(X_B)=n(S_B)-n(Y_B)}\ (=\text{代入})}{n(S_B)-n(Y_B)=n(X_B)}\ (\text{対称律})$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{n(S_A)-n(Y_A)>n(S_B)-n(Y_B) \quad n(S_A)-n(Y_A)=n(X_A) \quad n(S_B)-n(Y_B)=n(X_B)}{B_2\text{：}n(X_A)>n(X_B)}\ (=\text{代入})}{C_3 \to B_2}\ (\to\text{入})}{A_2 \to (C_3 \to B_2)}\ (\to\text{入})}{A_2 \wedge C_3 \to B_2}\ (\text{移入})$$

A_3の場合

$$\dfrac{A_3 : n(S_A) < n(S_B) \qquad \dfrac{B_2 : n(X_A) > n(X_B)}{n(X_B) < n(X_A)}\ (<>)}{n(S_A) - n(X_A) < n(S_B) - n(X_B)}\ (>>2)$$

$$\dfrac{\dfrac{定理6 : n(Y) = n(S) - n(X) \qquad n(X) = n(X_A) \quad n(Y) = n(Y_A) \quad n(S) = n(S_A)}{n(Y_A) = n(S_A) - n(X_A)}\ (=代入)}{n(S_A) - n(X_A) = n(Y_A)}\ (対称律)$$

$$\dfrac{\dfrac{定理6 : n(Y) = n(S) - n(X) \qquad n(X) = n(X_B) \quad n(Y) = n(Y_B) \quad n(S) = n(S_B)}{n(Y_B) = n(S_B) - n(X_B)}\ (=代入)}{n(S_B) - n(X_B) = n(Y_B)}\ (対称律)$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{n(S_A) - n(X_A) < n(S_B) - n(X_B) \quad n(S_A) - n(X_A) = n(Y_A) \quad n(S_B) - n(X_B) = n(Y_B)}{C_3 : n(Y_A) < n(Y_B)}\ (=代入)}{B_2 \to C_3}\ (\to入)}{A_3 \to (B_2 \to C_3)}\ (\to入)}{A_3 \wedge B_2 \to C_3}\ (移入)$$

仮定の候補の内，矛盾した条件はない。

$$\dfrac{\neg A_1 \qquad \dfrac{\neg A_1 \equiv A_2 \underline{\vee} A_3}{\neg A_1 \to A_2 \underline{\vee} A_3}\ (\equiv除)}{\dfrac{A_2 \underline{\vee} A_3}{A_2 \vee A_3}\ (\underline{\vee} \to \vee)}\ (\to除)$$

A_2 と A_3 の２つの場合に分けて考える。

A_2の場合

$$\dfrac{C_3 : n(Y_A) < n(Y_B) \qquad \dfrac{A_2 : n(S_A) > n(S_B)}{n(S_B) < n(S_A)}\ (<>)}{n(Y_A) \div n(S_A) < n(Y_B) \div n(S_B)}\ (>>2)$$

$$\dfrac{\dfrac{定義 : P(Z) = n(Z) \div n(S) \qquad n(Z) = n(Y_A) \quad n(S) = n(S_A) \quad P(Z) = P(Y_A)}{P(Y_A) = n(Y_A) \div n(S_A)}\ (=代入)}{n(Y_A) \div n(S_A) = P(Y_A)}\ (対称律)$$

$$\dfrac{\dfrac{定義 : P(Z) = n(Z) \div n(S) \qquad n(Z) = n(Y_B) \quad n(S) = n(S_B) \quad P(Z) = P(Y_B)}{P(Y_B) = n(Y_B) \div n(S_B)}\ (=代入)}{n(Y_B) \div n(S_B) = P(Y_B)}\ (対称律)$$

$$\dfrac{n(Y_A) \div n(S_A) < n(Y_B) \div n(S_B) \qquad n(Y_A) \div n(S_A) = P(Y_A) \quad n(Y_B) \div n(S_B) = P(Y_B)}{E_3 : P(Y_A) < P(Y_B)}\ (=代入)$$

$$\dfrac{1 = 1 \qquad E_3 : P(Y_A) < P(Y_B)}{1 - P(Y_A) > 1 - P(Y_B)}\ (>=2)$$

$$\dfrac{\dfrac{\text{定理２}: P(X)=1-P(Y) \qquad P(X)=P(X_A) \quad P(Y)=P(Y_A)}{P(X_A)=1-P(Y_A)}\,(=\text{代入})}{1-P(Y_A)=P(X_A)}\,(\text{対称律})$$

$$\dfrac{\dfrac{\text{定理２}: P(X)=1-P(Y) \qquad P(X)=P(X_B) \quad P(Y)=P(Y_B)}{P(X_B)=1-P(Y_B)}\,(=\text{代入})}{1-P(Y_B)=P(X_B)}\,(\text{対称律})$$

$$\dfrac{1-P(Y_A)>1-P(Y_B) \qquad 1-P(Y_A)=P(X_A) \quad 1-P(Y_B)=P(X_B)}{D_2: P(X_A)>P(X_B)}\,(=\text{代入})$$

A_3の場合

$$\dfrac{B_2: n(X_A)>n(X_B) \qquad \dfrac{A_3: n(S_A)<n(S_B)}{n(S_B)>n(S_A)}\,(<>)}{n(X_A)\div n(S_A)>n(X_B)\div n(S_B)}\,(>>2)$$

$$\dfrac{\dfrac{\text{定義}: P(Z)=n(Z)\div n(S) \qquad n(Z)=n(X_A) \quad n(S)=n(S_A) \quad P(Z)=P(X_A)}{P(X_A)=n(X_A)\div n(S_A)}\,(=\text{代入})}{n(X_A)\div n(S_A)=P(X_A)}\,(\text{対称律})$$

$$\dfrac{\dfrac{\text{定義}: P(Z)=n(Z)\div n(S) \qquad n(Z)=n(X_B) \quad n(S)=n(S_B) \quad P(Z)=P(X_B)}{P(X_B)=n(X_B)\div n(S_B)}\,(=\text{代入})}{n(X_B)\div n(S_B)=P(X_B)}\,(\text{対称律})$$

$$\dfrac{n(X_A)\div n(S_A)>n(X_B)\div n(S_B) \qquad n(X_A)\div n(S_A)=P(X_A) \quad n(X_B)\div n(S_B)=P(X_B)}{D_2: P(X_A)>P(X_B)}\,(=\text{代入})$$

$$\dfrac{A_2 \lor A_3 \qquad D_2: P(X_A)>P(X_B) \quad D_2: P(X_A)>P(X_B)}{D_2: P(X_A)>P(X_B)}\,(\lor\text{除})$$

$\neg A_1$，B_2，C_3 を仮定し，結論として証明されるのは，D_2 である。

【問題５】

仮定の候補	定理	結論
$\neg A_1$ B_2 C_1	$B_2 \land C_1 \to \neg A_1$	D_2

証明

$$\dfrac{B_2: n(X_A)>n(X_B) \qquad C_1: n(Y_A)=n(Y_B)}{n(X_A)+n(Y_A)>n(X_B)+n(Y_B)}\,(>=1)$$

$$\dfrac{\dfrac{\text{定理５}: n(S)=n(X)+n(Y) \quad n(X)=n(X_A) \quad n(Y)=n(Y_A) \quad n(S)=n(S_A)}{n(S_A)=n(X_A)+n(Y_A)}\,(=\text{代入})}{n(X_A)+n(Y_A)=n(S_A)}\,(\text{対称律})$$

$$\dfrac{\dfrac{\text{定理５：}n(S)=n(X)+n(Y) \quad n(X)=n(X_B) \quad n(Y)=n(Y_B) \quad n(S)=n(S_B)}{n(S_B)=n(X_B)+n(Y_B)}\ (=\text{代入})}{n(X_B)+n(Y_B)=n(S_B)}\ (\text{対称律})$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{n(X_A)+n(Y_A)>n(X_B)+n(Y_B) \quad n(X_A)+n(Y_A)=n(S_A) \quad n(X_B)+n(Y_B)=n(S_B)}{A_2 : n(S_A)>n(S_B)}\ (=\text{代入})}{C_1 \rightarrow A_2}\ (\rightarrow\text{入})}{B_2 \rightarrow (C_1 \rightarrow A_2)}\ (\rightarrow\text{入})}{B_2 \wedge C_1 \rightarrow A_2}\ (\text{移入})}{B_2 \wedge C_1 \rightarrow A_2 \vee A_3}\ (\vee\text{入}) \quad \dfrac{\dfrac{\neg A_1 \equiv A_2 \underline{\vee} A_3}{\neg A_1 \equiv A_2 \vee A_3}\ (\underline{\vee}\rightarrow\vee)}{A_2 \vee A_3 \rightarrow \neg A_1}\ (\equiv\text{除})}{B_2 \wedge C_1 \rightarrow \neg A_1}\ (\text{推移})$$

仮定の候補の内，矛盾した条件はない。B_2 と C_1 を仮定する場合，$\neg A_1$ は仮定として必要ない。

$$\dfrac{B_2 : n(X_A)>n(X_B) \qquad C_1 : n(Y_A)=n(Y_B)}{n(X_A)+n(Y_A)>n(X_B)+n(Y_B)}\ (>=１)$$

$$\dfrac{\dfrac{\text{定理５：}n(S)=n(X)+n(Y) \quad n(X)=n(X_A) \quad n(Y)=n(Y_A) \quad n(S)=n(S_A)}{n(S_A)=n(X_A)+n(Y_A)}\ (=\text{代入})}{n(X_A)+n(Y_A)=n(S_A)}\ (\text{対称律})$$

$$\dfrac{\dfrac{\text{定理５：}n(S)=n(X)+n(Y) \quad n(X)=n(X_B) \quad n(Y)=n(Y_B) \quad n(S)=n(S_B)}{n(S_B)=n(X_B)+n(Y_B)}\ (=\text{代入})}{n(X_B)+n(Y_B)=n(S_B)}\ (\text{対称律})$$

$$\dfrac{n(X_A)+n(Y_A)>n(X_B)+n(Y_B) \quad n(X_A)+n(Y_A)=n(S_A) \quad n(X_B)+n(Y_B)=n(S_B)}{A_2 : n(S_A)>n(S_B)}\ (=\text{代入})$$

$$\dfrac{C_1 : n(Y_A)=n(Y_B) \qquad A_2 : n(S_A)>n(S_B)}{n(Y_A)\div n(S_A)<n(Y_B)\div n(S_B)}\ (>=２)$$

$$\dfrac{\dfrac{\text{定義：}P(Z)=n(Z)\div n(S) \qquad n(Z)=n(Y_A) \quad n(S)=n(S_A) \quad P(Z)=P(Y_A)}{P(Y_A)=n(Y_A)\div n(S_A)}\ (=\text{代入})}{n(Y_A)\div n(S_A)=P(Y_A)}\ (\text{対称律})$$

$$\dfrac{\dfrac{\text{定義：}P(Z)=n(Z)\div n(S) \qquad n(Z)=n(Y_B) \quad n(S)=n(S_B) \quad P(Z)=P(Y_B)}{P(Y_B)=n(Y_B)\div n(S_B)}\ (=\text{代入})}{n(Y_B)\div n(S_B)=P(Y_B)}\ (\text{対称律})$$

$$\dfrac{n(Y_A)\div n(S_A)<n(Y_B)\div n(S_B) \quad n(Y_A)\div n(S_A)=P(Y_A) \quad n(Y_B)\div n(S_B)=P(Y_B)}{E_3 : P(Y_A)<P(Y_B)}\ (=\text{代入})$$

$$\dfrac{１=１ \qquad E_3 : P(Y_A)<P(Y_B)}{１-P(Y_A)>１-P(Y_B)}\ (>=２)$$

$$\dfrac{\text{定理２：}P(X)=1-P(Y)\qquad P(X)=P(X_A)\quad P(Y)=P(Y_A)}{\dfrac{P(X_A)=1-P(Y_A)}{1-P(Y_A)=P(X_A)}\ (\text{対称律})}\ (=\text{代入})$$

$$\dfrac{\text{定理２：}P(X)=1-P(Y)\qquad P(X)=P(X_B)\quad P(Y)=P(Y_B)}{\dfrac{P(X_B)=1-P(Y_B)}{1-P(Y_B)=P(X_B)}\ (\text{対称律})}\ (=\text{代入})$$

$$\dfrac{1-P(Y_A)>1-P(Y_B)\qquad 1-P(Y_A)=P(X_A)\quad 1-P(Y_B)=P(X_B)}{D_2: P(X_A)>P(X_B)}\ (=\text{代入})$$

B_2 と C_1 を仮定し，結論として証明されるのは，D_2 である。

【問題６】

仮定の候補	定理	結論
$\neg A_1$ B_1 C_2	$B_1\wedge C_2\to\neg A_1$	D_3

証明

$$\dfrac{B_1: n(X_A)=n(X_B)\qquad C_2: n(Y_A)>n(Y_B)}{n(X_A)+n(Y_A)>n(X_B)+n(Y_B)}\ (>=1)$$

$$\dfrac{\text{定理５：}n(S)=n(X)+n(Y)\qquad n(X)=n(X_A)\quad n(Y)=n(Y_A)\quad n(S)=n(S_A)}{\dfrac{n(S_A)=n(X_A)+n(Y_A)}{n(X_A)+n(Y_A)=n(S_A)}\ (\text{対称律})}\ (=\text{代入})$$

$$\dfrac{\text{定理５：}n(S)=n(X)+n(Y)\qquad n(X)=n(X_B)\quad n(Y)=n(Y_B)\quad n(S)=n(S_B)}{\dfrac{n(S_B)=n(X_B)+n(Y_B)}{n(X_B)+n(Y_B)=n(S_B)}\ (\text{対称律})}\ (=\text{代入})$$

$$\dfrac{n(X_A)+n(Y_A)>n(X_B)+n(Y_B)\qquad n(X_A)+n(Y_A)=n(S_A)\quad n(X_B)+n(Y_B)=n(S_B)}{A_2: n(S_A)>n(S_B)}\ (=\text{代入})$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A_2: n(S_A)>n(S_B)}{C_2\to A_2}\ (\to\text{入})}{B_1\to(C_2\to A_2)}\ (\to\text{入})}{B_1\wedge C_2\to A_2}\ (\text{移入})}{B_1\wedge C_2\to A_2\vee A_3}\ (\vee\text{入})\qquad \dfrac{\dfrac{\neg A_1\equiv A_2\,\underline{\vee}\,A_3}{\neg A_1\equiv A_2\vee A_3}\ (\underline{\vee}\to\vee)}{A_2\vee A_3\to\neg A_1}\ (\equiv\text{除})}{B_1\wedge C_2\to\neg A_1}\ (\text{推移})$$

仮定の候補の内，矛盾した条件はない。B_1 と C_2 を仮定する場合，$\neg A_1$ は仮定として必要ない。

$$\dfrac{B_1: n(X_A)=n(X_B)\qquad C_2: n(Y_A)>n(Y_B)}{n(X_A)+n(Y_A)>n(X_B)+n(Y_B)}\ (>=1)$$

$$\dfrac{\text{定理５：}n(S)=n(X)+n(Y)\qquad n(X)=n(X_A)\quad n(Y)=n(Y_A)\quad n(S)=n(S_A)}{\dfrac{n(S_A)=n(X_A)+n(Y_A)}{n(X_A)+n(Y_A)=n(S_A)}\ (\text{対称律})}\ (=\text{代入})$$

$$\frac{\text{定理５：}n(S)=n(X)+n(Y)\qquad n(X)=n(X_B)\quad n(Y)=n(Y_B)\quad n(S)=n(S_B)}{\dfrac{n(S_B)=n(X_B)+n(Y_B)}{n(X_B)+n(Y_B)=n(S_B)}\ (\text{対称律})}\ (\text{＝代入})$$

$$\frac{n(X_A)+n(Y_A)>n(X_B)+n(Y_B)\quad n(X_A)+n(Y_A)=n(S_A)\qquad n(X_B)+n(Y_B)=n(S_B)}{A_2\text{：}n(S_A)>n(S_B)}\ (\text{＝代入})$$

$$\frac{B_1\text{：}n(X_A)=n(X_B)\qquad A_2\text{：}n(S_A)>n(S_B)}{n(X_A)\div n(S_A)<n(X_B)\div n(S_B)}\ (>=2)$$

$$\frac{\text{定義：}P(Z)=n(Z)\div n(S)\qquad n(Z)=n(X_A)\quad n(S)=n(S_A)\quad P(Z)=P(X_A)}{\dfrac{P(X_A)=n(X_A)\div n(S_A)}{n(X_A)\div n(S_A)=P(X_A)}\ (\text{対称律})}\ (\text{＝代入})$$

$$\frac{\text{定義：}P(Z)=n(Z)\div n(S)\qquad n(Z)=n(X_B)\quad n(S)=n(S_B)\quad P(Z)=P(X_B)}{\dfrac{P(X_B)=n(X_B)\div n(S_B)}{n(X_B)\div n(S_B)=P(X_B)}\ (\text{対称律})}\ (\text{＝代入})$$

$$\frac{n(X_A)\div n(S_A)<n(X_B)\div n(S_B)\qquad n(X_A)\div n(S_A)=P(X_A)\qquad n(X_B)\div n(S_B)=P(X_B)}{D_3\text{：}P(X_A)<P(X_B)}\ (\text{＝代入})$$

B_1 と C_2 を仮定し，結論として証明されるのは，D_3 である。

付録２　割合に関する概念的知識の「割合に関する状況」における考え方の例

【問題４】

仮定の候補	定理
$\neg A_1$ B_2 C_2	$B_2 \wedge C_2 \rightarrow \neg A_1$

証明

$$\underline{n(X_A)=2 \quad n(X_B)=1 \quad n(S_A)=4 \quad n(S_B)=2 \quad 2>1 \quad 4>2 \quad 4\text{-}2>2\text{-}1 \quad 2/4=1/2}\ (\exists\exists入)$$

$$\begin{aligned}\exists x \exists y \exists z \exists w\ [&n(X_A)=x \wedge n(X_B)=y \wedge x>y\\ &\wedge n(S_A)=z \wedge n(S_B)=w \wedge z>w\\ &\wedge n(Y_A)=z-x \wedge n(Y_B)=w-y \wedge z-x>w-y\\ &\wedge P(X_A)=x/z \wedge P(X_B)=y/w \wedge x/z=y/w]\ \cdots ⓐ\end{aligned}$$

$$\underline{n(X_A)=3 \quad n(X_B)=1 \quad n(S_A)=5 \quad n(S_B)=2 \quad 3>1 \quad 5>2 \quad 5\text{-}3>2\text{-}1 \quad 3/5>1/2}\ (\exists\exists入)$$

$$\begin{aligned}\exists x' \exists y' \exists z' \exists w'\ [&n(X_A)=x' \wedge n(X_B)=y' \wedge x'>y'\\ &\wedge n(S_A)=z' \wedge n(S_B)=w' \wedge z'>w'\\ &\wedge n(Y_A)=z'-x' \wedge n(Y_B)=w'-y' \wedge z'-x'>w'-y'\\ &\wedge P(X_A)=x'/z' \wedge P(X_B)=y'/w' \wedge x'/z'>y'/w']\ \cdots ⓑ\end{aligned}$$

$$\underline{n(X_A)=2 \quad n(X_B)=1 \quad n(S_A)=5 \quad n(S_B)=2 \quad 2>1 \quad 5>2 \quad 5\text{-}2>2\text{-}1 \quad 2/5<1/2}\ (\exists\exists入)$$

$$\begin{aligned}\exists x'' \exists y'' \exists z'' \exists w''\ [&n(X_A)=x'' \wedge n(X_B)=y'' \wedge x''>y''\\ &\wedge n(S_A)=z'' \wedge n(S_B)=w'' \wedge z''>w''\\ &\wedge n(Y_A)=z''-x'' \wedge n(Y_B)=w''-y'' \wedge z''-x''>w''-y''\\ &\wedge P(X_A)=x''/z'' \wedge P(X_B)=y''/w'' \wedge x''/z''<y''/w'']\ \cdots ⓒ\end{aligned}$$

$$\underline{\qquad ⓐ \qquad ⓑ \qquad ⓒ \qquad}\ (\wedge\wedge入)$$

$$\begin{aligned}(\exists x \exists y \exists z \exists w\ [&n(X_A)=x \wedge n(X_B)=y \wedge x>y\\ &\wedge n(S_A)=z \wedge n(S_B)=w \wedge z>w\\ &\wedge n(Y_A)=z-x \wedge n(Y_B)=w-y \wedge z-x>w-y\\ &\wedge P(X_A)=x/z \wedge P(X_B)=y/w \wedge x/z=y/w])\\ \wedge(\exists x' \exists y' \exists z' \exists w'\ [&n(X_A)=x' \wedge n(X_B)=y' \wedge x'>y'\\ &\wedge n(S_A)=z' \wedge n(S_B)=w' \wedge z'>w'\\ &\wedge n(Y_A)=z'-x' \wedge n(Y_B)=w'-y' \wedge z'-x'>w'-y'\\ &\wedge P(X_A)=x'/z' \wedge P(X_B)=y'/w' \wedge x'/z'>y'/w'])\\ \wedge(\exists x'' \exists y'' \exists z'' \exists w''\ [&n(X_A)=x'' \wedge n(X_B)=y'' \wedge x''>y''\\ &\wedge n(S_A)=z'' \wedge n(S_B)=w'' \wedge z''>w''\\ &\wedge n(Y_A)=z''-x'' \wedge n(Y_B)=w''-y'' \wedge z''-x''>w''-y''\\ &\wedge P(X_A)=x''/z'' \wedge P(X_B)=y''/w'' \wedge x''/z''<y''/w''])\end{aligned}$$

結論として，$\neg A_1$，B_2，C_2 及び D_1，$\neg A_1$，B_2，C_2 及び D_2，$\neg A_1$，B_2，C_2 及び D_3 のそれぞれを満たす $n(X_A)$，$n(X_B)$，$n(S_A)$，$n(S_B)$ が存在することが証明される。

考え方の例

$0 \leqq P(X) \leqq 1$ から $0 \leqq n(X) \leqq n(S)$，$0 \leqq P(Y) \leqq 1$ から $0 \leqq n(Y) \leqq n(S)$ である。$n(X)=0$ や $n(Y)=0$ は現実的ではないため，$0<n(X)<n(S)$，$0<n(Y)<n(S)$ の場合に限定する。した

がって，最も単純な場合である n(X_A)＝１，n(X_B)＝１，n(S_A)＝２，n(S_B)＝２の条件から考える。

(1) $n(X_A)=1$，$n(X_B)=1$，$n(S_A)=2$，$n(S_B)=2$

$$\dfrac{n(X_A)=1 \qquad \dfrac{n(X_B)=1}{1=n(X_B)}\,(\text{対称律})}{B_1 : n(X_A)=n(X_B)}\,(\text{推移律})$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{B_2}{B_2 \vee B_3}\,(\vee\text{入}) \qquad \dfrac{\dfrac{\neg B_1 \equiv B_2 \underline{\vee} B_3}{\neg B_1 \equiv B_2 \vee B_3}\,(\underline{\vee}\to\vee)}{B_2 \vee B_3 \to \neg B_1}\,(\equiv\text{除})}{\neg B_1}\,(\to\text{除}) \qquad B_1}{\bot}\,(\neg\text{除})$$

$$\dfrac{\dfrac{n(S_A)=2 \qquad \dfrac{n(S_B)=2}{2=n(S_B)}\,(\text{対称律})}{A_1 : n(S_A)=n(S_B)}\,(\text{推移律}) \qquad \neg A_1}{\bot}\,(\neg\text{除})$$

B_2 と $\neg A_1$ の条件を満たすように，n(X_A)＝１，n(X_B)＝１，n(S_A)＝２，n(S_B)＝２の条件を基に，n(X_A)とn(S_A)の２項にそれぞれ＋１する。

(2) $n(X_A)=2$，$n(X_B)=1$，$n(S_A)=3$，$n(S_B)=2$

$$\dfrac{\dfrac{n(X_A)=2 \qquad 2>1}{n(X_A)>1}\,(\text{推移律}) \qquad \dfrac{n(X_B)=1}{1=n(X_B)}\,(\text{対称律})}{B_2 : n(X_A)>n(X_B)}\,(\text{推移律})$$

$$\dfrac{\dfrac{n(S_A)=3 \qquad 3>2}{n(S_A)>2}\,(\text{推移律}) \qquad \dfrac{n(S_B)=2}{2=n(S_B)}\,(\text{対称律})}{A_2 : n(S_A)>n(S_B)}\,(\text{推移律})$$

$$\dfrac{\dfrac{A_2}{A_2 \vee A_3}\,(\vee\text{入}) \qquad \dfrac{\dfrac{\neg A_1 \equiv A_2 \underline{\vee} A_3}{\neg A_1 \equiv A_2 \vee A_3}\,(\underline{\vee}\to\vee)}{A_2 \vee A_3 \to \neg A_1}\,(\equiv\text{除})}{\neg A_1}\,(\to\text{除})$$

$$\dfrac{\text{定理６}: n(Y)=n(S)-n(X) \qquad n(X)=n(X_A) \quad n(Y)=n(Y_A) \quad n(S)=n(S_A)}{n(Y_A)=n(S_A)-n(X_A)}\,(=\text{代入})$$

$$\dfrac{\dfrac{n(Y_A)=n(S_A)-n(X_A) \qquad n(X_A)=2 \quad n(S_A)=3}{n(Y_A)=3-2}\,(=\text{代入})}{n(Y_A)=1}\,(\text{演推})$$

$$\dfrac{\text{定理6}: n(Y)=n(S)-n(X) \quad n(X)=n(X_B) \quad n(Y)=n(Y_B) \quad n(S)=n(S_B)}{n(Y_B)=n(S_B)-n(X_B)}\ (=\text{代入})$$

$$\dfrac{n(Y_B)=n(S_B)-n(X_B) \quad n(X_B)=1 \quad n(S_B)=2}{\dfrac{n(Y_B)=2-1}{n(Y_B)=1}\ (\text{演推})}\ (=\text{代入})$$

$$\dfrac{n(Y_A)=1 \quad \dfrac{n(Y_B)=1}{1=n(Y_B)}\ (\text{対称律})}{C_1: n(Y_A)=n(Y_B)}\ (\text{推移律})$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{C_2}{C_2\lor C_3}\ (\lor\text{入}) \quad \dfrac{\dfrac{\neg C_1\equiv C_2 \underline{\lor} C_3}{\neg C_1 \equiv C_2\lor C_3}\ (\underline{\lor}\to\lor)}{C_2\lor C_3\to\neg C_1}\ (\equiv\text{除})}{\neg C_1}\ (\to\text{除}) \quad C_1}{\bot}\ (\neg\text{除})$$

（$\to$除）の適用は $C_2\lor C_3$ と $C_2\lor C_3\to\neg C_1$ から $\neg C_1$ を導く。

C_2 の条件を満たすように，$n(X_A)=2$，$n(X_B)=1$，$n(S_A)=3$，$n(S_B)=2$ の条件を基に，$n(S_A)$ の項に＋１する。

(3) $n(X_A)=2$，$n(X_B)=1$，$n(S_A)=4$，$n(S_B)=2$

$$\dfrac{\dfrac{n(X_A)=2 \quad 2>1}{n(X_A)>1}\ (\text{推移律}) \quad \dfrac{n(X_B)=1}{1=n(X_B)}\ (\text{対称律})}{B_2: n(X_A)>n(X_B)}\ (\text{推移律})$$

$$\dfrac{\dfrac{n(S_A)=4 \quad 4>2}{n(S_A)>2}\ (\text{推移律}) \quad \dfrac{n(S_B)=2}{2=n(S_B)}\ (\text{対称律})}{A_2: n(S_A)>n(S_B)}\ (\text{推移律})$$

$$\dfrac{\dfrac{A_2}{A_2\lor A_3}\ (\lor\text{入}) \quad \dfrac{\dfrac{\neg A_1\equiv A_2 \underline{\lor} A_3}{\neg A_1 \equiv A_2\lor A_3}\ (\underline{\lor}\to\lor)}{A_2\lor A_3\to\neg A_1}\ (\equiv\text{除})}{\neg A_1}\ (\to\text{除})$$

$$\dfrac{\text{定理6}: n(Y)=n(S)-n(X) \quad n(X)=n(X_A) \quad n(Y)=n(Y_A) \quad n(S)=n(S_A)}{n(Y_A)=n(S_A)-n(X_A)}\ (=\text{代入})$$

$$\dfrac{n(Y_A)=n(S_A)-n(X_A) \quad n(X_A)=2 \quad n(S_A)=4}{\dfrac{n(Y_A)=4-2}{n(Y_A)=2}\ (\text{演推})}\ (=\text{代入})$$

$$\dfrac{\text{定理6}: n(Y)=n(S)-n(X) \quad n(X)=n(X_B) \quad n(Y)=n(Y_B) \quad n(S)=n(S_B)}{n(Y_B)=n(S_B)-n(X_B)}\ (=\text{代入})$$

$$\dfrac{\dfrac{n(Y_B)=n(S_B)-n(X_B)\qquad n(X_B)=1\quad n(S_B)=2}{n(Y_B)=2-1}\text{（＝代入）}}{n(Y_B)=1}\text{（演推）}$$

$$\dfrac{\dfrac{n(Y_A)=2\qquad 2>1}{n(Y_A)>1}\text{（推移律）}\qquad\dfrac{n(Y_B)=1}{1=n(Y_B)}\text{（対称律）}}{C_2: n(Y_A)>n(Y_B)}\text{（推移律）}$$

$$\dfrac{\text{定義}: P(Z)=n(Z)\div n(S)\qquad n(Z)=n(X_A)\quad n(S)=n(S_A)\quad P(Z)=P(X_A)}{P(X_A)=n(X_A)\div n(S_A)}\text{（＝代入）}$$

$$\dfrac{\dfrac{P(X_A)=n(X_A)\div n(S_A)\qquad n(X_A)=2\quad n(S_A)=4}{P(X_A)=2\div 4}\text{（＝代入）}}{P(X_A)=1/2}\text{（演推）}$$

$$\dfrac{\text{定義}: P(Z)=n(Z)\div n(S)\qquad n(Z)=n(X_B)\quad n(S)=n(S_B)\quad P(Z)=P(X_B)}{P(X_B)=n(X_B)\div n(S_B)}\text{（＝代入）}$$

$$\dfrac{\dfrac{P(X_B)=n(X_B)\div n(S_B)\qquad n(X_B)=1\quad n(S_B)=2}{P(X_B)=1\div 2}\text{（＝代入）}}{P(X_B)=1/2}\text{（演推）}$$

$$\dfrac{P(X_A)=1/2\qquad\dfrac{P(X_B)=1/2}{1/2=P(X_B)}\text{（対称律）}}{D_1: P(X_A)=P(X_B)}\text{（推移律）}$$

D_2 の条件を満たすように，D_1 となる $n(X_A)=2$，$n(X_B)=1$，$n(S_A)=4$，$n(S_B)=2$ の条件を基に，$n(X_A)$ の項に＋１する。

(4) $n(X_A)=3$，$n(X_B)=1$，$n(S_A)=4$，$n(S_B)=2$

$$\dfrac{\dfrac{n(X_A)=3\qquad 3>1}{n(X_A)>1}\text{（推移律）}\qquad\dfrac{n(X_B)=1}{1=n(X_B)}\text{（対称律）}}{B_2: n(X_A)>n(X_B)}\text{（推移律）}$$

$$\dfrac{\dfrac{n(S_A)=4\qquad 4>2}{n(S_A)>2}\text{（推移律）}\qquad\dfrac{n(S_B)=2}{2=n(S_B)}\text{（対称律）}}{A_2: n(S_A)>n(S_B)}\text{（推移律）}$$

$$\dfrac{\dfrac{A_2}{A_2\vee A_3}\text{（}\vee\text{入）}\qquad\dfrac{\dfrac{\neg A_1\equiv A_2\,\underline{\vee}\,A_3}{\neg A_1\equiv A_2\vee A_3}\text{（}\underline{\vee}\to\vee\text{）}}{A_2\vee A_3\to\neg A_1}\text{（}\equiv\text{除）}}{\neg A_1}\text{（}\to\text{除）}$$

$$\dfrac{\text{定理６：}n(Y)=n(S)-n(X) \qquad n(X)=n(X_A) \quad n(Y)=n(Y_A) \quad n(S)=n(S_A)}{n(Y_A)=n(S_A)-n(X_A)}\ (\text{＝代入})$$

$$\dfrac{\dfrac{n(Y_A)=n(S_A)-n(X_A) \qquad n(X_A)=3 \quad n(S_A)=4}{n(Y_A)=4-3}\ (\text{＝代入})}{n(Y_A)=1}\ (\text{演推})$$

$$\dfrac{\text{定理６：}n(Y)=n(S)-n(X) \qquad n(X)=n(X_B) \quad n(Y)=n(Y_B) \quad n(S)=n(S_B)}{n(Y_B)=n(S_B)-n(X_B)}\ (\text{＝代入})$$

$$\dfrac{\dfrac{n(Y_B)=n(S_B)-n(X_B) \qquad n(X_B)=1 \quad n(S_B)=2}{n(Y_B)=2-1}\ (\text{＝代入})}{n(Y_B)=1}\ (\text{演推})$$

$$\dfrac{n(Y_A)=1 \qquad \dfrac{n(Y_B)=1}{1=n(Y_B)}\ (\text{対称律})}{C_1: n(Y_A)=n(Y_B)}\ (\text{推移律})$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{C_2}{C_2 \lor C_3}\ (\lor\text{入}) \qquad \dfrac{\dfrac{\neg C_1 \equiv C_2 \underline{\lor} C_3}{\neg C_1 \equiv C_2 \lor C_3}\ (\underline{\lor}\to\lor)}{C_2 \lor C_3 \to \neg C_1}\ (\equiv\text{除})}{\neg C_1}\ (\to\text{除}) \qquad C_1}{\bot}\ (\neg\text{除})$$

C_2 の条件を満たすように，$n(X_A)=3$，$n(X_B)=1$，$n(S_A)=4$，$n(S_B)=2$ の条件を基に，$n(S_A)$ の項に＋１する。

(5) $(X_A)=3$，$n(X_B)=1$，$n(S_A)=5$，$n(S_B)=2$

$$\dfrac{\dfrac{n(X_A)=3 \qquad 3>1}{n(X_A)>1}\ (\text{推移律}) \qquad \dfrac{n(X_B)=1}{1=n(X_B)}\ (\text{対称律})}{B_2: n(X_A)>n(X_B)}\ (\text{推移律})$$

$$\dfrac{\dfrac{n(S_A)=5 \qquad 5>2}{n(S_A)>2}\ (\text{推移律}) \qquad \dfrac{n(S_B)=2}{2=n(S_B)}\ (\text{対称律})}{A_2: n(S_A)>n(S_B)}\ (\text{推移律})$$

$$\dfrac{\dfrac{A_2}{A_2 \lor A_3}\ (\lor\text{入}) \qquad \dfrac{\dfrac{\neg A_1 \equiv A_2 \underline{\lor} A_3}{\neg A_1 \equiv A_2 \lor A_3}\ (\underline{\lor}\to\lor)}{A_2 \lor A_3 \to \neg A_1}\ (\equiv\text{除})}{\neg A_1}\ (\to\text{除})$$

$$\dfrac{\text{定理６：}n(Y)=n(S)-n(X) \qquad n(X)=n(X_A) \quad n(Y)=n(Y_A) \quad n(S)=n(S_A)}{n(Y_A)=n(S_A)-n(X_A)}\ (\text{＝代入})$$

$$\cfrac{n(Y_A)=n(S_A)-n(X_A)\qquad n(X_A)=3\quad n(S_A)=5}{\cfrac{n(Y_A)=5-3}{n(Y_A)=2}\text{（演推）}}\text{（＝代入）}$$

$$\cfrac{\text{定理６：}n(Y)=n(S)-n(X)\qquad n(X)=n(X_B)\quad n(Y)=n(Y_B)\quad n(S)=n(S_B)}{n(Y_B)=n(S_B)-n(X_B)}\text{（＝代入）}$$

$$\cfrac{n(Y_B)=n(S_B)-n(X_B)\qquad n(X_B)=1\quad n(S_B)=2}{\cfrac{n(Y_B)=2-1}{n(Y_B)=1}\text{（演推）}}\text{（＝代入）}$$

$$\cfrac{\cfrac{n(Y_A)=2\qquad 2>1}{n(Y_A)>1}\text{（推移律）}\qquad \cfrac{n(Y_B)=1}{1=n(Y_B)}\text{（対称律）}}{C_2 : n(Y_A)>n(Y_B)}\text{（推移律）}$$

$$\cfrac{\text{定義：}P(Z)=n(Z)\div n(S)\qquad n(Z)=n(X_A)\quad n(S)=n(S_A)\quad P(Z)=P(X_A)}{P(X_A)=n(X_A)\div n(S_A)}\text{（＝代入）}$$

$$\cfrac{P(X_A)=n(X_A)\div n(S_A)\qquad n(X_A)=3\quad n(S_A)=5}{\cfrac{P(X_A)=3\div 5}{P(X_A)=3/5}\text{（演推）}}\text{（＝代入）}$$

$$\cfrac{\text{定義：}P(Z)=n(Z)\div n(S)\qquad n(Z)=n(X_B)\quad n(S)=n(S_B)\quad P(Z)=P(X_B)}{P(X_B)=n(X_B)\div n(S_B)}\text{（＝代入）}$$

$$\cfrac{P(X_B)=n(X_B)\div n(S_B)\qquad n(X_B)=1\quad n(S_B)=2}{\cfrac{P(X_B)=1\div 2}{P(X_B)=1/2}\text{（演推）}}\text{（＝代入）}$$

$$\cfrac{\cfrac{P(X_A)=3/5\qquad 3/5>1/2}{P(X_A)>1/2}\text{（推移律）}\qquad \cfrac{P(X_B)=1/2}{1/2=P(X_B)}\text{（対称律）}}{D_2 : P(X_A)>P(X_B)}\text{（推移律）}$$

D_3 の条件を満たすように，D_1 となる $n(X_A)=2$，$n(X_B)=1$，$n(S_A)=4$，$n(S_B)=2$ の条件を基に，$n(S_A)$ の項に＋１する。つまり，D_2 と D_3 は対称であるので，D_2 となる $n(X_A)=3$ と $n(Y_A)=2$ のそれぞれの値を交換し，$n(X_A)=2$ と $n(Y_A)=3$ する。

(6) $n(X_A)=2$，$n(X_B)=1$，$n(S_A)=5$，$n(S_B)=2$

$$\cfrac{\cfrac{n(X_A)=2\qquad 2>1}{n(X_A)>1}\text{（推移律）}\qquad \cfrac{n(X_B)=1}{1=n(X_B)}\text{（対称律）}}{B_2 : n(X_A)>n(X_B)}\text{（推移律）}$$

$$\dfrac{\dfrac{n(S_A)=5 \qquad 5>2}{n(S_A)>2}\text{（推移律）} \qquad \dfrac{n(S_B)=2}{2=n(S_B)}\text{（対称律）}}{A_2: n(S_A)>n(S_B)}\text{（推移律）}$$

$$\dfrac{\dfrac{A_2}{A_2 \vee A_3}\text{（}\vee\text{入）} \qquad \dfrac{\dfrac{\neg A_1 \equiv A_2 \underline{\vee} A_3}{\neg A_1 \equiv A_2 \vee A_3}\text{（}\underline{\vee}\to\vee\text{）}}{A_2 \vee A_3 \to \neg A_1}\text{（}\equiv\text{除）}}{\neg A_1}\text{（}\to\text{除）}$$

$$\dfrac{\text{定理６：}n(Y)=n(S)-n(X) \qquad n(X)=n(X_A) \quad n(Y)=n(Y_A) \quad n(S)=n(S_A)}{n(Y_A)=n(S_A)-n(X_A)}\text{（＝代入）}$$

$$\dfrac{\dfrac{n(Y_A)=n(S_A)-n(X_A) \qquad n(X_A)=2 \quad n(S_A)=5}{n(Y_A)=5-2}\text{（＝代入）}}{n(Y_A)=3}\text{（演推）}$$

$$\dfrac{\text{定理６：}n(Y)=n(S)-n(X) \qquad n(X)=n(X_B) \quad n(Y)=n(Y_B) \quad n(S)=n(S_B)}{n(Y_B)=n(S_B)-n(X_B)}\text{（＝代入）}$$

$$\dfrac{\dfrac{n(Y_B)=n(S_B)-n(X_B) \qquad n(X_B)=1 \quad n(S_B)=2}{n(Y_B)=2-1}\text{（＝代入）}}{n(Y_B)=1}\text{（演推）}$$

$$\dfrac{\dfrac{n(Y_A)=3 \qquad 3>1}{n(Y_A)>1}\text{（推移律）} \qquad \dfrac{n(Y_B)=1}{1=n(Y_B)}\text{（対称律）}}{C_2: n(Y_A)>n(Y_B)}\text{（推移律）}$$

$$\dfrac{\text{定義：}P(Z)=n(Z)\div n(S) \qquad n(Z)=n(X_A) \quad n(S)=n(S_A) \quad P(Z)=P(X_A)}{P(X_A)=n(X_A)\div n(S_A)}\text{（＝代入）}$$

$$\dfrac{\dfrac{P(X_A)=n(X_A)\div n(S_A) \qquad n(X_A)=2 \quad n(S_A)=5}{P(X_A)=2\div 5}\text{（＝代入）}}{P(X_A)=2/5}\text{（演推）}$$

$$\dfrac{\text{定義：}P(Z)=n(Z)\div n(S) \qquad n(Z)=n(X_B) \quad n(S)=n(S_B) \quad P(Z)=P(X_B)}{P(X_B)=n(X_B)\div n(S_B)}\text{（＝代入）}$$

$$\dfrac{\dfrac{P(X_B)=n(X_B)\div n(S_B) \qquad n(X_B)=1 \quad n(S_B)=2}{P(X_B)=1\div 2}\text{（＝代入）}}{P(X_B)=1/2}\text{（演推）}$$

$$\dfrac{\dfrac{P(X_A)=2/5 \qquad 2/5<1/2}{P(X_A)<1/2}\text{（推移律）} \qquad \dfrac{P(X_B)=1/2}{1/2=P(X_B)}\text{（対称律）}}{D_3: P(X_A)<P(X_B)}\text{（推移律）}$$

付録３　割合に関する概念的知識の「割合に関する状況」における児童の考え方

①水準０：第３章の「3.2.1　割合に関する状況」を参照。
②水準１(段階1A)：第３章の「3.2.1　割合に関する状況」を参照。
③水準１(段階1B)：第３章の「3.2.1　割合に関する状況」を参照。

④水準２

調査問題	仮定の候補	正誤
問題４	$\neg A_1$ B_2 C_2	正答

正答

$$\begin{aligned}
&(\exists x \exists y \exists z \exists w\ [n(X_A)=x \wedge n(X_B)=y \wedge x>y\\
&\qquad \wedge n(S_A)=z \wedge n(S_B)=w \wedge z>w\\
&\qquad \wedge n(Y_A)=z-x \wedge n(Y_B)=w-y \wedge z-x>w-y\\
&\qquad \wedge P(X_A)=x/z \wedge P(X_B)=y/w \wedge x/z=y/w])\\
&\wedge(\exists x' \exists y' \exists z' \exists w'\ [n(X_A)=x' \wedge n(X_B)=y' \wedge x'>y'\\
&\qquad \wedge n(S_A)=z' \wedge n(S_B)=w' \wedge z'>w'\\
&\qquad \wedge n(Y_A)=z'-x' \wedge n(Y_B)=w'-y' \wedge z'-x'>w'-y'\\
&\qquad \wedge P(X_A)=x'/z' \wedge P(X_B)=y'/w' \wedge x'/z'>y'/w'])\\
&\wedge(\exists x'' \exists y'' \exists z'' \exists w''\ [n(X_A)=x'' \wedge n(X_B)=y'' \wedge x''>y''\\
&\qquad \wedge n(S_A)=z'' \wedge n(S_B)=w'' \wedge z''>w''\\
&\qquad \wedge n(Y_A)=z''-x'' \wedge n(Y_B)=w''-y'' \wedge z''-x''>w''-y''\\
&\qquad \wedge P(X_A)=x''/z'' \wedge P(X_B)=y''/w'' \wedge x''/z''<y''/w''])
\end{aligned}$$

結論

(Ⅰ)は第３章の「3.2.1　割合に関する状況」を参照。

$$\begin{aligned}
(\text{Ⅱ})\quad &(\exists x \exists y \exists z \exists w\ [n(X_A)=x \wedge n(X_B)=y \wedge n(Y_A)=z \wedge n(Y_B)=w\\
&\qquad \wedge x>z \wedge y<w \wedge x>y \wedge z>w\\
&\qquad \wedge P(X_A)=x/(x+z) \wedge P(X_B)=y/(y+w) \wedge x/(x+z)>y/(y+w)])\\
&\wedge(\exists x' \exists y' \exists z' \exists w'\ [n(X_A)=x' \wedge n(X_B)=y' \wedge n(Y_A)=z' \wedge n(Y_B)=w'\\
&\qquad \wedge x'=z' \wedge y'=w' \wedge x'>y' \wedge z'>w'\\
&\qquad \wedge P(X_A)=x'/(x'+z') \wedge P(X_B)=y'/(y'+w') \wedge x'/(x'+z')=y'/(y'+w')])\\
&\wedge(\exists x'' \exists y'' \exists z'' \exists w''\ [n(X_A)=x'' \wedge n(X_B)=y'' \wedge n(Y_A)=z'' \wedge n(Y_B)=w''\\
&\qquad \wedge x''<z'' \wedge y''>w'' \wedge x''>y'' \wedge z''>w''\\
&\qquad \wedge P(X_A)=x''/(x''+z'') \wedge P(X_B)=y''/(y''+w'') \wedge x''/(x''+z'')<y''/(y''+w'')])
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\text{Ⅲ})\quad &(\exists x \exists y \exists z \exists w\ [n(X_A)=x \wedge n(X_B)=y \wedge x>y\\
&\qquad \wedge n(Y_A)=z \wedge n(Y_B)=w \wedge z>w\\
&\qquad \wedge n(S_A)=x+z \wedge n(S_B)=y+w \wedge x+z>y+w\\
&\qquad \wedge P(X_A)=x/(x+z) \wedge P(X_B)=y/(y+w) \wedge x/(x+z)=y/(y+w)])\\
&\wedge(\exists x' \exists y' \exists z' \exists w'\ [n(X_A)=x' \wedge n(X_B)=y' \wedge x'>y'\\
&\qquad \wedge n(Y_A)=z' \wedge n(Y_B)=w' \wedge z'>w'\\
&\qquad \wedge n(S_A)=x'+z' \wedge n(S_B)=y'+w' \wedge x'+z'>y'+w'\\
&\qquad \wedge P(X_A)=x'/(x'+z') \wedge P(X_B)=y'/(y'+w') \wedge x'/(x'+z')>y'/(y'+w')])
\end{aligned}$$

$\wedge(\exists x''\exists y''\exists z''\exists w''\,[n(X_A)=x''\wedge n(X_B)=y''\wedge x''>y''$
$\wedge\, n(Y_A)=z''\wedge n(Y_B)=w''\wedge z''>w''$
$\wedge\, n(S_A)=x''+z''\wedge n(S_B)=y''+w''\wedge x''+z''>y''+w''$
$\wedge\, P(X_A)=x''/(x''+z'')\wedge P(X_B)=y''/(y''+w'')\wedge x''/(x''+z'')<y''/(y''+w'')])$

児童の考え方

（Ⅰ）は第３章の「3.2.1　割合に関する状況」を参照。

（Ⅱ）　$n(X_A)=a,\ n(X_B)=b,\ n(Y_A)=c,\ n(Y_B)=d,\ a>c,\ b<d$ …①

①の「,」を除いて列記したものを1とする。

$$\frac{\boxed{1}\quad a>b\quad c>d\quad a/(a+c)>b/(b+d)}{\begin{aligned}&\exists x\exists y\exists z\exists w\,[n(X_A)=x\wedge n(X_B)=y\wedge n(Y_A)=z\wedge n(Y_B)=w\\&\wedge x>z\wedge y<w\wedge x>y\wedge z>w\\&\wedge P(X_A)=x/(x+z)\wedge P(X_B)=y/(y+w)\wedge x/(x+z)>y/(y+w)]\end{aligned}}\ (\exists\exists入)$$
…ⓐ

$n(X_A)=a',\ n(X_B)=b',\ n(Y_A)=c',\ n(Y_B)=d',\ a'=c',\ b'=d'$…②

②の「,」を除いて列記したものを2とする。

$$\frac{\boxed{2}\quad a'>b'\quad c'>d'\quad a'/(a'+c')=b'/(b'+d')}{\begin{aligned}&\exists x'\exists y'\exists z'\exists w'\,[n(X_A)=x'\wedge n(X_B)=y'\wedge n(Y_A)=z'\wedge n(Y_B)=w'\\&\wedge x'=z'\wedge y'=w'\wedge x'>y'\wedge z'>w'\\&\wedge P(X_A)=x'/(x'+z')\wedge P(X_B)=y'/(y'+w')\wedge x'/(x'+z')=y'/(y'+w')]\end{aligned}}\ (\exists\exists入)$$
…ⓑ

$n(X_A)=a'',\ n(X_B)=b'',\ n(Y_A)=c'',\ n(Y_B)=d'',\ a''<c'',\ b''>d''$…③

③の「,」を除いて列記したものを3とする。

$$\frac{\boxed{3}\quad a''>b''\quad c''>d''\quad a''/(a''+c'')<b''/(b''+d'')}{\begin{aligned}&\exists x''\exists y''\exists z''\exists w''\,[n(X_A)=x''\wedge n(X_B)=y''\wedge n(Y_A)=z''\wedge n(Y_B)=w''\\&\wedge x''<z''\wedge y''>w''\wedge x''>y''\wedge z''>w''\\&\wedge P(X_A)=x''/(x''+z'')\wedge P(X_B)=y''/(y''+w'')\wedge x''/(x''+z'')<y''/(y''+w'')]\end{aligned}}\ (\exists\exists入)$$
…ⓒ

$$\frac{ⓐ\quad ⓑ\quad ⓒ}{\begin{aligned}&(\exists x\exists y\exists z\exists w\,[n(X_A)=x\wedge n(X_B)=y\wedge n(Y_A)=z\wedge n(Y_B)=w\\&\wedge x>z\wedge y<w\wedge x>y\wedge z>w\\&\wedge P(X_A)=x/(x+z)\wedge P(X_B)=y/(y+w)\wedge x/(x+z)>y/(y+w)])\\&\wedge(\exists x'\exists y'\exists z'\exists w'\,[n(X_A)=x'\wedge n(X_B)=y'\wedge n(Y_A)=z'\wedge n(Y_B)=w'\\&\wedge x'=z'\wedge y'=w'\wedge x'>y'\wedge z'>w'\\&\wedge P(X_A)=x'/(x'+z')\wedge P(X_B)=y'/(y'+w')\wedge x'/(x'+z')=y'/(y'+w')])\\&\wedge(\exists x''\exists y''\exists z''\exists w''\,[n(X_A)=x''\wedge n(X_B)=y''\wedge n(Y_A)=z''\wedge n(Y_B)=w''\\&\wedge x''<z''\wedge y''>w''\wedge x''>y''\wedge z''>w''\\&\wedge P(X_A)=x''/(x''+z'')\wedge P(X_B)=y''/(y''+w'')\wedge x''/(x''+z'')<y''/(y''+w'')]\end{aligned}}\ (\wedge\wedge入)$$

$n(X_A)$ と $n(Y_A)$ の大小関係及び相等関係は,「$n(X_A) > n(Y_A)$」,「$n(X_A) < n(Y_A)$」,「$n(X_A) = n(Y_A)$」の３通り，$n(X_B)$ と $n(Y_B)$ の大小関係及び相等関係は,「$n(X_B) > n(Y_B)$」,「$n(X_B) < n(Y_B)$」,「$n(X_B) = n(Y_B)$」の３通りある。したがって，これらの組合せは，以下の９通りである。

・$n(X_A) > n(Y_A)$，$n(X_B) > n(Y_B)$
・$n(X_A) > n(Y_A)$，$n(X_B) < n(Y_B)$
・$n(X_A) > n(Y_A)$，$n(X_B) = n(Y_B)$
・$n(X_A) < n(Y_A)$，$n(X_B) > n(Y_B)$
・$n(X_A) < n(Y_A)$，$n(X_B) < n(Y_B)$
・$n(X_A) < n(Y_A)$，$n(X_B) = n(Y_B)$
・$n(X_A) = n(Y_A)$，$n(X_B) > n(Y_B)$
・$n(X_A) = n(Y_A)$，$n(X_B) < n(Y_B)$
・$n(X_A) = n(Y_A)$，$n(X_B) = n(Y_B)$

この９通りの中から,「当たりくじの本数がはずれくじの本数より多いくじは，当たりくじの方が出やすい」,「はずれくじの本数が当たりくじの本数より多いくじは，はずれくじの方が出やすい」,「当たりくじの本数とはずれくじの本数が同じくじは，当たりくじとはずれくじが同じくらい出る」という考えに基づいて，$P(X_A)$ と $P(X_B)$ の大小関係及び相等関係を判断するために,「$n(X_A) > n(Y_A)$，$n(X_B) < n(Y_B)$」,「$n(X_A) = n(Y_A)$，$n(X_B) = n(Y_B)$」,「$n(X_A) < n(Y_A)$，$n(X_B) > n(Y_B)$」の３つを条件として考えている。

(1) $n(X_A) > n(Y_A)$，$n(X_B) < n(Y_B)$

$$\frac{n(X_A) > n(Y_A) \qquad \mathbf{n(X_A) > n(Y_A) \to W(X_A)}}{W(X_A) : P(X_A) > 1/2}\ (\to\text{除})$$

$$\frac{n(X_B) < n(Y_B) \qquad \mathbf{n(X_B) < n(Y_B) \to L(X_B)}}{L(X_B) : P(X_B) < 1/2}\ (\to\text{除})$$

$$\frac{\dfrac{W(X_A) \quad L(X_B)}{W(X_A) \wedge L(X_B)}\ (\wedge\text{入}) \qquad \mathbf{W(X_A) \wedge L(X_B) \to P(X_A) > P(X_B)}}{D_2 : P(X_A) > P(X_B)}\ (\to\text{除})$$

$$\frac{\dfrac{n(X_A) > n(Y_A) \qquad C_2 : n(Y_A) > n(Y_B)}{n(X_A) > n(Y_B)}\ (\text{推移律}) \qquad \dfrac{n(X_B) < n(Y_B)}{n(Y_B) > n(X_B)}\ (<>)}{B_2 : n(X_A) > n(X_B)}\ (\text{推移律})$$

$n(X_A) = a$，$n(X_B) = b$，$n(Y_A) = c$，$n(Y_B) = d$ とすると，$a > b$，$c > d$，$a > c$，$b < d$，$a/(a + c) > b/(b + d)$ の条件が導かれる。

$$\frac{n(X_A) > n(Y_A) \qquad n(X_A) = a \qquad n(Y_A) = c}{a > c}\ (=\text{代入})$$

$$\frac{n(X_B) < n(Y_B) \qquad n(X_B) = b \qquad n(Y_B) = d}{b < d}\ (=\text{代入})$$

$$\frac{B_2 : n(X_A) > n(X_B) \qquad n(X_A) = a \qquad n(X_B) = b}{a > b}\ (=\text{代入})$$

$$\begin{array}{l}
\underline{C_2: n(Y_A) > n(Y_B) \qquad n(Y_A) = c \qquad n(Y_B) = d}\ (=\text{代入})\\
\qquad\qquad\qquad c > d
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
\underline{\text{反射律}: a = a \quad a > c}\ (>=1)\\
\qquad \underline{a + a > a + c \qquad\qquad a = a}\ (>=1)\\
\qquad\quad \underline{(a + a) \div a > (a + c) \div a}\ (\text{演推})※5\\
\qquad\qquad\quad \underline{2 > (a + c) \div a}\ (\text{演推})\\
\underline{1 = 1 \qquad\qquad 2 > (a + c)/a}\ (>=2)\\
\quad \underline{1 \div 2 < 1 \div (a + c)/a}\ (\text{演推})\\
\qquad \underline{1/2 < 1 \div (a + c)/a}\ (\text{演推})※6\\
\qquad 1/2 < a/(a + c)
\end{array}$$

※5
①$(a + a) \div a = 2a \div a = 2$
②$(a + a) \div a = a \div a + a \div a$
$= 1 + 1 = 2$

※6
$1 \div (a + c)/a = 1/((a + c)/a)$
$= (1 \times a)/((a + c)/a \times a)$
$= a/(a + c)$

$$\begin{array}{l}
\underline{\text{反射律}: b = b \quad b < d}\ (>=1)\\
\qquad \underline{b + b < b + d \qquad\qquad b = b}\ (>=1)\\
\qquad\quad \underline{(b + b) \div b < (b + d) \div b}\ (\text{演推})※5\\
\qquad\qquad\quad \underline{2 < (b + d) \div b}\ (\text{演推})\\
\underline{1 = 1 \qquad\qquad 2 < (b + d)/b}\ (>=2)\\
\quad \underline{1 \div 2 > 1 \div (b + d)/b}\ (\text{演推})\\
\qquad \underline{1/2 > 1 \div (b + d)/b}\ (\text{演推})※6\\
\qquad 1/2 > b/(b + d)
\end{array}$$

※5
①$(b + b) \div b = 2b \div b = 2$
②$(b + b) \div b = b \div b + b \div b$
$= 1 + 1 = 2$

※6
$1 \div (b + d)/b = 1/((b + d)/b)$
$= (1 \times b)/((b + d)/b \times b)$
$= b/(b + d)$

$$\begin{array}{l}
\underline{1/2 < a/(a + c)}\ (<>)\\
\underline{a/(a + c) > 1/2 \qquad\qquad 1/2 > b/(b + d)}\ (\text{推移律})\\
\qquad a/(a + c) > b/(b + d)
\end{array}$$

(2) $n(X_A) = n(Y_A)$, $n(X_B) = n(Y_B)$

$$\begin{array}{l}
\underline{n(X_A) = n(Y_A) \qquad \mathbf{n(X_A) = n(Y_A) \rightarrow H(X_A)}}\ (\rightarrow\text{除})\\
\qquad H(X_A): P(X_A) = 1/2
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
\underline{n(X_B) = n(Y_B) \qquad \mathbf{n(X_B) = n(Y_B) \rightarrow H(X_B)}}\ (\rightarrow\text{除})\\
\qquad H(X_B): P(X_A) = 1/2
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
\underline{H(X_A) \quad H(X_B)}\ (\wedge\text{入})\\
\underline{H(X_A) \wedge H(X_B) \qquad\qquad \mathbf{H(X_A) \wedge H(X_B) \rightarrow P(X_A) = P(X_B)}}\ (\rightarrow\text{除})\\
\qquad\qquad D_1: P(X_A) = P(X_B)
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
\underline{n(X_A) = n(Y_A) \qquad C_2: n(Y_A) > n(Y_B)}\ (\text{推移律}) \qquad \underline{n(X_B) = n(Y_B)}\ (\text{対称律})\\
\qquad \underline{n(X_A) > n(Y_B) \qquad\qquad\qquad\qquad n(Y_B) = n(X_B)}\ (\text{推移律})\\
\qquad\qquad\qquad B_2: n(X_A) > n(X_B)
\end{array}$$

$n(X_A) = a'$, $n(X_B) = b'$, $n(Y_A) = c'$, $n(Y_B) = d'$とすると，$a' > b'$, $c' > d'$, $a' = c'$, $b' = d'$, $a'/(a' + c') = b'/(b' + d')$の条件が導かれる。

$$\frac{n(X_A)=n(Y_A) \qquad n(X_A)=a' \qquad n(Y_A)=c'}{a'=c'}\ (=\text{代入})$$

$$\frac{n(X_B)=n(Y_B) \qquad n(X_B)=b' \qquad n(Y_B)=d'}{b'=d'}\ (=\text{代入})$$

$$\frac{B_2 : n(X_A)>n(X_B) \qquad n(X_A)=a' \qquad n(X_B)=b'}{a'>b'}\ (=\text{代入})$$

$$\frac{C_2 : n(Y_A)>n(Y_B) \qquad n(Y_A)=c' \qquad n(Y_B)=d'}{c'>d'}\ (=\text{代入})$$

$$\frac{\text{反射律}: a'=a' \qquad a'=c'}{a'+a'=a'+c'}\ (==)$$

$$\frac{a'+a'=a'+c' \qquad a'=a'}{(a'+a')\div a'=(a'+c')\div a'}\ (==)$$

$$\frac{(a'+a')\div a'=(a'+c')\div a'}{2=(a'+c')\div a'}\ (\text{演推})※5$$

$$\frac{2=(a'+c')\div a'}{2=(a'+c')/a'}\ (\text{演推})$$

$$\frac{1=1 \qquad 2=(a'+c')/a'}{1\div 2=1\div(a'+c')/a'}\ (==)$$

$$\frac{1\div 2=1\div(a'+c')/a'}{1/2=1\div(a'+c')/a'}\ (\text{演推})$$

$$\frac{1/2=1\div(a'+c')/a'}{1/2=a'/(a'+c')}\ (\text{演推})※6$$

$$\frac{\text{反射律}: b'=b' \qquad b'=d'}{b'+b'=b'+d'}\ (==)$$

$$\frac{b'+b'=b'+d' \qquad b'=b'}{(b'+b')\div b'=(b'+d')\div b'}\ (==)$$

$$\frac{(b'+b')\div b'=(b'+d')\div b'}{2=(b'+d')\div b'}\ (\text{演推})※5$$

$$\frac{2=(b'+d')\div b'}{2=(b'+d')/b'}\ (\text{演推})$$

$$\frac{1=1 \qquad 2=(b'+d')/b'}{1\div 2=1\div(b'+d')/b'}\ (==)$$

$$\frac{1\div 2=1\div(b'+d')/b'}{1/2=1\div(b'+d')/b'}\ (\text{演推})$$

$$\frac{1/2=1\div(b'+d')/b'}{1/2=b'/(b'+d')}\ (\text{演推})※6$$

$$\frac{1/2=a'/(a'+c')}{a'/(a'+c')=1/2}\ (\text{対称律})$$

$$\frac{a'/(a'+c')=1/2 \qquad 1/2=b'/(b'+d')}{a'/(a'+c')=b'/(b'+d')}\ (\text{推移律})$$

(3) $n(X_A)<n(Y_A)$, $n(X_B)>n(Y_B)$

$$\frac{n(X_A)<n(Y_A) \qquad \mathbf{n(X_A)<n(Y_A)\rightarrow L(X_A)}}{L(X_A) : P(X_B)<1/2}\ (\rightarrow\text{除})$$

$$\frac{n(X_B)>n(Y_B) \qquad \mathbf{n(X_B)>n(Y_B)\rightarrow W(X_B)}}{W(X_B) : P(X_B)>1/2}\ (\rightarrow\text{除})$$

$$\frac{L(X_A) \qquad W(X_B)}{L(X_A)\wedge W(X_B)}\ (\wedge\text{入})$$

$$\frac{L(X_A)\wedge W(X_B) \qquad \mathbf{L(X_A)\wedge W(X_B)\rightarrow P(X_A)<P(X_B)}}{D_3 : P(X_A)<P(X_B)}\ (\rightarrow\text{除})$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{n(X_A) < n(Y_A)}{n(Y_A) > n(X_A)}\,(<>) \qquad B_2 : n(X_A) > n(X_B)}{n(Y_A) > n(X_B)}\,(\text{推移律}) \qquad n(X_B) > n(Y_B)}{C_2 : n(Y_A) > n(Y_B)}\,(\text{推移律})$$

$n(X_A) = a''$, $n(X_B) = b''$, $n(Y_A) = c''$, $n(Y_B) = d''$とすると，$a'' > b''$, $c'' > d''$, $a'' < c''$, $b'' > d''$, $a''/(a'' + c'') < b''/(b'' + d'')$の条件が導かれる。

$$\dfrac{n(X_A) < n(Y_A) \qquad n(X_A) = a'' \qquad n(Y_A) = c''}{a'' < c''}\,(=\text{代入})$$

$$\dfrac{n(X_B) > n(Y_B) \qquad n(X_B) = b'' \qquad n(Y_B) = d''}{b'' > d''}\,(=\text{代入})$$

$$\dfrac{B_2 : n(X_A) > n(X_B) \qquad n(X_A) = a'' \qquad n(X_B) = b''}{a'' > b''}\,(=\text{代入})$$

$$\dfrac{C_2 : n(Y_A) > n(Y_B) \qquad n(Y_A) = c'' \qquad n(Y_B) = d''}{c'' > d''}\,(=\text{代入})$$

$$\dfrac{\dfrac{1 = 1 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{反射律} : a'' = a'' \qquad a'' < c''}{a'' + a'' < a'' + c''}\,(>=1) \qquad a'' = a''}{(a'' + a'') \div a'' < (a'' + c'') \div a''}\,(>=1)}{2 < (a'' + c'') \div a''}\,(\text{演推})※5}{2 < (a'' + c'')/a''}\,(\text{演推})}{\dfrac{1 \div 2 > 1 \div (a'' + c'')/a''}{1/2 > 1 \div (a'' + c'')/a''}\,(\text{演推})}\,(>=2)}{1/2 > a''/(a'' + c'')}\,(\text{演推})※6$$

$$\dfrac{\dfrac{1 = 1 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{反射律} : b'' = b'' \qquad b'' > d''}{b'' + b'' > b'' + d''}\,(>=1) \qquad b'' = b''}{(b'' + b'') \div b'' > (b'' + d'') \div b''}\,(>=1)}{2 > (b'' + d'') \div b''}\,(\text{演推})※5}{2 > (b'' + d'')/b''}\,(\text{演推})}{\dfrac{1 \div 2 < 1 \div (b'' + d'')/b''}{1/2 < 1 \div (b'' + d'')/b''}\,(\text{演推})}\,(>=2)}{1/2 < b''/(b'' + d'')}\,(\text{演推})※6$$

$$\dfrac{\dfrac{1/2 > a''/(a'' + c'')}{a''/(a'' + c'') < 1/2}\,(<>) \qquad 1/2 < b''/(b'' + d'')}{a''/(a'' + c'') < b''/(b'' + d'')}\,(\text{推移律})$$

(Ⅲ)　$n(X_A) = 12$, $n(X_B) = 6$, $n(Y_A) = 8$, $n(Y_B) = 4$ …①

①の「,」を除いて列記したものを$\boxed{1}$とする。

$$\dfrac{\boxed{1}\qquad 12>6\qquad 8>4\qquad 12+8>6+4\qquad 12/(12+8)=6/(6+4)}{\begin{array}{l}\exists x\exists y\exists z\exists w\,[n(X_A)=x\wedge n(X_B)=y\wedge x>y\\ \qquad\qquad\wedge\, n(Y_A)=z\wedge n(Y_B)=w\wedge z>w\\ \qquad\qquad\wedge\, n(S_A)=x+z\wedge n(S_B)=y+w\wedge x+z>y+w\\ \qquad\qquad\wedge\, P(X_A)=x/(x+z)\wedge P(X_B)=y/(y+w)\wedge x/(x+z)=y/(y+w)]\cdots ⓐ\end{array}}\,(\exists\exists入)$$

$n(X_A)=12$, $n(X_B)=6$, $n(Y_A)=8$, $n(Y_B)=6$ …②

②の「,」を除いて列記したものを$\boxed{2}$とする。

$$\dfrac{\boxed{2}\qquad 12>6\qquad 8>6\qquad 12+8>6+6\qquad 12/(12+8)>6/(6+6)}{\begin{array}{l}\exists x'\exists y'\exists z'\exists w'\,[n(X_A)=x'\wedge n(X_B)=y'\wedge x'>y'\\ \qquad\qquad\wedge\, n(Y_A)=z'\wedge n(Y_B)=w'\wedge z'>w'\\ \qquad\qquad\wedge\, n(S_A)=x'+z'\wedge n(S_B)=y'+w'\wedge x'+z'>y'+w'\\ \qquad\qquad\wedge\, P(X_A)=x'/(x'+z')\wedge P(X_B)=y'/(y'+w')\wedge x'/(x'+z')>y'/(y'+w')]\cdots ⓑ\end{array}}\,(\exists\exists入)$$

$n(X_A)=12$, $n(X_B)=10$, $n(Y_A)=8$, $n(Y_B)=4$ …③

③の「,」を除いて列記したものを$\boxed{3}$とする。

$$\dfrac{\boxed{3}\qquad 12>10\qquad 8>4\qquad 12+8>10+4\qquad 12/(12+8)<10/(10+4)}{\begin{array}{l}\exists x''\exists y''\exists z''\exists w''\,[n(X_A)=x''\wedge n(X_B)=y''\wedge x''>y''\\ \qquad\qquad\wedge\, n(Y_A)=z''\wedge n(Y_B)=w''\wedge z''>w''\\ \qquad\qquad\wedge\, n(S_A)=x''+z''\wedge n(S_B)=y''+w''\wedge x''+z''>y''+w''\\ \qquad\qquad\wedge\, P(X_A)=x''/(x''+z'')\wedge P(X_B)=y''/(y''+w'')\wedge x''/(x''+z'')<y''/(y''+w'')]\cdots ⓒ\end{array}}\,(\exists\exists入)$$

$$\dfrac{ⓐ\qquad ⓑ\qquad ⓒ}{\begin{array}{l}(\exists x\exists y\exists z\exists w\,[n(X_A)=x\wedge n(X_B)=y\wedge x>y\\ \qquad\qquad\wedge\, n(Y_A)=z\wedge n(Y_B)=w\wedge z>w\\ \qquad\qquad\wedge\, n(S_A)=x+z\wedge n(S_B)=y+w\wedge x+z>y+w\\ \qquad\qquad\wedge\, P(X_A)=x/(x+z)\wedge P(X_B)=y/(y+w)\wedge x/(x+z)=y/(y+w)])\\ \wedge(\exists x'\exists y'\exists z'\exists w'\,[n(X_A)=x'\wedge n(X_B)=y'\wedge x'>y'\\ \qquad\qquad\wedge\, n(Y_A)=z'\wedge n(Y_B)=w'\wedge z'>w'\\ \qquad\qquad\wedge\, n(S_A)=x'+z'\wedge n(S_B)=y'+w'\wedge x'+z'>y'+w'\\ \qquad\qquad\wedge\, P(X_A)=x'/(x'+z')\wedge P(X_B)=y'/(y'+w')\wedge x'/(x'+z')>y'/(y'+w')])\\ \wedge(\exists x''\exists y''\exists z''\exists w''\,[n(X_A)=x''\wedge n(X_B)=y''\wedge x''>y''\\ \qquad\qquad\wedge\, n(Y_A)=z''\wedge n(Y_B)=w''\wedge z''>w''\\ \qquad\qquad\wedge\, n(S_A)=x''+z''\wedge n(S_B)=y''+w''\wedge x''+z''>y''+w''\\ \qquad\qquad\wedge\, P(X_A)=x''/(x''+z'')\wedge P(X_B)=y''/(y''+w'')\wedge x''/(x''+z'')<y''/(y''+w'')])\end{array}}\,(\wedge\wedge入)$$

くじの総数に対する当たりくじの割合を考えやすくするため，10 の倍数を基に，２つのくじの総数を考えている。また，B_2 と C_2 の条件を満たすように，$n(S_B)=10$ とし，$n(S_B)$の項に×２することにより，$n(S_A)=20$ を考えている。$n(X_B)$と $n(Y_B)$が同数となる $n(X_B)=5$，$n(Y_B)=5$ を基に，$n(X_B)$の項に＋１した分，$n(Y_B)$の項に－１している。また，$n(S_A)=20$ の $n(X_A)$は $n(X_B)$に×２，$n(Y_A)$も $n(Y_B)$に×２している。

(1) $n(X_A)=12,\ n(X_B)=6,\ n(Y_A)=8,\ n(Y_B)=4$

$$\dfrac{\dfrac{n(X_A)=12 \qquad 12>6}{n(X_A)>6}\text{(推移律)} \qquad \dfrac{n(X_B)=6}{6=n(X_B)}\text{(対称律)}}{B_2: n(X_A)>n(X_B)}\text{(推移律)}$$

$$\dfrac{\dfrac{n(Y_A)=8 \qquad 8>4}{n(Y_A)>4}\text{(推移律)} \qquad \dfrac{n(Y_B)=4}{4=n(Y_B)}\text{(対称律)}}{C_2: n(Y_A)>n(Y_B)}\text{(推移律)}$$

$$\dfrac{\text{定理5}: n(S)=n(X)+n(Y) \qquad n(X)=n(X_A) \quad n(Y)=n(Y_A) \quad n(S)=n(S_A)}{n(S_A)=n(X_A)+n(Y_A)}\text{(＝代入)}$$

$$\dfrac{\dfrac{n(S_A)=n(X_A)+n(Y_A) \qquad n(X_A)=12 \quad n(Y_A)=8}{n(S_A)=12+8}\text{(＝代入)}}{n(S_A)=20}\text{(演推)}$$

$$\dfrac{\text{定理5}: n(S)=n(X)+n(Y) \qquad n(X)=n(X_B) \quad n(Y)=n(Y_B) \quad n(S)=n(S_B)}{n(S_B)=n(X_B)+n(Y_B)}\text{(＝代入)}$$

$$\dfrac{\dfrac{n(S_B)=n(X_B)+n(Y_B) \qquad n(X_B)=6 \quad n(Y_B)=4}{n(S_B)=6+4}\text{(＝代入)}}{n(S_B)=10}\text{(演推)}$$

$$\dfrac{\dfrac{n(S_A)=20 \qquad 20>10}{n(S_A)>10}\text{(推移律)} \qquad \dfrac{n(S_B)=10}{10=n(S_B)}\text{(対称律)}}{A_2: n(S_A)>n(S_B)}\text{(推移律)}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{n(X_A)=12 \qquad n(S_A)=12+8}{n(X_A)\div n(S_A)=12\div(12+8)}\text{(＝＝)}}{n(X_A)\div n(S_A)=3/5}\text{(演推)} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{n(X_B)=6 \qquad n(S_B)=6+4}{n(X_B)\div n(S_B)=6\div(6+4)}\text{(＝＝)}}{n(X_B)\div n(S_B)=3/5}\text{(演推)}}{3/5=n(X_B)\div n(S_B)}\text{(対称律)}}{n(X_A)\div n(S_A)=n(X_B)\div n(S_B)}\text{(推移律)}$$

$$\dfrac{\dfrac{\text{定義}: P(Z)=n(Z)\div n(S) \qquad n(Z)=n(X_A) \quad n(S)=n(S_A) \quad P(Z)=P(X_A)}{P(X_A)=n(X_A)\div n(S_A)}\text{(＝代入)}}{n(X_A)\div n(S_A)=P(X_A)}\text{(対称律)}$$

$$\dfrac{\dfrac{\text{定義}: P(Z)=n(Z)\div n(S) \qquad n(Z)=n(X_B) \quad n(S)=n(S_B) \quad P(Z)=P(X_B)}{P(X_B)=n(X_B)\div n(S_B)}\text{(＝代入)}}{n(X_B)\div n(S_B)=P(X_B)}\text{(対称律)}$$

$$\dfrac{n(X_A)\div n(S_A)=n(X_B)\div n(S_B) \qquad n(X_A)\div n(S_A)=P(X_A) \quad n(X_B)\div n(S_B)=P(X_B)}{D_1: P(X_A)=P(X_B)}\text{(＝代入)}$$

D_2 の条件を満たすように，D_1 となる $n(X_A)=12$，$n(X_B)=6$，$n(Y_A)=8$，$n(Y_B)=4$ の条件を基に，$n(Y_B)$ の項に＋２している。

(2) $n(X_A)=12$，$n(X_B)=6$，$n(Y_A)=8$，$n(Y_B)=6$

$$\dfrac{\dfrac{n(X_A)=12 \qquad 12>6}{n(X_A)>6}\text{（推移律）} \qquad \dfrac{n(X_B)=6}{6=n(X_B)}\text{（対称律）}}{B_2: n(X_A)>n(X_B)}\text{（推移律）}$$

$$\dfrac{\dfrac{n(Y_A)=8 \qquad 8>6}{n(Y_A)>6}\text{（推移律）} \qquad \dfrac{n(Y_B)=6}{6=n(Y_B)}\text{（対称律）}}{C_2: n(Y_A)>n(Y_B)}\text{（推移律）}$$

$$\dfrac{\text{定理５：}n(S)=n(X)+n(Y) \qquad n(X)=n(X_A) \quad n(Y)=n(Y_A) \quad n(S)=n(S_A)}{n(S_A)=n(X_A)+n(Y_A)}\text{（＝代入）}$$

$$\dfrac{\dfrac{n(S_A)=n(X_A)+n(Y_A) \qquad n(X_A)=12 \quad n(Y_A)=8}{n(S_A)=12+8}\text{（＝代入）}}{n(S_A)=20}\text{（演推）}$$

$$\dfrac{\text{定理５：}n(S)=n(X)+n(Y) \qquad n(X)=n(X_B) \quad n(Y)=n(Y_B) \quad n(S)=n(S_B)}{n(S_B)=n(X_B)+n(Y_B)}\text{（＝代入）}$$

$$\dfrac{\dfrac{n(S_B)=n(X_B)+n(Y_B) \qquad n(X_B)=6 \quad n(Y_B)=6}{n(S_B)=6+6}\text{（＝代入）}}{n(S_B)=12}\text{（演推）}$$

$$\dfrac{\dfrac{n(S_A)=20 \qquad 20>12}{n(S_A)>12}\text{（推移律）} \qquad \dfrac{n(S_B)=12}{12=n(S_B)}\text{（対称律）}}{A_2: n(S_A)>n(S_B)}\text{（推移律）}$$

$$\dfrac{\dfrac{n(X_A)=12 \qquad n(S_A)=12+8}{n(X_A)\div n(S_A)=12\div(12+8)}\text{（＝＝）}}{n(X_A)\div n(S_A)=3/5}\text{（演推）}$$

$$\dfrac{\dfrac{n(X_A)\div n(S_A)=3/5 \qquad 3/5>1/2}{n(X_A)\div n(S_A)>1/2}\text{（推移律）} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{n(X_B)=6 \qquad n(S_B)=6+6}{n(X_B)\div n(S_B)=6\div(6+6)}\text{（＝＝）}}{n(X_B)\div n(S_B)=1/2}\text{（演推）}}{1/2=n(X_B)\div n(S_B)}\text{（対称律）}}{n(X_A)\div n(S_A)>n(X_B)\div n(S_B)}\text{（推移律）}$$

$$\dfrac{\dfrac{\text{定義：}P(Z)=n(Z)\div n(S) \qquad n(Z)=n(X_A) \quad n(S)=n(S_A) \quad P(Z)=P(X_A)}{P(X_A)=n(X_A)\div n(S_A)}\text{（＝代入）}}{n(X_A)\div n(S_A)=P(X_A)}\text{（対称律）}$$

$$\dfrac{\dfrac{\text{定義：}P(Z)=n(Z)\div n(S) \qquad n(Z)=n(X_B) \quad n(S)=n(S_B) \quad P(Z)=P(X_B)}{P(X_B)=n(X_B)\div n(S_B)}\text{（＝代入）}}{n(X_B)\div n(S_B)=P(X_B)}\text{（対称律）}$$

$$\dfrac{\mathbf{n(X_A)\div n(S_A)>n(X_B)\div n(S_B)} \qquad n(X_A)\div n(S_A)=P(X_A) \quad n(X_B)\div n(S_B)=P(X_B)}{D_2\ :P(X_A)>P(X_B)}\text{（＝代入）}$$

D_3 の条件を満たすように，D_1 となる $n(X_A)=12$，$n(X_B)=6$，$n(Y_A)=8$，$n(Y_B)=4$ の条件を基に，$n(X_B)$ の項に＋４している。

(3) $n(X_A)=12$，$n(X_B)=10$，$n(Y_A)=8$，$n(Y_B)=4$

$$\dfrac{\dfrac{n(X_A)=12 \qquad 12>10}{n(X_A)>10}\text{（推移律）} \qquad \dfrac{n(X_B)=10}{10=n(X_B)}\text{（対称律）}}{B_2 : n(X_A)>n(X_B)}\text{（推移律）}$$

$$\dfrac{\dfrac{n(Y_A)=8 \qquad 8>4}{n(Y_A)>4}\text{（推移律）} \qquad \dfrac{n(Y_B)=4}{4=n(Y_B)}\text{（対称律）}}{C_2 : n(Y_A)>n(Y_B)}\text{（推移律）}$$

$$\dfrac{\text{定理５：}n(S)=n(X)+n(Y) \qquad n(X)=n(X_A) \quad n(Y)=n(Y_A) \quad n(S)=n(S_A)}{n(S_A)=n(X_A)+n(Y_A)}\text{（＝代入）}$$

$$\dfrac{\dfrac{n(S_A)=n(X_A)+n(Y_A) \qquad n(X_A)=12 \quad n(Y_A)=8}{n(S_A)=12+8}\text{（＝代入）}}{n(S_A)=20}\text{（演推）}$$

$$\dfrac{\text{定理５：}n(S)=n(X)+n(Y) \qquad n(X)=n(X_B) \quad n(Y)=n(Y_B) \quad n(S)=n(S_B)}{n(S_B)=n(X_B)+n(Y_B)}\text{（＝代入）}$$

$$\dfrac{\dfrac{n(S_B)=n(X_B)+n(Y_B) \qquad n(X_B)=10 \quad n(Y_B)=4}{n(S_B)=10+4}\text{（＝代入）}}{n(S_B)=14}\text{（演推）}$$

$$\dfrac{\dfrac{n(S_A)=20 \qquad 20>14}{n(S_A)>14}\text{（推移律）} \qquad \dfrac{n(S_B)=14}{14=n(S_B)}\text{（対称律）}}{A_2 : n(S_A)>n(S_B)}\text{（推移律）}$$

$$\dfrac{\dfrac{n(X_A)=12 \qquad n(S_A)=12+8}{n(X_A)\div n(S_A)=12\div(12+8)}\text{（＝＝）}}{n(X_A)\div n(S_A)=3/5}\text{（演推）}$$

$$\dfrac{n(X_B)=10 \qquad n(S_B)=10+4}{\dfrac{n(X_B)\div n(S_B)=10\div(10+4)}{}} \;(==)\;(演推)$$

$$\dfrac{\dfrac{n(X_A)\div n(S_A)=3/5 \qquad 3/5<5/7}{n(X_A)\div n(S_A)<5/7}\;(推移律) \qquad \dfrac{n(X_B)\div n(S_B)=5/7}{5/7=n(X_B)\div n(S_B)}\;(対称律)}{n(X_A)\div n(S_A)<n(X_B)\div n(S_B)}\;(推移律)$$

$$\dfrac{\dfrac{定義:P(Z)=n(Z)\div n(S) \qquad n(Z)=n(X_A) \quad n(S)=n(S_A) \quad P(Z)=P(X_A)}{P(X_A)=n(X_A)\div n(S_A)}\;(=代入)}{n(X_A)\div n(S_A)=P(X_A)}\;(対称律)$$

$$\dfrac{\dfrac{定義:P(Z)=n(Z)\div n(S) \qquad n(Z)=n(X_B) \quad n(S)=n(S_B) \quad P(Z)=P(X_B)}{P(X_B)=n(X_B)\div n(S_B)}\;(=代入)}{n(X_B)\div n(S_B)=P(X_B)}\;(対称律)$$

$$\dfrac{n(X_A)\div n(S_A)<n(X_B)\div n(S_B) \qquad n(X_A)\div n(S_A)=P(X_A) \quad n(X_B)\div n(S_B)=P(X_B)}{D_3\ :P(X_A)<P(X_B)}\;(=代入)$$

付録４　割合に関する概念的知識の「比較量に関する状況」の調査問題の証明

【問題１】

仮定の候補	定理	結論
A_1 C_3 D_2	（Ⅰ）$A_1 \wedge D_2 \rightarrow C_3$ （Ⅱ）$A_1 \wedge C_3 \rightarrow D_2$	B_2

証明

（Ⅰ）は第３章の「3.2.2　比較量に関する状況」を参照。

（Ⅱ）

$$\frac{C_3 : \mathrm{n}(\mathrm{Y_A}) < \mathrm{n}(\mathrm{Y_B}) \qquad A_1 : \mathrm{n}(\mathrm{S_A}) = \mathrm{n}(\mathrm{S_B})}{\mathrm{n}(\mathrm{Y_A}) \div \mathrm{n}(\mathrm{S_A}) < \mathrm{n}(\mathrm{Y_B}) \div \mathrm{n}(\mathrm{S_B})}\ （>=１）$$

$$\cfrac{\cfrac{定義：\mathrm{P}(\mathrm{Z}) = \mathrm{n}(\mathrm{Z}) \div \mathrm{n}(\mathrm{S}) \qquad \mathrm{n}(\mathrm{Z}) = \mathrm{n}(\mathrm{Y_A}) \quad \mathrm{n}(\mathrm{S}) = \mathrm{n}(\mathrm{S_A}) \quad \mathrm{P}(\mathrm{Z}) = \mathrm{P}(\mathrm{Y_A})}{\mathrm{P}(\mathrm{Y_A}) = \mathrm{n}(\mathrm{Y_A}) \div \mathrm{n}(\mathrm{S_A})}\ （=代入）}{\mathrm{n}(\mathrm{Y_A}) \div \mathrm{n}(\mathrm{S_A}) = \mathrm{P}(\mathrm{Y_A})}\ （対称律）$$

$$\cfrac{\cfrac{定義：\mathrm{P}(\mathrm{Z}) = \mathrm{n}(\mathrm{Z}) \div \mathrm{n}(\mathrm{S}) \qquad \mathrm{n}(\mathrm{Z}) = \mathrm{n}(\mathrm{Y_B}) \quad \mathrm{n}(\mathrm{S}) = \mathrm{n}(\mathrm{S_B}) \quad \mathrm{P}(\mathrm{Z}) = \mathrm{P}(\mathrm{Y_B})}{\mathrm{P}(\mathrm{Y_B}) = \mathrm{n}(\mathrm{Y_B}) \div \mathrm{n}(\mathrm{S_B})}\ （=代入）}{\mathrm{n}(\mathrm{Y_B}) \div \mathrm{n}(\mathrm{S_B}) = \mathrm{P}(\mathrm{Y_B})}\ （対称律）$$

$$\frac{\mathrm{n}(\mathrm{Y_A}) \div \mathrm{n}(\mathrm{S_A}) < \mathrm{n}(\mathrm{Y_B}) \div \mathrm{n}(\mathrm{S_B}) \quad \mathrm{n}(\mathrm{Y_A}) \div \mathrm{n}(\mathrm{S_A}) = \mathrm{P}(\mathrm{Y_A}) \quad \mathrm{n}(\mathrm{Y_B}) \div \mathrm{n}(\mathrm{S_B}) = \mathrm{P}(\mathrm{Y_B})}{E_3 : \mathrm{P}(\mathrm{Y_A}) < \mathrm{P}(\mathrm{Y_B})}\ （=代入）$$

$$\frac{1 = 1 \qquad E_3 : \mathrm{P}(\mathrm{Y_A}) < \mathrm{P}(\mathrm{Y_B})}{1 - \mathrm{P}(\mathrm{Y_A}) > 1 - \mathrm{P}(\mathrm{Y_B})}\ （>=２）$$

$$\cfrac{\cfrac{定理２：\mathrm{P}(\mathrm{X}) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{Y}) \qquad \mathrm{P}(\mathrm{X}) = \mathrm{P}(\mathrm{X_A}) \quad \mathrm{P}(\mathrm{Y}) = \mathrm{P}(\mathrm{Y_A})}{\mathrm{P}(\mathrm{X_A}) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{Y_A})}\ （=代入）}{1 - \mathrm{P}(\mathrm{Y_A}) = \mathrm{P}(\mathrm{X_A})}\ （対称律）$$

$$\cfrac{\cfrac{定理２：\mathrm{P}(\mathrm{X}) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{Y}) \qquad \mathrm{P}(\mathrm{X}) = \mathrm{P}(\mathrm{X_B}) \quad \mathrm{P}(\mathrm{Y}) = \mathrm{P}(\mathrm{Y_B})}{\mathrm{P}(\mathrm{X_B}) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{Y_B})}\ （=代入）}{1 - \mathrm{P}(\mathrm{Y_B}) = \mathrm{P}(\mathrm{X_B})}\ （対称律）$$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{1 - \mathrm{P}(\mathrm{Y_A}) > 1 - \mathrm{P}(\mathrm{Y_B}) \qquad 1 - \mathrm{P}(\mathrm{Y_A}) = \mathrm{P}(\mathrm{X_A}) \quad 1 - \mathrm{P}(\mathrm{Y_B}) = \mathrm{P}(\mathrm{X_B})}{D_2 : \mathrm{P}(\mathrm{X_A}) > \mathrm{P}(\mathrm{X_B})}\ （=代入）}{C_3 \rightarrow D_2}\ （\rightarrow入）}{A_1 \rightarrow (C_3 \rightarrow D_2)}\ （\rightarrow入）}{A_1 \wedge C_3 \rightarrow D_2}\ （移入）$$

仮定の候補の内，矛盾した条件はない。A_1 と C_3 を仮定する場合，D_2 は仮定として必要ない。

（Ⅱ）

$$\frac{A_1 : \mathrm{n}(\mathrm{S_A}) = \mathrm{n}(\mathrm{S_B}) \qquad C_3 : \mathrm{n}(\mathrm{Y_A}) < \mathrm{n}(\mathrm{Y_B})}{\mathrm{n}(\mathrm{S_A}) - \mathrm{n}(\mathrm{Y_A}) > \mathrm{n}(\mathrm{S_B}) - \mathrm{n}(\mathrm{Y_B})} \ (>=2)$$

$$\cfrac{\text{定理７}: \mathrm{n}(\mathrm{X}) = \mathrm{n}(\mathrm{S}) - \mathrm{n}(\mathrm{Y}) \qquad \mathrm{n}(\mathrm{X}) = \mathrm{n}(\mathrm{X_A}) \quad \mathrm{n}(\mathrm{Y}) = \mathrm{n}(\mathrm{Y_A}) \quad \mathrm{n}(\mathrm{S}) = \mathrm{n}(\mathrm{S_A})}{\cfrac{\mathrm{n}(\mathrm{X_A}) = \mathrm{n}(\mathrm{S_A}) - \mathrm{n}(\mathrm{Y_A})}{\mathrm{n}(\mathrm{S_A}) - \mathrm{n}(\mathrm{Y_A}) = \mathrm{n}(\mathrm{X_A})} \ (\text{対称律})} \ (=\text{代入})$$

$$\cfrac{\text{定理７}: \mathrm{n}(\mathrm{X}) = \mathrm{n}(\mathrm{S}) - \mathrm{n}(\mathrm{Y}) \qquad \mathrm{n}(\mathrm{X}) = \mathrm{n}(\mathrm{X_B}) \quad \mathrm{n}(\mathrm{Y}) = \mathrm{n}(\mathrm{Y_B}) \quad \mathrm{n}(\mathrm{S}) = \mathrm{n}(\mathrm{S_B})}{\cfrac{\mathrm{n}(\mathrm{X_B}) = \mathrm{n}(\mathrm{S_B}) - \mathrm{n}(\mathrm{Y_B})}{\mathrm{n}(\mathrm{S_B}) - \mathrm{n}(\mathrm{Y_B}) = \mathrm{n}(\mathrm{X_B})} \ (\text{対称律})} \ (=\text{代入})$$

$$\frac{\mathrm{n}(\mathrm{S_A}) - \mathrm{n}(\mathrm{Y_A}) > \mathrm{n}(\mathrm{S_B}) - \mathrm{n}(\mathrm{Y_B}) \qquad \mathrm{n}(\mathrm{S_A}) - \mathrm{n}(\mathrm{Y_A}) = \mathrm{n}(\mathrm{X_A}) \quad \mathrm{n}(\mathrm{S_B}) - \mathrm{n}(\mathrm{Y_B}) = \mathrm{n}(\mathrm{X_B})}{B_2 : \mathrm{n}(\mathrm{X_A}) > \mathrm{n}(\mathrm{X_B})} \ (=\text{代入})$$

A_1 と C_3 を仮定し，結論として証明されるのは，B_2 である。

【問題２】

仮定の候補	定理	結論
A_1 C_1 D_1	（Ⅰ）$A_1 \wedge D_1 \to C_1$ （Ⅱ）$A_1 \wedge C_1 \to D_1$	B_1

証明

（Ⅰ）

$$\frac{A_1 : \mathrm{n}(\mathrm{S_A}) = \mathrm{n}(\mathrm{S_B}) \qquad D_1 : \mathrm{P}(\mathrm{X_A}) = \mathrm{P}(\mathrm{X_B})}{\mathrm{n}(\mathrm{S_A}) \times \mathrm{P}(\mathrm{X_A}) = \mathrm{n}(\mathrm{S_B}) \times \mathrm{P}(\mathrm{X_B})} \ (==)$$

$$\frac{\text{定理３}: \mathrm{n}(\mathrm{Z}) = \mathrm{n}(\mathrm{S}) \times \mathrm{P}(\mathrm{Z}) \qquad \mathrm{n}(\mathrm{Z}) = \mathrm{n}(\mathrm{X_A}) \quad \mathrm{n}(\mathrm{S}) = \mathrm{n}(\mathrm{S_A}) \quad \mathrm{P}(\mathrm{Z}) = \mathrm{P}(\mathrm{X_A})}{\mathrm{n}(\mathrm{X_A}) = \mathrm{n}(\mathrm{S_A}) \times \mathrm{P}(\mathrm{X_A})} \ (=\text{代入})$$

$$\frac{\text{定理３}: \mathrm{n}(\mathrm{Z}) = \mathrm{n}(\mathrm{S}) \times \mathrm{P}(\mathrm{Z}) \qquad \mathrm{n}(\mathrm{Z}) = \mathrm{n}(\mathrm{X_B}) \quad \mathrm{n}(\mathrm{S}) = \mathrm{n}(\mathrm{S_B}) \quad \mathrm{P}(\mathrm{Z}) = \mathrm{P}(\mathrm{X_B})}{\mathrm{n}(\mathrm{X_B}) = \mathrm{n}(\mathrm{S_B}) \times \mathrm{P}(\mathrm{X_B})} \ (=\text{代入})$$

$$\frac{\mathrm{n}(\mathrm{S_A}) \times \mathrm{P}(\mathrm{X_A}) = \mathrm{n}(\mathrm{S_B}) \times \mathrm{P}(\mathrm{X_B}) \qquad \mathrm{n}(\mathrm{S_A}) \times \mathrm{P}(\mathrm{X_A}) = \mathrm{n}(\mathrm{X_A}) \quad \mathrm{n}(\mathrm{S_B}) \times \mathrm{P}(\mathrm{X_B}) = \mathrm{n}(\mathrm{X_B})}{B_1 : \mathrm{n}(\mathrm{X_A}) = \mathrm{n}(\mathrm{X_B})} \ (=\text{代入})$$

$$\frac{A_1 : \mathrm{n}(\mathrm{S_A}) = \mathrm{n}(\mathrm{S_B}) \qquad B_1 : \mathrm{n}(\mathrm{X_A}) = \mathrm{n}(\mathrm{X_B})}{\mathrm{n}(\mathrm{S_A}) - \mathrm{n}(\mathrm{X_A}) = \mathrm{n}(\mathrm{S_B}) - \mathrm{n}(\mathrm{X_B})} \ (==)$$

$$\cfrac{\text{定理６}: \mathrm{n}(\mathrm{Y}) = \mathrm{n}(\mathrm{S}) - \mathrm{n}(\mathrm{X}) \qquad \mathrm{n}(\mathrm{X}) = \mathrm{n}(\mathrm{X_A}) \quad \mathrm{n}(\mathrm{Y}) = \mathrm{n}(\mathrm{Y_A}) \quad \mathrm{n}(\mathrm{S}) = \mathrm{n}(\mathrm{S_A})}{\cfrac{\mathrm{n}(\mathrm{Y_A}) = \mathrm{n}(\mathrm{S_A}) - \mathrm{n}(\mathrm{X_A})}{\mathrm{n}(\mathrm{S_A}) - \mathrm{n}(\mathrm{X_A}) = \mathrm{n}(\mathrm{Y_A})} \ (\text{対称律})} \ (=\text{代入})$$

$$\cfrac{\text{定理６}: \mathrm{n}(\mathrm{Y}) = \mathrm{n}(\mathrm{S}) - \mathrm{n}(\mathrm{X}) \qquad \mathrm{n}(\mathrm{X}) = \mathrm{n}(\mathrm{X_B}) \quad \mathrm{n}(\mathrm{Y}) = \mathrm{n}(\mathrm{Y_B}) \quad \mathrm{n}(\mathrm{S}) = \mathrm{n}(\mathrm{S_B})}{\cfrac{\mathrm{n}(\mathrm{Y_B}) = \mathrm{n}(\mathrm{S_B}) - \mathrm{n}(\mathrm{X_B})}{\mathrm{n}(\mathrm{S_B}) - \mathrm{n}(\mathrm{X_B}) = \mathrm{n}(\mathrm{Y_B})} \ (\text{対称律})} \ (=\text{代入})$$

$$\frac{n(S_A)-n(X_A)=n(S_B)-n(X_B) \qquad n(S_A)-n(X_A)=n(Y_A) \quad n(S_B)-n(X_B)=n(Y_B)}{\dfrac{C_1:n(Y_A)=n(Y_B)}{\dfrac{D_1\to C_1}{\dfrac{A_1\to(D_1\to C_1)}{A_1\wedge D_1\to C_1}\text{（移入）}}\text{（→入）}}\text{（→入）}}\text{（＝代入）}$$

仮定の候補の内，矛盾した条件はない。A_1 と D_1 を仮定する場合，C_1 は仮定として必要ない。

（Ⅰ） $$\frac{A_1:n(S_A)=n(S_B) \qquad D_1:P(X_A)=P(X_B)}{n(S_A)\times P(X_A)=n(S_B)\times P(X_B)}\text{（＝＝）}$$

$$\frac{\text{定理３}:n(Z)=n(S)\times P(Z) \qquad n(Z)=n(X_A) \quad n(S)=n(S_A) \quad P(Z)=P(X_A)}{\dfrac{n(X_A)=n(S_A)\times P(X_A)}{n(S_A)\times P(X_A)=n(X_A)}\text{（対称律）}}\text{（＝代入）}$$

$$\frac{\text{定理３}:n(Z)=n(S)\times P(Z) \qquad n(Z)=n(X_B) \quad n(S)=n(S_B) \quad P(Z)=P(X_B)}{\dfrac{n(X_B)=n(S_B)\times P(X_B)}{n(S_B)\times P(X_B)=n(X_B)}\text{（対称律）}}\text{（＝代入）}$$

$$\frac{n(S_A)\times P(X_A)=n(S_B)\times P(X_B) \qquad n(S_A)\times P(X_A)=n(X_A) \quad n(S_B)\times P(X_B)=n(X_B)}{B_1:n(X_A)=n(X_B)}\text{（＝代入）}$$

A_1 と D_1 を仮定し，結論として証明されるのは，B_1 である。

（Ⅱ） $$\frac{C_1:n(Y_A)=n(Y_B) \qquad A_1:n(S_A)=n(S_B)}{n(Y_A)\div n(S_A)=n(Y_B)\div n(S_B)}\text{（＝＝）}$$

$$\frac{\text{定義}:P(Z)=n(Z)\div n(S) \qquad n(Z)=n(Y_A) \quad n(S)=n(S_A) \quad P(Z)=P(Y_A)}{\dfrac{P(Y_A)=n(Y_A)\div n(S_A)}{n(Y_A)\div n(S_A)=P(Y_A)}\text{（対称律）}}\text{（＝代入）}$$

$$\frac{\text{定義}:P(Z)=n(Z)\div n(S) \qquad n(Z)=n(Y_B) \quad n(S)=n(S_B) \quad P(Z)=P(Y_B)}{\dfrac{P(Y_B)=n(Y_B)\div n(S_B)}{n(Y_B)\div n(S_B)=P(Y_B)}\text{（対称律）}}\text{（＝代入）}$$

$$\frac{n(Y_A)\div n(S_A)=n(Y_B)\div n(S_B) \qquad n(Y_A)\div n(S_A)=P(Y_A) \quad n(Y_B)\div n(S_B)=P(Y_B)}{E_1:P(Y_A)=P(Y_B)}\text{（＝代入）}$$

$$\frac{1=1 \qquad E_1:P(Y_A)=P(Y_B)}{1-P(Y_A)=1-P(Y_B)}\text{（＝＝）}$$

$$\frac{\text{定理２}:P(X)=1-P(Y) \qquad P(X)=P(X_A) \quad P(Y)=P(Y_A)}{\dfrac{P(X_A)=1-P(Y_A)}{1-P(Y_A)=P(X_A)}\text{（対称律）}}\text{（＝代入）}$$

$$\frac{\text{定理2：}\mathrm{P}(\mathrm{X})=1-\mathrm{P}(\mathrm{Y})\qquad \mathrm{P}(\mathrm{X})=\mathrm{P}(\mathrm{X_B})\quad \mathrm{P}(\mathrm{Y})=\mathrm{P}(\mathrm{Y_B})}{\mathrm{P}(\mathrm{X_B})=1-\mathrm{P}(\mathrm{Y_B})}\;(=\text{代入})$$

$$\frac{\mathrm{P}(\mathrm{X_B})=1-\mathrm{P}(\mathrm{Y_B})}{1-\mathrm{P}(\mathrm{Y_B})=\mathrm{P}(\mathrm{X_B})}\;(\text{対称律})$$

$$\frac{1-\mathrm{P}(\mathrm{Y_A})=1-\mathrm{P}(\mathrm{Y_B})\qquad 1-\mathrm{P}(\mathrm{Y_A})=\mathrm{P}(\mathrm{X_A})\quad 1-\mathrm{P}(\mathrm{Y_B})=\mathrm{P}(\mathrm{X_B})}{D_1:\mathrm{P}(\mathrm{X_A})=\mathrm{P}(\mathrm{X_B})}\;(=\text{代入})$$

$$\frac{D_1:\mathrm{P}(\mathrm{X_A})=\mathrm{P}(\mathrm{X_B})}{C_1\to D_1}\;(\to\text{入})$$

$$\frac{C_1\to D_1}{A_1\to(C_1\to D_1)}\;(\to\text{入})$$

$$\frac{A_1\to(C_1\to D_1)}{A_1\land C_1\to D_1}\;(\text{移入})$$

仮定の候補の内，矛盾した条件はない。A_1 と C_1 を仮定する場合，D_1 は仮定として必要ない。

（Ⅱ）
$$\frac{A_1:\mathrm{n}(\mathrm{S_A})=\mathrm{n}(\mathrm{S_B})\qquad C_1:\mathrm{n}(\mathrm{Y_A})=\mathrm{n}(\mathrm{Y_B})}{\mathrm{n}(\mathrm{S_A})-\mathrm{n}(\mathrm{Y_A})=\mathrm{n}(\mathrm{S_B})-\mathrm{n}(\mathrm{Y_B})}\;(==)$$

$$\frac{\text{定理7：}\mathrm{n}(\mathrm{X})=\mathrm{n}(\mathrm{S})-\mathrm{n}(\mathrm{Y})\qquad \mathrm{n}(\mathrm{X})=\mathrm{n}(\mathrm{X_A})\quad \mathrm{n}(\mathrm{Y})=\mathrm{n}(\mathrm{Y_A})\quad \mathrm{n}(\mathrm{S})=\mathrm{n}(\mathrm{S_A})}{\mathrm{n}(\mathrm{X_A})=\mathrm{n}(\mathrm{S_A})-\mathrm{n}(\mathrm{Y_A})}\;(=\text{代入})$$

$$\frac{\mathrm{n}(\mathrm{X_A})=\mathrm{n}(\mathrm{S_A})-\mathrm{n}(\mathrm{Y_A})}{\mathrm{n}(\mathrm{S_A})-\mathrm{n}(\mathrm{Y_A})=\mathrm{n}(\mathrm{X_A})}\;(\text{対称律})$$

$$\frac{\text{定理7：}\mathrm{n}(\mathrm{X})=\mathrm{n}(\mathrm{S})-\mathrm{n}(\mathrm{Y})\qquad \mathrm{n}(\mathrm{X})=\mathrm{n}(\mathrm{X_B})\quad \mathrm{n}(\mathrm{Y})=\mathrm{n}(\mathrm{Y_B})\quad \mathrm{n}(\mathrm{S})=\mathrm{n}(\mathrm{S_B})}{\mathrm{n}(\mathrm{X_B})=\mathrm{n}(\mathrm{S_B})-\mathrm{n}(\mathrm{Y_B})}\;(=\text{代入})$$

$$\frac{\mathrm{n}(\mathrm{X_B})=\mathrm{n}(\mathrm{S_B})-\mathrm{n}(\mathrm{Y_B})}{\mathrm{n}(\mathrm{S_B})-\mathrm{n}(\mathrm{Y_B})=\mathrm{n}(\mathrm{X_B})}\;(\text{対称律})$$

$$\frac{\mathrm{n}(\mathrm{S_A})-\mathrm{n}(\mathrm{Y_A})=\mathrm{n}(\mathrm{S_B})-\mathrm{n}(\mathrm{Y_B})\qquad \mathrm{n}(\mathrm{S_A})-\mathrm{n}(\mathrm{Y_A})=\mathrm{n}(\mathrm{X_A})\quad \mathrm{n}(\mathrm{S_B})-\mathrm{n}(\mathrm{Y_B})=\mathrm{n}(\mathrm{X_B})}{B_1:\mathrm{n}(\mathrm{X_A})=\mathrm{n}(\mathrm{X_B})}\;(=\text{代入})$$

A_1 と C_1 を仮定し，結論として証明されるのは，B_1 である。

【問題４】

仮定の候補	定理	結論
$\neg A_1$ C_2 D_2	$C_2\land D_2\to\neg A_1$	B_2

証明

$$\frac{1=1\qquad D_2:\mathrm{P}(\mathrm{X_A})>\mathrm{P}(\mathrm{X_B})}{1-\mathrm{P}(\mathrm{X_A})<1-\mathrm{P}(\mathrm{X_B})}\;(>=2)$$

$$\frac{\text{定理1：}\mathrm{P}(\mathrm{Y})=1-\mathrm{P}(\mathrm{X})\qquad \mathrm{P}(\mathrm{X})=\mathrm{P}(\mathrm{X_A})\quad \mathrm{P}(\mathrm{Y})=\mathrm{P}(\mathrm{Y_A})}{\mathrm{P}(\mathrm{Y_A})=1-\mathrm{P}(\mathrm{X_A})}\;(=\text{代入})$$

$$\frac{\mathrm{P}(\mathrm{Y_A})=1-\mathrm{P}(\mathrm{X_A})}{1-\mathrm{P}(\mathrm{X_A})=\mathrm{P}(\mathrm{Y_A})}\;(\text{対称律})$$

$$\frac{\text{定理1：}\mathrm{P}(\mathrm{Y})=1-\mathrm{P}(\mathrm{X})\qquad \mathrm{P}(\mathrm{X})=\mathrm{P}(\mathrm{X_B})\quad \mathrm{P}(\mathrm{Y})=\mathrm{P}(\mathrm{Y_B})}{\mathrm{P}(\mathrm{Y_B})=1-\mathrm{P}(\mathrm{X_B})}\;(=\text{代入})$$

$$\frac{\mathrm{P}(\mathrm{Y_B})=1-\mathrm{P}(\mathrm{X_B})}{1-\mathrm{P}(\mathrm{X_B})=\mathrm{P}(\mathrm{Y_B})}\;(\text{対称律})$$

$$\dfrac{1-P(X_A)<1-P(X_B)\qquad 1-P(X_A)=P(Y_A)\quad 1-P(X_B)=P(Y_B)}{E_3: P(Y_A)<P(Y_B)}\ (=\text{代入})$$

$$\dfrac{C_2: n(Y_A)>n(Y_B)\qquad \dfrac{E_3\ : P(Y_A)<P(Y_B)}{P(Y_B)>P(Y_A)}\ (<>)}{n(Y_A)\div P(Y_A)>n(Y_B)\div P(Y_B)}\ (>>2)$$

$$\cfrac{\dfrac{\text{定理4}: n(S)=n(Z)\div P(Z)\qquad n(Z)=n(Y_A)\quad n(S)=n(S_A)\quad P(Z)=P(Y_A)}{n(S_A)=n(Y_A)\div P(Y_A)}\ (=\text{代入})}{n(Y_A)\div P(Y_A)=n(S_A)}\ (\text{対称律})$$

$$\cfrac{\dfrac{\text{定理4}: n(S)=n(Z)\div P(Z)\qquad n(Z)=n(Y_B)\quad n(S)=n(S_B)\quad P(Z)=P(Y_B)}{n(S_B)=n(Y_B)\div P(Y_B)}\ (=\text{代入})}{n(Y_B)\div P(Y_B)=n(S_B)}\ (\text{対称律})$$

$$\dfrac{n(Y_A)\div P(Y_A)>n(Y_B)\div P(Y_B)\qquad n(Y_A)\div P(Y_A)=n(S_A)\quad n(Y_B)\div P(Y_B)=n(S_B)}{A_2: n(S_A)>n(S_B)}\ (=\text{代入})$$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{A_2: n(S_A)>n(S_B)}{D_2\rightarrow A_2}\ (\rightarrow\text{入})}{C_2\rightarrow(D_2\rightarrow A_2)}\ (\rightarrow\text{入})}{C_2\wedge D_2\rightarrow A_2}\ (\text{移入})}{C_2\wedge D_2\rightarrow A_2\vee A_3}\ (\vee\text{入})\qquad \cfrac{\cfrac{\neg A_1\equiv A_2\ \underline{\vee}\ A_3}{\neg A_1\equiv A_2\vee A_3}\ (\underline{\vee}\rightarrow\vee)}{A_2\vee A_3\rightarrow\neg A_1}\ (\equiv\text{除})}{C_2\wedge D_2\rightarrow\neg A_1}\ (\text{推移})$$

仮定の候補の内，矛盾した条件はない。C_2 と D_2 を仮定する場合，$\neg A_1$ は仮定として必要ない。

$$\dfrac{1=1\qquad D_2: P(X_A)>P(X_B)}{1-P(X_A)<1-P(X_B)}\ (>=2)$$

$$\cfrac{\dfrac{\text{定理1}: P(Y)=1-P(X)\qquad P(X)=P(X_A)\quad P(Y)=P(Y_A)}{P(Y_A)=1-P(X_A)}\ (=\text{代入})}{1-P(X_A)=P(Y_A)}\ (\text{対称律})$$

$$\cfrac{\dfrac{\text{定理1}: P(Y)=1-P(X)\qquad P(X)=P(X_B)\quad P(Y)=P(Y_B)}{P(Y_B)=1-P(X_B)}\ (=\text{代入})}{1-P(X_B)=P(Y_B)}\ (\text{対称律})$$

$$\dfrac{1-P(X_A)<1-P(X_B)\qquad 1-P(X_A)=P(Y_A)\quad 1-P(X_B)=P(Y_B)}{E_3: P(Y_A)<P(Y_B)}\ (=\text{代入})$$

$$\dfrac{C_2: n(Y_A)>n(Y_B)\qquad \dfrac{E_3\ : P(Y_A)<P(Y_B)}{P(Y_B)>P(Y_A)}\ (<>)}{n(Y_A)\div P(Y_A)>n(Y_B)\div P(Y_B)}\ (>>2)$$

$$\cfrac{\dfrac{\text{定理4}: n(S)=n(Z)\div P(Z)\qquad n(Z)=n(Y_A)\quad n(S)=n(S_A)\quad P(Z)=P(Y_A)}{n(S_A)=n(Y_A)\div P(Y_A)}\ (=\text{代入})}{n(Y_A)\div P(Y_A)=n(S_A)}\ (\text{対称律})$$

$$\cfrac{\cfrac{\text{定理4}: n(S) = n(Z) \div P(Z) \qquad n(Z) = n(Y_B) \quad n(S) = n(S_B) \quad P(Z) = P(Y_B)}{n(S_B) = n(Y_B) \div P(Y_B)}\ (\text{=代入})}{n(Y_B) \div P(Y_B) = n(S_B)}\ (\text{対称律})$$

$$\frac{n(Y_A) \div P(Y_A) > n(Y_B) \div P(Y_B) \qquad n(Y_A) \div P(Y_A) = n(S_A) \quad n(Y_B) \div P(Y_B) = n(S_B)}{A_2 : n(S_A) > n(S_B)}\ (\text{=代入})$$

$$\frac{A_2 : n(S_A) > n(S_B) \qquad D_2 : P(X_A) > P(X_B)}{n(S_A) \times P(X_A) > n(S_B) \times P(X_B)}\ (>>1)$$

$$\cfrac{\cfrac{\text{定理3}: n(Z) = n(S) \times P(Z) \qquad n(Z) = n(X_A) \quad n(S) = n(S_A) \quad P(Z) = P(X_A)}{n(X_A) = n(S_A) \times P(X_A)}\ (\text{=代入})}{n(S_A) \times P(X_A) = n(X_A)}\ (\text{対称律})$$

$$\cfrac{\cfrac{\text{定理3}: n(Z) = n(S) \times P(Z) \qquad n(Z) = n(X_B) \quad n(S) = n(S_B) \quad P(Z) = P(X_B)}{n(X_B) = n(S_B) \times P(X_B)}\ (\text{=代入})}{n(S_B) \times P(X_B) = n(X_B)}\ (\text{対称律})$$

$$\frac{n(S_A) \times P(X_A) > n(S_B) \times P(X_B) \qquad n(S_A) \times P(X_A) = n(X_A) \quad n(S_B) \times P(X_B) = n(X_B)}{B_2 : n(X_A) > n(X_B)}\ (\text{=代入})$$

C_2 と D_2 を仮定し，結論として証明されるのは，B_2 である。

【問題５】

仮定の候補	定理	結論
$\neg A_1$ C_2 D_1	$C_2 \wedge D_1 \to \neg A_1$	B_2

証明

$$\frac{1 = 1 \qquad D_1 : P(X_A) = P(X_B)}{1 - P(X_A) = 1 - P(X_B)}\ (==)$$

$$\cfrac{\cfrac{\text{定理1}: P(Y) = 1 - P(X) \qquad P(X) = P(X_A) \quad P(Y) = P(Y_A)}{P(Y_A) = 1 - P(X_A)}\ (\text{=代入})}{1 - P(X_A) = P(Y_A)}\ (\text{対称律})$$

$$\cfrac{\cfrac{\text{定理1}: P(Y) = 1 - P(X) \qquad P(X) = P(X_B) \quad P(Y) = P(Y_B)}{P(Y_B) = 1 - P(X_B)}\ (\text{=代入})}{1 - P(X_B) = P(Y_B)}\ (\text{対称律})$$

$$\frac{1 - P(X_A) = 1 - P(X_B) \qquad 1 - P(X_A) = P(Y_A) \quad 1 - P(X_B) = P(Y_B)}{E_1 : P(Y_A) = P(Y_B)}\ (\text{=代入})$$

$$\frac{C_2 : n(Y_A) > n(Y_B) \qquad E_1 : P(Y_A) = P(Y_B)}{n(Y_A) \div P(Y_A) > n(Y_B) \div P(Y_B)}\ (>=1)$$

$$\dfrac{\dfrac{\text{定理４：}n(S)=n(Z)\div P(Z)\qquad n(Z)=n(Y_A)\quad n(S)=n(S_A)\quad P(Z)=P(Y_A)}{n(S_A)=n(Y_A)\div P(Y_A)}\ (=\text{代入})}{n(Y_A)\div P(Y_A)=n(S_A)}\ (\text{対称律})$$

$$\dfrac{\dfrac{\text{定理４：}n(S)=n(Z)\div P(Z)\qquad n(Z)=n(Y_B)\quad n(S)=n(S_B)\quad P(Z)=P(Y_B)}{n(S_B)=n(Y_B)\div P(Y_B)}\ (=\text{代入})}{n(Y_B)\div P(Y_B)=n(S_B)}\ (\text{対称律})$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{n(Y_A)\div P(Y_A)>n(Y_B)\div P(Y_B)\qquad n(Y_A)\div P(Y_A)=n(S_A)\quad n(Y_B)\div P(Y_B)=n(S_B)}{A_2:n(S_A)>n(S_B)}\ (=\text{代入})}{D_1\to A_2}\ (\to\text{入})}{\dfrac{C_2\to(D_1\to A_2)}{\dfrac{C_2\wedge D_1\to A_2}{C_2\wedge D_1\to A_2\vee A_3}\ (\vee\text{入})}\ (\text{移入})}\ (\to\text{入})\qquad \dfrac{\dfrac{\neg A_1\equiv A_2\veebar A_3}{\neg A_1\equiv A_2\vee A_3}\ (\veebar\to\vee)}{A_2\vee A_3\to\neg A_1}\ (\equiv\text{除})}{C_2\wedge D_1\to\neg A_1}\ (\text{推移})}{}$$

仮定の候補の内，矛盾した条件はない。C_2 と D_1 を仮定する場合，$\neg A_1$ は仮定として必要ない。

$$\dfrac{1=1\qquad D_1:P(X_A)=P(X_B)}{1-P(X_A)=1-P(X_B)}\ (==)$$

$$\dfrac{\dfrac{\text{定理１：}P(Y)=1-P(X)\qquad P(X)=P(X_A)\quad P(Y)=P(Y_A)}{P(Y_A)=1-P(X_A)}\ (=\text{代入})}{1-P(X_A)=P(Y_A)}\ (\text{対称律})$$

$$\dfrac{\dfrac{\text{定理１：}P(Y)=1-P(X)\qquad P(X)=P(X_B)\quad P(Y)=P(Y_B)}{P(Y_B)=1-P(X_B)}\ (=\text{代入})}{1-P(X_B)=P(Y_B)}\ (\text{対称律})$$

$$\dfrac{1-P(X_A)=1-P(X_B)\qquad 1-P(X_A)=P(Y_A)\quad 1-P(X_B)=P(Y_B)}{E_1:P(Y_A)=P(Y_B)}\ (=\text{代入})$$

$$\dfrac{C_2:n(Y_A)>n(Y_B)\qquad E_1:P(Y_A)=P(Y_B)}{n(Y_A)\div P(Y_A)>n(Y_B)\div P(Y_B)}\ (>=1)$$

$$\dfrac{\dfrac{\text{定理４：}n(S)=n(Z)\div P(Z)\qquad n(Z)=n(Y_A)\quad n(S)=n(S_A)\quad P(Z)=P(Y_A)}{n(S_A)=n(Y_A)\div P(Y_A)}\ (=\text{代入})}{n(Y_A)\div P(Y_A)=n(S_A)}\ (\text{対称律})$$

$$\dfrac{\dfrac{\text{定理４：}n(S)=n(Z)\div P(Z)\qquad n(Z)=n(Y_B)\quad n(S)=n(S_B)\quad P(Z)=P(Y_B)}{n(S_B)=n(Y_B)\div P(Y_B)}\ (=\text{代入})}{n(Y_B)\div P(Y_B)=n(S_B)}\ (\text{対称律})$$

$$\dfrac{n(Y_A)\div P(Y_A)>n(Y_B)\div P(Y_B)\qquad n(Y_A)\div P(Y_A)=n(S_A)\quad n(Y_B)\div P(Y_B)=n(S_B)}{A_2:n(S_A)>n(S_B)}\ (=\text{代入})$$

$$\frac{A_2 : \mathrm{n}(S_A) > \mathrm{n}(S_B) \qquad D_1 : \mathrm{P}(X_A) = \mathrm{P}(X_B)}{\mathrm{n}(S_A) \times \mathrm{P}(X_A) > \mathrm{n}(S_B) \times \mathrm{P}(X_B)} \;(>=1)$$

$$\frac{\text{定理３：}\mathrm{n}(Z) = \mathrm{n}(S) \times \mathrm{P}(Z) \qquad \mathrm{n}(Z) = \mathrm{n}(X_A) \quad \mathrm{n}(S) = \mathrm{n}(S_A) \quad \mathrm{P}(Z) = \mathrm{P}(X_A)}{\dfrac{\mathrm{n}(X_A) = \mathrm{n}(S_A) \times \mathrm{P}(X_A)}{\mathrm{n}(S_A) \times \mathrm{P}(X_A) = \mathrm{n}(X_A)} \;(\text{対称律})} \;(=\text{代入})$$

$$\frac{\text{定理３：}\mathrm{n}(Z) = \mathrm{n}(S) \times \mathrm{P}(Z) \qquad \mathrm{n}(Z) = \mathrm{n}(X_B) \quad \mathrm{n}(S) = \mathrm{n}(S_B) \quad \mathrm{P}(Z) = \mathrm{P}(X_B)}{\dfrac{\mathrm{n}(X_B) = \mathrm{n}(S_B) \times \mathrm{P}(X_B)}{\mathrm{n}(S_B) \times \mathrm{P}(X_B) = \mathrm{n}(X_B)} \;(\text{対称律})} \;(=\text{代入})$$

$$\frac{\mathrm{n}(S_A) \times \mathrm{P}(X_A) > \mathrm{n}(S_B) \times \mathrm{P}(X_B) \qquad \mathrm{n}(S_A) \times \mathrm{P}(X_A) = \mathrm{n}(X_A) \quad \mathrm{n}(S_B) \times \mathrm{P}(X_B) = \mathrm{n}(X_B)}{B_2 : \mathrm{n}(X_A) > \mathrm{n}(X_B)} \;(=\text{代入})$$

C_2 と D_1 を仮定し，結論として証明されるのは，B_2 である。

【問題６】

仮定の候補	定理	結論
$\neg A_1$ C_1 D_2	$C_1 \wedge D_2 \rightarrow \neg A_1$	B_2

証明

$$\frac{1 = 1 \qquad D_2 : \mathrm{P}(X_A) > \mathrm{P}(X_B)}{1 - \mathrm{P}(X_A) < 1 - \mathrm{P}(X_B)} \;(>=2)$$

$$\frac{\text{定理１：}\mathrm{P}(Y) = 1 - \mathrm{P}(X) \qquad \mathrm{P}(X) = \mathrm{P}(X_A) \quad \mathrm{P}(Y) = \mathrm{P}(Y_A)}{\dfrac{\mathrm{P}(Y_A) = 1 - \mathrm{P}(X_A)}{1 - \mathrm{P}(X_A) = \mathrm{P}(Y_A)} \;(\text{対称律})} \;(=\text{代入})$$

$$\frac{\text{定理１：}\mathrm{P}(Y) = 1 - \mathrm{P}(X) \qquad \mathrm{P}(X) = \mathrm{P}(X_B) \quad \mathrm{P}(Y) = \mathrm{P}(Y_B)}{\dfrac{\mathrm{P}(Y_B) = 1 - \mathrm{P}(X_B)}{1 - \mathrm{P}(X_B) = \mathrm{P}(Y_B)} \;(\text{対称律})} \;(=\text{代入})$$

$$\frac{1 - \mathrm{P}(X_A) < 1 - \mathrm{P}(X_B) \qquad 1 - \mathrm{P}(X_A) = \mathrm{P}(Y_A) \quad 1 - \mathrm{P}(X_B) = \mathrm{P}(Y_B)}{E_3 : \mathrm{P}(Y_A) < \mathrm{P}(Y_B)} \;(=\text{代入})$$

$$\frac{C_1 : \mathrm{n}(Y_A) = \mathrm{n}(Y_B) \qquad E_3 : \mathrm{P}(Y_A) < \mathrm{P}(Y_B)}{\mathrm{n}(Y_A) \div \mathrm{P}(Y_A) > \mathrm{n}(Y_B) \div \mathrm{P}(Y_B)} \;(>=2)$$

$$\frac{\text{定理４：}\mathrm{n}(S) = \mathrm{n}(Z) \div \mathrm{P}(Z) \qquad \mathrm{n}(Z) = \mathrm{n}(Y_A) \quad \mathrm{n}(S) = \mathrm{n}(S_A) \quad \mathrm{P}(Z) = \mathrm{P}(Y_A)}{\dfrac{\mathrm{n}(S_A) = \mathrm{n}(Y_A) \div \mathrm{P}(Y_A)}{\mathrm{n}(Y_A) \div \mathrm{P}(Y_A) = \mathrm{n}(S_A)} \;(\text{対称律})} \;(=\text{代入})$$

$$\dfrac{\dfrac{\text{定理４}：n(S)=n(Z)\div P(Z)\qquad n(Z)=n(Y_B)\quad n(S)=n(S_B)\quad P(Z)=P(Y_B)}{n(S_B)=n(Y_B)\div P(Y_B)}\ (=\text{代入})}{n(Y_B)\div P(Y_B)=n(S_B)}\ (\text{対称律})$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{n(Y_A)\div P(Y_A)>n(Y_B)\div P(Y_B)\qquad n(Y_A)\div P(Y_A)=n(S_A)\quad n(Y_B)\div P(Y_B)=n(S_B)}{A_2：n(S_A)>n(S_B)}\ (=\text{代入})}{D_2\rightarrow A_2}\ (\rightarrow\text{入})}{\dfrac{C_1\rightarrow(D_2\rightarrow A_2)}{C_1\wedge D_2\rightarrow A_2}\ (\text{移入})}\ (\rightarrow\text{入})}{C_1\wedge D_2\rightarrow A_2\vee A_3}\ (\vee\text{入})\qquad \dfrac{\dfrac{\neg A_1\equiv A_2\,\underline{\vee}\,A_3}{\neg A_1\equiv A_2\vee A_3}\ (\underline{\vee}\rightarrow\vee)}{A_2\vee A_3\rightarrow\neg A_1}\ (\equiv\text{除})}{C_1\wedge D_2\rightarrow\neg A_1}\ (\text{推移})$$

仮定の候補の内，矛盾した条件はない。C_1 と D_2 を仮定する場合，$\neg A_1$ は仮定として必要ない。

（Ｉ） $$\dfrac{1=1\qquad D_2：P(X_A)>P(X_B)}{1-P(X_A)<1-P(X_B)}\ (>=2)$$

$$\dfrac{\dfrac{\text{定理１}：P(Y)=1-P(X)\qquad P(X)=P(X_A)\quad P(Y)=P(Y_A)}{P(Y_A)=1-P(X_A)}\ (=\text{代入})}{1-P(X_A)=P(Y_A)}\ (\text{対称律})$$

$$\dfrac{\dfrac{\text{定理１}：P(Y)=1-P(X)\qquad P(X)=P(X_B)\quad P(Y)=P(Y_B)}{P(Y_B)=1-P(X_B)}\ (=\text{代入})}{1-P(X_B)=P(Y_B)}\ (\text{対称律})$$

$$\dfrac{1-P(X_A)<1-P(X_B)\qquad 1-P(X_A)=P(Y_A)\quad 1-P(X_B)=P(Y_B)}{E_3：P(Y_A)<P(Y_B)}\ (=\text{代入})$$

$$\dfrac{C_1：n(Y_A)=n(Y_B)\qquad E_3：P(Y_A)<P(Y_B)}{n(Y_A)\div P(Y_A)>n(Y_B)\div P(Y_B)}\ (>=2)$$

$$\dfrac{\dfrac{\text{定理４}：n(S)=n(Z)\div P(Z)\qquad n(Z)=n(Y_A)\quad n(S)=n(S_A)\quad P(Z)=P(Y_A)}{n(S_A)=n(Y_A)\div P(Y_A)}\ (=\text{代入})}{n(Y_A)\div P(Y_A)=n(S_A)}\ (\text{対称律})$$

$$\dfrac{\dfrac{\text{定理４}：n(S)=n(Z)\div P(Z)\qquad n(Z)=n(Y_B)\quad n(S)=n(S_B)\quad P(Z)=P(Y_B)}{n(S_B)=n(Y_B)\div P(Y_B)}\ (=\text{代入})}{n(Y_B)\div P(Y_B)=n(S_B)}\ (\text{対称律})$$

$$\dfrac{n(Y_A)\div P(Y_A)>n(Y_B)\div P(Y_B)\qquad n(Y_A)\div P(Y_A)=n(S_A)\quad n(Y_B)\div P(Y_B)=n(S_B)}{A_2：n(S_A)>n(S_B)}\ (=\text{代入})$$

$$\dfrac{A_2：n(S_A)>n(S_B)\qquad C_1：n(Y_A)=n(Y_B)}{n(S_A)-n(Y_A)>n(S_B)-n(Y_A)}\ (>=1)$$

$$\dfrac{\dfrac{\text{定理７：}n(X)=n(S)-n(Y) \qquad n(X)=n(X_A) \quad n(Y)=n(Y_A) \quad n(S)=n(S_A)}{n(X_A)=n(S_A)-n(Y_A)}\ \text{（＝代入）}}{n(S_A)-n(Y_A)=n(X_A)}\ \text{（対称律）}$$

$$\dfrac{\dfrac{\text{定理７：}n(X)=n(S)-n(Y) \qquad n(X)=n(X_B) \quad n(Y)=n(Y_B) \quad n(S)=n(S_B)}{n(X_B)=n(S_B)-n(Y_B)}\ \text{（＝代入）}}{n(S_B)-n(Y_B)=n(X_B)}\ \text{（対称律）}$$

$$\dfrac{n(S_A)-n(Y_A)>n(S_B)-n(Y_B) \qquad n(S_A)-n(Y_A)=n(X_A) \quad n(S_B)-n(Y_B)=n(X_B)}{B_2: n(X_A)>n(X_B)}\ \text{（＝代入）}$$

C_1 と D_2 を仮定し，結論として証明されるのは，B_2 である。

（Ⅱ）
$$\dfrac{1=1 \qquad D_2: P(X_A)>P(X_B)}{1-P(X_A)<1-P(X_B)}\ \text{（＞＝２）}$$

$$\dfrac{\dfrac{\text{定理１：}P(Y)=1-P(X) \qquad P(X)=P(X_A) \quad P(Y)=P(Y_A)}{P(Y_A)=1-P(X_A)}\ \text{（＝代入）}}{1-P(X_A)=P(Y_A)}\ \text{（対称律）}$$

$$\dfrac{\dfrac{\text{定理１：}P(Y)=1-P(X) \qquad P(X)=P(X_B) \quad P(Y)=P(Y_B)}{P(Y_B)=1-P(X_B)}\ \text{（＝代入）}}{1-P(X_B)=P(Y_B)}\ \text{（対称律）}$$

$$\dfrac{1-P(X_A)<1-P(X_B) \qquad 1-P(X_A)=P(Y_A) \quad 1-P(X_B)=P(Y_B)}{E_3: P(Y_A)<P(Y_B)}\ \text{（＝代入）}$$

$$\dfrac{C_1: n(Y_A)=n(Y_B) \qquad E_3: P(Y_A)<P(Y_B)}{n(Y_A)\div P(Y_A)>n(Y_B)\div P(Y_B)}\ \text{（＞＝２）}$$

$$\dfrac{\dfrac{\text{定理４：}n(S)=n(Z)\div P(Z) \qquad n(Z)=n(Y_A) \quad n(S)=n(S_A) \quad P(Z)=P(Y_A)}{n(S_A)=n(Y_A)\div P(Y_A)}\ \text{（＝代入）}}{n(Y_A)\div P(Y_A)=n(S_A)}\ \text{（対称律）}$$

$$\dfrac{\dfrac{\text{定理４：}n(S)=n(Z)\div P(Z) \qquad n(Z)=n(Y_B) \quad n(S)=n(S_B) \quad P(Z)=P(Y_B)}{n(S_B)=n(Y_B)\div P(Y_B)}\ \text{（＝代入）}}{n(Y_B)\div P(Y_B)=n(S_B)}\ \text{（対称律）}$$

$$\dfrac{n(Y_A)\div P(Y_A)>n(Y_B)\div P(Y_B) \quad n(Y_A)\div P(Y_A)=n(S_A) \quad n(Y_B)\div P(Y_B)=n(S_B)}{A_2: n(S_A)>n(S_B)}\ \text{（＝代入）}$$

$$\dfrac{A_2: n(S_A)>n(S_B) \qquad D_2: P(X_A)>P(X_B)}{n(S_A)\times P(X_A)>n(S_B)\times P(X_B)}\ \text{（＞＞１）}$$

$$\dfrac{\text{定理３：}n(Z)=n(S)\times P(Z) \qquad n(Z)=n(X_A) \quad n(S)=n(S_A) \quad P(Z)=P(X_A)}{\dfrac{n(X_A)=n(S_A)\times P(X_A)}{n(S_A)\times P(X_A)=n(X_A)}\text{（対称律）}}\text{（＝代入）}$$

$$\dfrac{\text{定理３：}n(Z)=n(S)\times P(Z) \qquad n(Z)=n(X_B) \quad n(S)=n(S_B) \quad P(Z)=P(X_B)}{\dfrac{n(X_B)=n(S_B)\times P(X_B)}{n(S_B)\times P(X_B)=n(X_B)}\text{（対称律）}}\text{（＝代入）}$$

$$\dfrac{n(S_A)\times P(X_A)>n(S_B)\times P(X_B) \qquad n(S_A)\times P(X_A)=n(X_A) \quad n(S_B)\times P(X_B)=n(X_B)}{B_2:n(X_A)>n(X_B)}\text{（＝代入）}$$

C_1 と D_2 を仮定し，結論として証明されるのは，B_2 である。

付録５　割合に関する概念的知識の「比較量に関する状況」における考え方の例

【問題３】

仮定の候補	定理
$\neg A_1$ C_2 D_3	

証明

$$\frac{n(Y_A)=2\quad n(Y_B)=1\quad n(S_A)=3\quad n(S_B)=2\quad 2>1\quad 3>2\quad (3\text{-}2)/3<(2\text{-}1)/2\quad 3\text{-}2=2\text{-}1}{\begin{aligned}\exists x\exists y\exists z\exists w\ [&n(Y_A)=x\wedge n(Y_B)=y\wedge x>y\\ &\wedge n(S_A)=z\wedge n(S_B)=w\wedge z>w\\ &\wedge P(X_A)=(z-x)/z\wedge P(X_B)=(w-y)/w\wedge(z-x)/z<(w-y)/w\\ &\wedge n(X_A)=z-x\wedge n(X_B)=w-y\wedge z-x=w-y]\ \cdots ⓐ\end{aligned}}\ (\exists\exists 入)$$

$$\frac{n(Y_A)=3\quad n(Y_B)=1\quad n(S_A)=5\quad n(S_B)=2\quad 3>1\quad 5>2\quad (5\text{-}3)/5<(2\text{-}1)/2\quad 5\text{-}3>2\text{-}1}{\begin{aligned}\exists x'\exists y'\exists z'\exists w'\ [&n(Y_A)=x'\wedge n(Y_B)=y'\wedge x'>y'\\ &\wedge n(S_A)=z'\wedge n(S_B)=w'\wedge z'>w'\\ &\wedge P(X_A)=(z'-x')/z'\wedge P(X_B)=(w'-y')/w'\wedge(z'-x')/z'<(w'-y')/w'\\ &\wedge n(X_A)=z'-x'\wedge n(X_B)=w'-y'\wedge z'-x'>w'-y']\ \cdots ⓑ\end{aligned}}\ (\exists\exists 入)$$

$$\frac{n(Y_A)=3\quad n(Y_B)=1\quad n(S_A)=4\quad n(S_B)=3\quad 3>1\quad 4>3\quad (4\text{-}3)/4<(3\text{-}1)/3\quad 4\text{-}3<3\text{-}1}{\begin{aligned}\exists x''\exists y''\exists z''\exists w''\ [&n(Y_A)=x''\wedge n(Y_B)=y''\wedge x''>y''\\ &\wedge n(S_A)=z''\wedge n(S_B)=w''\wedge z''>w''\\ &\wedge P(X_A)=(z''-x'')/z''\wedge P(X_B)=(w''-y'')/w''\wedge(z''-x'')/z''<(w''-y'')/w''\\ &\wedge n(X_A)=z''-x''\wedge n(X_B)=w''-y''\wedge z''-x''<w''-y'']\ \cdots ⓒ\end{aligned}}\ (\exists\exists 入)$$

$$\frac{ⓐ\qquad ⓑ\qquad ⓒ}{\begin{aligned}(\exists x\exists y\exists z\exists w\ [&n(Y_A)=x\wedge n(Y_B)=y\wedge x>y\\ &\wedge n(S_A)=z\wedge n(S_B)=w\wedge z>w\\ &\wedge P(X_A)=(z-x)/z\wedge P(X_B)=(w-y)/w\wedge(z-x)/z<(w-y)/w\\ &\wedge n(X_A)=z-x\wedge n(X_B)=w-y\wedge z-x=w-y])\\ \wedge(\exists x'\exists y'\exists z'\exists w'\ [&n(Y_A)=x'\wedge n(Y_B)=y'\wedge x'>y'\\ &\wedge n(S_A)=z'\wedge n(S_B)=w'\wedge z'>w'\\ &\wedge P(X_A)=(z'-x')/z'\wedge P(X_B)=(w'-y')/w'\wedge(z'-x')/z'<(w'-y')/w'\\ &\wedge n(X_A)=z'-x'\wedge n(X_B)=w'-y'\wedge z'-x'>w'-y'])\\ \wedge(\exists x''\exists y''\exists z''\exists w''\ [&n(Y_A)=x''\wedge n(Y_B)=y''\wedge x''>y''\\ &\wedge n(S_A)=z''\wedge n(S_B)=w''\wedge z''>w''\\ &\wedge P(X_A)=(z''-x'')/z''\wedge P(X_B)=(w''-y'')/w''\wedge(z''-x'')/z''<(w''-y'')/w''\\ &\wedge n(X_A)=z''-x''\wedge n(X_B)=w''-y''\wedge z''-x''<w''-y''])\end{aligned}}\ (\wedge\wedge 入)$$

結論として，$\neg A_1$，C_2，D_3 及び B_1，$\neg A_1$，C_2，D_3 及び B_2，$\neg A_1$，C_2，D_3 及び B_3 のそれぞれを満たす $n(Y_A)$，$n(Y_B)$，$n(S_A)$，$n(S_B)$が存在することが証明される。

考え方の例

$0\leqq P(X)\leqq 1$ から $0\leqq n(X)\leqq n(S)$，$0\leqq P(Y)\leqq 1$ から $0\leqq n(Y)\leqq n(S)$ である。しかし，$n(X)=0$ や $n(Y)=0$ は現実的ではないため，$0<n(X)<n(S)$，$0<n(Y)<n(S)$ の場合に限定する。

したがって，最も単純な場合である n(Y$_A$)＝１，n(Y$_B$)＝１，n(S$_A$)＝２，n(S$_B$)＝２の条件から考える。

(1) n(Y$_A$)＝１，n(Y$_B$)＝１，n(S$_A$)＝２，n(S$_B$)＝２

$$\dfrac{n(Y_A)=1 \qquad \dfrac{n(Y_B)=1}{1=n(Y_B)}\ (\text{対称律})}{C_1 : n(Y_A)=n(Y_B)}\ (\text{推移律})$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{C_2}{C_2 \lor C_3}\ (\lor\text{入}) \qquad \dfrac{\dfrac{\neg C_1 \equiv C_2 \veebar C_3}{\neg C_1 \equiv C_2 \lor C_3}\ (\veebar\to\lor)}{C_2 \lor C_3 \to \neg C_1}\ (\equiv\text{除})}{\neg C_1}\ (\to\text{除}) \qquad C_1}{\bot}\ (\neg\text{除})$$

$$\dfrac{\dfrac{n(S_A)=2 \qquad \dfrac{n(S_B)=2}{2=n(S_B)}\ (\text{対称律})}{A_1 : n(S_A)=n(S_B)}\ (\text{推移律}) \qquad \neg A_1}{\bot}\ (\neg\text{除})$$

C_2 と$\neg A_1$ の条件を満たすように，n(Y$_A$)＝１，n(Y$_B$)＝１，n(S$_A$)＝２，n(S$_B$)＝２の条件を基に，n(Y$_A$)とn(S$_A$)の２項にそれぞれ＋１する。

(2) n(Y$_A$)＝２，n(Y$_B$)＝１，n(S$_A$)＝３，n(S$_B$)＝２

$$\dfrac{\dfrac{n(Y_A)=2 \qquad 2>1}{n(Y_A)>1}\ (\text{推移律}) \qquad \dfrac{n(Y_B)=1}{1=n(Y_B)}\ (\text{対称律})}{C_2 : n(Y_A)>n(Y_B)}\ (\text{推移律})$$

$$\dfrac{\dfrac{n(S_A)=3 \qquad 3>2}{n(S_A)>2}\ (\text{推移律}) \qquad \dfrac{n(S_B)=2}{2=n(S_B)}\ (\text{対称律})}{A_2 : n(S_A)>n(S_B)}\ (\text{推移律})$$

$$\dfrac{\dfrac{A_2}{A_2 \lor A_3}\ (\lor\text{入}) \qquad \dfrac{\dfrac{\neg A_1 \equiv A_2 \veebar A_3}{\neg A_1 \equiv A_2 \lor A_3}\ (\veebar\to\lor)}{A_2 \lor A_3 \to \neg A_1}\ (\equiv\text{除})}{\neg A_1}\ (\to\text{除})$$

$$\dfrac{\text{定義} : P(Z)=n(Z)\div n(S) \qquad n(Z)=n(Y_A) \quad n(S)=n(S_A) \quad P(Z)=P(Y_A)}{P(Y_A)=n(Y_A)\div n(S_A)}\ (=\text{代入})$$

$$\dfrac{\dfrac{P(Y_A)=n(Y_A)\div n(S_A) \qquad n(Y_A)=2 \quad n(S_A)=3}{P(Y_A)=2\div 3}\ (=\text{代入})}{P(Y_A)=2/3}\ (\text{演推})$$

$$\frac{\text{定理２：}P(X)=1-P(Y)\qquad P(X)=P(X_A)\quad P(Y)=P(Y_A)}{P(X_A)=1-P(Y_A)}\ (=\text{代入})$$

$$\cfrac{P(X_A)=1-P(Y_A)\qquad P(Y_A)=2/3}{\cfrac{P(X_A)=1-2/3}{P(X_A)=1/3}\ (\text{演推})}\ (=\text{代入})$$

$$\frac{\text{定義：}P(Z)=n(Z)\div n(S)\qquad n(Z)=n(Y_B)\quad n(S)=n(S_B)\quad P(Z)=P(Y_B)}{P(Y_B)=n(Y_B)\div n(S_B)}\ (=\text{代入})$$

$$\cfrac{P(Y_B)=n(Y_B)\div n(S_B)\qquad n(Y_B)=1\quad n(S_B)=2}{\cfrac{P(Y_B)=1\div 2}{P(Y_B)=1/2}\ (\text{演推})}\ (=\text{代入})$$

$$\frac{\text{定理２：}P(X)=1-P(Y)\qquad P(X)=P(X_B)\quad P(Y)=P(Y_B)}{P(X_B)=1-P(Y_B)}\ (=\text{代入})$$

$$\cfrac{P(X_B)=1-P(Y_B)\qquad P(Y_B)=1/2}{\cfrac{P(X_B)=1-1/2}{P(X_B)=1/2}\ (\text{演推})}\ (=\text{代入})$$

$$\cfrac{\cfrac{P(X_A)=1/3\qquad 1/3<1/2}{P(X_A)<1/2}\ (\text{推移律})\qquad \cfrac{P(X_B)=1/2}{1/2=P(X_B)}\ (\text{対称律})}{D_3\ :P(X_A)<P(X_B)}\ (\text{推移律})$$

$$\frac{\text{定理７：}n(X)=n(S)-n(Y)\qquad n(X)=n(X_A)\quad n(Y)=n(Y_A)\quad n(S)=n(S_A)}{n(X_A)=n(S_A)-n(Y_A)}\ (=\text{代入})$$

$$\cfrac{n(X_A)=n(S_A)-n(Y_A)\qquad n(Y_A)=2\quad n(S_A)=3}{\cfrac{n(X_A)=3-2}{n(X_A)=1}\ (\text{演推})}\ (=\text{代入})$$

$$\frac{\text{定理７：}n(X)=n(S)-n(Y)\qquad n(X)=n(X_B)\quad n(Y)=n(Y_B)\quad n(S)=n(S_B)}{n(X_B)=n(S_B)-n(Y_B)}\ (=\text{代入})$$

$$\cfrac{n(X_B)=n(S_B)-n(Y_B)\qquad n(Y_B)=1\quad n(S_B)=2}{\cfrac{n(X_B)=2-1}{n(X_B)=1}\ (\text{演推})}\ (=\text{代入})$$

$$\cfrac{n(X_A)=1\qquad \cfrac{n(X_B)=1}{1=n(X_B)}\ (\text{対称律})}{B_1:n(X_A)=n(X_B)}\ (\text{推移律})$$

B_2 の条件を満たすように，B_1 となる $n(Y_A)=2$，$n(Y_B)=1$，$n(S_A)=3$，$n(S_B)=2$ の条件を基に，$n(S_A)$の項に＋１する。

(3) $n(Y_A)=2$， $n(Y_B)=1$， $n(S_A)=4$， $n(S_B)=2$

$$\cfrac{\cfrac{n(Y_A)=2 \qquad 2>1}{n(Y_A)>1}\ \text{(推移律)} \qquad \cfrac{n(Y_B)=1}{1=n(Y_B)}\ \text{(対称律)}}{C_2 : n(Y_A)>n(Y_B)}\ \text{(推移律)}$$

$$\cfrac{\cfrac{n(S_A)=4 \qquad 4>2}{n(S_A)>2}\ \text{(推移律)} \qquad \cfrac{n(S_B)=2}{2=n(S_B)}\ \text{(対称律)}}{A_2 : n(S_A)>n(S_B)}\ \text{(推移律)}$$

$$\cfrac{\cfrac{A_2}{A_2 \vee A_3}\ \text{(}\vee\text{入)} \qquad \cfrac{\cfrac{\cfrac{\neg A_1 \equiv A_2 \underline{\vee} A_3}{\neg A_1 \equiv A_2 \vee A_3}\ (\underline{\vee}\to\vee)}{A_2 \vee A_3 \to \neg A_1}\ \text{(}\equiv\text{除)}}{}}{\neg A_1}\ \text{(}\to\text{除)}$$

$$\cfrac{\text{定義}: P(Z)=n(Z)\div n(S) \qquad n(Z)=n(Y_A) \quad n(S)=n(S_A) \quad P(Z)=P(Y_A)}{P(Y_A)=n(Y_A)\div n(S_A)}\ \text{(=代入)}$$

$$\cfrac{P(Y_A)=n(Y_A)\div n(S_A) \qquad n(Y_A)=2 \quad n(S_A)=4}{\cfrac{P(Y_A)=2\div 4}{P(Y_A)=1/2}\ \text{(演推)}}\ \text{(=代入)}$$

$$\cfrac{\text{定理２}: P(X)=1-P(Y) \qquad P(X)=P(X_A) \quad P(Y)=P(Y_A)}{P(X_A)=1-P(Y_A)}\ \text{(=代入)}$$

$$\cfrac{P(X_A)=1-P(Y_A) \qquad P(Y_A)=1/2}{\cfrac{P(X_A)=1-1/2}{P(X_A)=1/2}\ \text{(演推)}}\ \text{(=代入)}$$

$$\cfrac{\text{定義}: P(Z)=n(Z)\div n(S) \qquad n(Z)=n(Y_B) \quad n(S)=n(S_B) \quad P(Z)=P(Y_B)}{P(Y_B)=n(Y_B)\div n(S_B)}\ \text{(=代入)}$$

$$\cfrac{P(Y_B)=n(Y_B)\div n(S_B) \qquad n(Y_B)=1 \quad n(S_B)=2}{\cfrac{P(Y_B)=1\div 2}{P(Y_B)=1/2}\ \text{(演推)}}\ \text{(=代入)}$$

$$\cfrac{\text{定理２}: P(X)=1-P(Y) \qquad P(X)=P(X_B) \quad P(Y)=P(Y_B)}{P(X_B)=1-P(Y_B)}\ \text{(=代入)}$$

$$\cfrac{P(X_B)=1-P(Y_B) \qquad P(Y_B)=1/2}{\cfrac{P(X_B)=1-1/2}{P(X_B)=1/2}\ \text{(演推)}}\ \text{(=代入)}$$

$$\dfrac{\mathrm{P}(\mathrm{X_A})=1/2 \qquad \dfrac{\mathrm{P}(\mathrm{X_B})=1/2}{1/2=\mathrm{P}(\mathrm{X_B})}\text{(対称律)}}{D_1:\mathrm{P}(\mathrm{X_A})=\mathrm{P}(\mathrm{X_B})}\text{(推移律)}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{D_3}{D_2 \lor D_3}\text{(∨入)} \qquad \dfrac{\dfrac{\neg D_1 \equiv D_2 \underline{\lor} D_3}{\neg D_1 \equiv D_2 \lor D_3}(\underline{\lor}\to\lor)}{D_2 \lor D_3 \to \neg D_1}\text{(≡除)}}{\neg D_1}\text{(→除)} \qquad D_1}{\perp}\text{(¬除)}$$

D_3 の条件を満たすように，$\mathrm{n(Y_A)}=2$，$\mathrm{n(Y_B)}=1$，$\mathrm{n(S_A)}=4$，$\mathrm{n(S_B)}=2$ の条件を基に，$\mathrm{n(Y_A)}$の項に＋１する。

(4) $\mathrm{n(Y_A)}=3$，$\mathrm{n(Y_B)}=1$，$\mathrm{n(S_A)}=4$，$\mathrm{n(S_B)}=2$

$$\dfrac{\dfrac{\mathrm{n(Y_A)}=3 \qquad 3>1}{\mathrm{n(Y_A)}>1}\text{(推移律)} \qquad \dfrac{\mathrm{n(Y_B)}=1}{1=\mathrm{n(Y_B)}}\text{(対称律)}}{C_2:\mathrm{n(Y_A)}>\mathrm{n(Y_B)}}\text{(推移律)}$$

$$\dfrac{\dfrac{\mathrm{n(S_A)}=4 \qquad 4>2}{\mathrm{n(S_A)}>2}\text{(推移律)} \qquad \dfrac{\mathrm{n(S_B)}=2}{2=\mathrm{n(S_B)}}\text{(対称律)}}{A_2:\mathrm{n(S_A)}>\mathrm{n(S_B)}}\text{(推移律)}$$

$$\dfrac{\dfrac{A_2}{A_2 \lor A_3}\text{(∨入)} \qquad \dfrac{\dfrac{\neg A_1 \equiv A_2 \underline{\lor} A_3}{\neg A_1 \equiv A_2 \lor A_3}(\underline{\lor}\to\lor)}{A_2 \lor A_3 \to \neg A_1}\text{(≡除)}}{\neg A_1}\text{(→除)}$$

$$\dfrac{\text{定義}:\mathrm{P(Z)}=\mathrm{n(Z)}\div\mathrm{n(S)} \qquad \mathrm{n(Z)}=\mathrm{n(Y_A)} \quad \mathrm{n(S)}=\mathrm{n(S_A)} \quad \mathrm{P(Z)}=\mathrm{P(Y_A)}}{\mathrm{P(Y_A)}=\mathrm{n(Y_A)}\div\mathrm{n(S_A)}}\text{(＝代入)}$$

$$\dfrac{\dfrac{\mathrm{P(Y_A)}=\mathrm{n(Y_A)}\div\mathrm{n(S_A)} \qquad \mathrm{n(Y_A)}=3 \quad \mathrm{n(S_A)}=4}{\mathrm{P(Y_A)}=3\div 4}\text{(＝代入)}}{\mathrm{P(Y_A)}=3/4}\text{(演推)}$$

$$\dfrac{\text{定理２}:\mathrm{P(X)}=1-\mathrm{P(Y)} \qquad \mathrm{P(X)}=\mathrm{P(X_A)} \quad \mathrm{P(Y)}=\mathrm{P(Y_A)}}{\mathrm{P(X_A)}=1-\mathrm{P(Y_A)}}\text{(＝代入)}$$

$$\dfrac{\dfrac{\mathrm{P(X_A)}=1-\mathrm{P(Y_A)} \qquad \mathrm{P(Y_A)}=3/4}{\mathrm{P(X_A)}=1-3/4}\text{(＝代入)}}{\mathrm{P(X_A)}=1/4}\text{(演推)}$$

$$\dfrac{\text{定義}:\mathrm{P(Z)}=\mathrm{n(Z)}\div\mathrm{n(S)} \qquad \mathrm{n(Z)}=\mathrm{n(Y_B)} \quad \mathrm{n(S)}=\mathrm{n(S_B)} \quad \mathrm{P(Z)}=\mathrm{P(Y_B)}}{\mathrm{P(Y_B)}=\mathrm{n(Y_B)}\div\mathrm{n(S_B)}}\text{(＝代入)}$$

$$\dfrac{\dfrac{P(Y_B)=n(Y_B)\div n(S_B)\qquad n(Y_B)=1\quad n(S_B)=2}{P(Y_B)=1\div 2}\,(=\text{代入})}{P(Y_B)=1/2}\,(\text{演推})$$

$$\dfrac{\text{定理２}:P(X)=1-P(Y)\qquad P(X)=P(X_B)\quad P(Y)=P(Y_B)}{P(X_B)=1-P(Y_B)}\,(=\text{代入})$$

$$\dfrac{\dfrac{P(X_B)=1-P(Y_B)\qquad P(Y_B)=1/2}{P(X_B)=1-1/2}\,(=\text{代入})}{P(X_B)=1/2}\,(\text{演推})$$

$$\dfrac{\dfrac{P(X_A)=1/4\qquad 1/4<1/2}{P(X_A)<1/2}\,(\text{推移律})\qquad \dfrac{P(X_B)=1/2}{1/2=P(X_B)}\,(\text{対称律})}{D_3:P(X_A)<P(X_B)}\,(\text{推移律})$$

$$\dfrac{\text{定理７}:n(X)=n(S)-n(Y)\qquad n(X)=n(X_A)\quad n(Y)=n(Y_A)\quad n(S)=n(S_A)}{n(X_A)=n(S_A)-n(Y_A)}\,(=\text{代入})$$

$$\dfrac{\dfrac{n(X_A)=n(S_A)-n(Y_A)\qquad n(Y_A)=3\quad n(S_A)=4}{n(X_A)=4-3}\,(=\text{代入})}{n(X_A)=1}\,(\text{演推})$$

$$\dfrac{\text{定理７}:n(X)=n(S)-n(Y)\qquad n(X)=n(X_B)\quad n(Y)=n(Y_B)\quad n(S)=n(S_B)}{n(X_B)=n(S_B)-n(Y_B)}\,(=\text{代入})$$

$$\dfrac{\dfrac{n(X_B)=n(S_B)-n(Y_B)\qquad n(Y_B)=1\quad n(S_B)=2}{n(X_B)=2-1}\,(=\text{代入})}{n(X_B)=1}\,(\text{演推})$$

$$\dfrac{n(X_A)=1\qquad \dfrac{n(X_B)=1}{1=n(X_B)}\,(\text{対称律})}{B_1:n(X_A)=n(X_B)}\,(\text{推移律})$$

B_2 の条件を満たすように，B_1 となる $n(Y_A)=3$，$n(Y_B)=1$，$n(S_A)=4$，$n(S_B)=2$ の条件を基に，$n(S_A)$の項に＋１する。

(5) $n(Y_A)=3$，$n(Y_B)=1$，$n(S_A)=5$，$n(S_B)=2$

$$\dfrac{\dfrac{n(Y_A)=3\qquad 3>1}{n(Y_A)>1}\,(\text{推移律})\qquad \dfrac{n(Y_B)=1}{1=n(Y_B)}\,(\text{対称律})}{C_2:n(Y_A)>n(Y_B)}\,(\text{推移律})$$

$$\dfrac{\dfrac{n(S_A)=5\qquad 5>2}{n(S_A)>2}\,(\text{推移律})\qquad \dfrac{n(S_B)=2}{2=n(S_B)}\,(\text{対称律})}{A_2:n(S_A)>n(S_B)}\,(\text{推移律})$$

$$\dfrac{\dfrac{A_2}{A_2 \vee A_3}\text{(∨入)} \qquad \dfrac{\dfrac{\neg A_1 \equiv A_2 \underline{\vee} A_3}{\neg A_1 \equiv A_2 \vee A_3}\text{(}\underline{\vee}\to\vee\text{)}}{A_2 \vee A_3 \to \neg A_1}\text{(≡除)}}{\neg A_1}\text{(→除)}$$

$$\dfrac{\text{定義：}P(Z) = n(Z) \div n(S) \qquad n(Z) = n(Y_A) \quad n(S) = n(S_A) \quad P(Z) = P(Y_A)}{P(Y_A) = n(Y_A) \div n(S_A)}\text{(＝代入)}$$

$$\dfrac{\dfrac{P(Y_A) = n(Y_A) \div n(S_A) \qquad n(Y_A) = 3 \quad n(S_A) = 5}{P(Y_A) = 3 \div 5}\text{(＝代入)}}{P(Y_A) = 3/5}\text{(演推)}$$

$$\dfrac{\text{定理２：}P(X) = 1 - P(Y) \qquad P(X) = P(X_A) \quad P(Y) = P(Y_A)}{P(X_A) = 1 - P(Y_A)}\text{(＝代入)}$$

$$\dfrac{\dfrac{P(X_A) = 1 - P(Y_A) \qquad P(Y_A) = 3/5}{P(X_A) = 1 - 3/5}\text{(＝代入)}}{P(X_A) = 2/5}\text{(演推)}$$

$$\dfrac{\text{定義：}P(Z) = n(Z) \div n(S) \qquad n(Z) = n(Y_B) \quad n(S) = n(S_B) \quad P(Z) = P(Y_B)}{P(Y_B) = n(Y_B) \div n(S_B)}\text{(＝代入)}$$

$$\dfrac{\dfrac{P(Y_B) = n(Y_B) \div n(S_B) \qquad n(Y_B) = 1 \quad n(S_B) = 2}{P(Y_B) = 1 \div 2}\text{(＝代入)}}{P(Y_B) = 1/2}\text{(演推)}$$

$$\dfrac{\text{定理２：}P(X) = 1 - P(Y) \qquad P(X) = P(X_B) \quad P(Y) = P(Y_B)}{P(X_B) = 1 - P(Y_B)}\text{(＝代入)}$$

$$\dfrac{\dfrac{P(X_B) = 1 - P(Y_B) \qquad P(Y_B) = 1/2}{P(X_B) = 1 - 1/2}\text{(＝代入)}}{P(X_B) = 1/2}\text{(演推)}$$

$$\dfrac{\dfrac{P(X_A) = 2/5 \qquad 2/5 < 1/2}{P(X_A) < 1/2}\text{(推移律)} \qquad \dfrac{P(X_B) = 1/2}{1/2 = P(X_B)}\text{(対称律)}}{D_3\text{：}P(X_A) < P(X_B)}\text{(推移律)}$$

$$\dfrac{\text{定理７：}n(X) = n(S) - n(Y) \qquad n(X) = n(X_A) \quad n(Y) = n(Y_A) \quad n(S) = n(S_A)}{n(X_A) = n(S_A) - n(Y_A)}\text{(＝代入)}$$

$$\dfrac{\dfrac{n(X_A) = n(S_A) - n(Y_A) \qquad n(Y_A) = 3 \quad n(S_A) = 5}{n(X_A) = 5 - 3}\text{(＝代入)}}{n(X_A) = 2}\text{(演推)}$$

$$\dfrac{\text{定理７：}n(X)=n(S)-n(Y) \qquad n(X)=n(X_B) \quad n(Y)=n(Y_B) \quad n(S)=n(S_B)}{n(X_B)=n(S_B)-n(Y_B)}\text{（＝代入）}$$

$$\dfrac{\dfrac{n(X_B)=n(S_B)-n(Y_B) \qquad n(Y_B)=1 \quad n(S_B)=2}{n(X_B)=2-1}\text{（＝代入）}}{n(X_B)=1}\text{（演推）}$$

$$\dfrac{\dfrac{n(X_A)=2 \qquad 2>1}{n(X_A)>1}\text{（推移律）} \qquad \dfrac{n(X_B)=1}{1=n(X_B)}\text{（対称律）}}{B_2: n(X_A)>n(X_B)}\text{（推移律）}$$

B_3 の条件を満たすように，B_1 となる $n(Y_A)=3$，$n(Y_B)=1$，$n(S_A)=4$，$n(S_B)=2$ の条件を基に，$n(S_B)$の項に＋１する。

(6) $n(Y_A)=3$，$n(Y_B)=1$，$n(S_A)=4$，$n(S_B)=3$

$$\dfrac{\dfrac{n(Y_A)=3 \qquad 3>1}{n(Y_A)>1}\text{（推移律）} \qquad \dfrac{n(Y_B)=1}{1=n(Y_B)}\text{（対称律）}}{C_2: n(Y_A)>n(Y_B)}\text{（推移律）}$$

$$\dfrac{\dfrac{n(S_A)=4 \qquad 4>3}{n(S_A)>3}\text{（推移律）} \qquad \dfrac{n(S_B)=3}{3=n(S_B)}\text{（対称律）}}{A_2: n(S_A)>n(S_B)}\text{（推移律）}$$

$$\dfrac{\dfrac{A_2}{A_2 \vee A_3}\text{（∨入）} \qquad \dfrac{\dfrac{\neg A_1 \equiv A_2 \underline{\vee} A_3}{\neg A_1 \equiv A_2 \vee A_3}\text{（}\underline{\vee}\to\vee\text{）}}{A_2 \vee A_3 \to \neg A_1}\text{（≡除）}}{\neg A_1}\text{（→除）}$$

$$\dfrac{\text{定義：}P(Z)=n(Z)\div n(S) \qquad n(Z)=n(Y_A) \quad n(S)=n(S_A) \quad P(Z)=P(Y_A)}{P(Y_A)=n(Y_A)\div n(S_A)}\text{（＝代入）}$$

$$\dfrac{\dfrac{P(Y_A)=n(Y_A)\div n(S_A) \qquad n(Y_A)=3 \quad n(S_A)=4}{P(Y_A)=3\div 4}\text{（＝代入）}}{P(Y_A)=3/4}\text{（演推）}$$

$$\dfrac{\text{定理２：}P(X)=1-P(Y) \qquad P(X)=P(X_A) \quad P(Y)=P(Y_A)}{P(X_A)=1-P(Y_A)}\text{（＝代入）}$$

$$\dfrac{\dfrac{P(X_A)=1-P(Y_A) \qquad P(Y_A)=3/4}{P(X_A)=1-3/4}\text{（＝代入）}}{P(X_A)=1/4}\text{（演推）}$$

$$\dfrac{\text{定義：}P(Z)=n(Z)\div n(S) \qquad n(Z)=n(Y_B) \quad n(S)=n(S_B) \quad P(Z)=P(Y_B)}{P(Y_B)=n(Y_B)\div n(S_B)}\text{（＝代入）}$$

$$\dfrac{\dfrac{P(Y_B) = n(Y_B) \div n(S_B) \qquad n(Y_B) = 1 \quad n(S_B) = 3}{P(Y_B) = 1 \div 3}\text{（＝代入）}}{P(Y_B) = 1/3}\text{（演推）}$$

$$\dfrac{\text{定理２：}P(X) = 1 - P(Y) \qquad P(X) = P(X_B) \quad P(Y) = P(Y_B)}{P(X_B) = 1 - P(Y_B)}\text{（＝代入）}$$

$$\dfrac{\dfrac{P(X_B) = 1 - P(Y_B) \qquad P(Y_B) = 1/3}{P(X_B) = 1 - 1/3}\text{（＝代入）}}{P(X_B) = 2/3}\text{（演推）}$$

$$\dfrac{\dfrac{P(X_A) = 1/4 \qquad 1/4 < 2/3}{P(X_A) < 2/3}\text{（推移律）} \qquad \dfrac{P(X_B) = 2/3}{2/3 = P(X_B)}\text{（対称律）}}{D_3 : P(X_A) < P(X_B)}\text{（推移律）}$$

$$\dfrac{\text{定理７：}n(X) = n(S) - n(Y) \qquad n(X) = n(X_A) \quad n(Y) = n(Y_A) \quad n(S) = n(S_A)}{n(X_A) = n(S_A) - n(Y_A)}\text{（＝代入）}$$

$$\dfrac{\dfrac{n(X_A) = n(S_A) - n(Y_A) \qquad n(Y_A) = 3 \quad n(S_A) = 4}{n(X_A) = 4 - 3}\text{（＝代入）}}{n(X_A) = 1}\text{（演推）}$$

$$\dfrac{\text{定理７：}n(X) = n(S) - n(Y) \qquad n(X) = n(X_B) \quad n(Y) = n(Y_B) \quad n(S) = n(S_B)}{n(X_B) = n(S_B) - n(Y_B)}\text{（＝代入）}$$

$$\dfrac{\dfrac{n(X_B) = n(S_B) - n(Y_B) \qquad n(Y_B) = 1 \quad n(S_B) = 3}{n(X_A) = 3 - 1}\text{（＝代入）}}{n(X_B) = 2}\text{（演推）}$$

$$\dfrac{\dfrac{n(X_A) = 1 \qquad 1 < 2}{n(X_A) < 2}\text{（推移律）} \qquad \dfrac{n(X_B) = 2}{2 = n(X_B)}\text{（対称律）}}{B_3 : n(X_A) < n(X_B)}\text{（推移律）}$$

付録６　割合に関する概念的知識の「比較量に関する状況」におけるの児童の考え方

①水準０：第３章の「3.2.2　比較量に関する状況」を参照。
②水準１(段階1A)：第３章の「3.2.2　比較量に関する状況」を参照。
③水準１(段階1B)：第３章の「3.2.2　比較量に関する状況」を参照。

④水準２

調査問題	仮定	正答	結論	正誤
問題５	$\neg A_1$ C_2 D_1	B_2	B_2	正答

児童の考え方

(Ⅰ)は第３章の「3.2.2　比較量に関する状況」を参照。

(Ⅱ)　D_1 となる条件として，「$n(X_A)=n(Y_A)$，$n(X_B)=n(Y_B)$」を考えている。

$$\dfrac{n(X_A)=n(Y_A) \qquad \mathbf{n(X_A)=n(Y_A)\rightarrow H(X_A)}}{H(X_A):P(X_A)=1/2}\ (\rightarrow\text{除})$$

$$\dfrac{n(X_B)=n(Y_B) \qquad \mathbf{n(X_B)=n(Y_B)\rightarrow H(X_B)}}{H(X_B):P(X_B)=1/2}\ (\rightarrow\text{除})$$

$$\dfrac{\dfrac{H(X_A) \quad H(X_B)}{H(X_A)\wedge H(X_B)}\ (\wedge\text{入}) \qquad \mathbf{H(X_A)\wedge H(X_B)\rightarrow P(X_A)=P(X_B)}}{D_1:P(X_A)=P(X_B)}\ (\rightarrow\text{除})$$

$$\dfrac{n(X_A)=n(Y_A) \qquad C_2:n(Y_A)>n(Y_B)}{n(X_A)>n(Y_B)}\ (\text{推移律})$$

$$\dfrac{n(X_A)>n(Y_B) \qquad \dfrac{n(X_B)=n(Y_B)}{n(Y_B)=n(X_B)}\ (\text{対称律})}{B_2:n(X_A)>n(X_B)}\ (\text{推移律})$$

(Ⅲ)
$$\dfrac{1=1 \qquad D_1:P(X_A)=P(X_B)}{1-P(X_A)=1-P(X_B)}\ (==)$$

$$\dfrac{\dfrac{\text{定理１}:P(Y)=1-P(X) \qquad P(X)=P(X_A) \quad P(Y)=P(Y_A)}{P(Y_A)=1-P(X_A)}\ (=\text{代入})}{1-P(X_A)=P(Y_A)}\ (\text{対称律})$$

$$\dfrac{\dfrac{\text{定理１}:P(Y)=1-P(X) \qquad P(X)=P(X_B) \quad P(Y)=P(Y_B)}{P(Y_B)=1-P(X_B)}\ (=\text{代入})}{1-P(X_B)=P(Y_B)}\ (\text{対称律})$$

$$\frac{1 - P(X_A) = 1 - P(X_B) \quad 1 - P(X_A) = P(Y_A) \quad 1 - P(X_B) = P(Y_B)}{E_1 : P(Y_A) = P(Y_B)} \text{（＝代入）}$$

$$\frac{\text{定義}：P(Z) = n(Z) \div n(S) \quad n(Z) = n(Y_A) \quad n(S) = n(S_A) \quad P(Z) = P(Y_A)}{P(Y_A) = n(Y_A) \div n(S_A)} \text{（＝代入）}$$

$$\frac{\text{定義}：P(Z) = n(Z) \div n(S) \quad n(Z) = n(Y_B) \quad n(S) = n(S_B) \quad P(Z) = P(Y_B)}{P(Y_B) = n(Y_B) \div n(S_B)} \text{（＝代入）}$$

$$\frac{P(Y_A) = P(Y_B) \quad P(Y_A) = n(Y_A) \div n(S_A) \quad P(Y_B) = n(Y_B) \div n(S_B)}{n(Y_A) \div n(S_A) = n(Y_B) \div n(S_B)} \text{（＝代入）}$$

$$\frac{1 = 1 \quad n(Y_A) \div n(S_A) = n(Y_B) \div n(S_B)}{1 \div (n(Y_A) \div n(S_A)) = 1 \div (n(Y_B) \div n(S_B))} \text{（＝＝）}$$

$$\frac{1 \div (n(Y_A) \div n(S_A)) = 1 \div (n(Y_B) \div n(S_B))}{n(S_A) \div n(Y_A) = 1 \div (n(Y_B) \div n(S_B))} \text{（演推）※1}$$

$$\frac{n(S_A) \div n(Y_A) = 1 \div (n(Y_B) \div n(S_B))}{n(S_A) \div n(Y_A) = n(S_B) \div n(Y_B)} \text{（演推）※1}$$

※1	※1
$1 \div (n(Y_A) \div n(S_A))$	$1 \div (n(Y_B) \div n(S_B))$
$= 1 \times n(S_A) \div (n(Y_A) \div n(S_A) \times n(S_A))$	$= 1 \times n(S_B) \div (n(Y_B) \div n(S_B) \times n(S_B))$
$= n(S_A) \div n(Y_A)$	$= n(S_B) \div n(Y_B)$

$$\frac{C_2 : n(Y_A) > n(Y_B) \quad n(S_A) \div n(Y_A) = n(S_B) \div n(Y_B)}{n(Y_A) \times n(S_A) \div n(Y_A) > n(Y_B) \times n(S_B) \div n(Y_B)} \text{（>＝1）}$$

$$\frac{n(Y_A) \times n(S_A) \div n(Y_A) > n(Y_B) \times n(S_B) \div n(Y_B)}{n(S_A) > n(Y_B) \times n(S_B) \div n(Y_B)} \text{（演推）※4}$$

$$\frac{n(S_A) > n(Y_B) \times n(S_B) \div n(Y_B)}{A_2 : n(S_A) > n(S_B)} \text{（演推）※4}$$

※4	※4
$n(Y_A) \times n(S_A) \div n(Y_A)$	$n(Y_B) \times n(S_B) \div n(Y_B)$
$= n(S_A) \times n(Y_A) \div n(Y_A)$	$= n(S_B) \times n(Y_B) \div n(Y_B)$
$= n(S_A) \times 1$	$= n(S_B) \times 1$
$= n(S_A)$	$= n(S_B)$

$$\frac{A_2 : n(S_A) > n(S_B) \quad D_1 : P(X_A) > P(X_B)}{n(S_A) \times P(X_A) > n(S_B) \times P(X_B)} \text{（>>1）}$$

$$\frac{\text{定理３}：n(Z) = n(S) \times P(Z) \quad n(Z) = n(X_A) \quad n(S) = n(S_A) \quad P(Z) = P(X_A)}{n(X_A) = n(S_A) \times P(X_A)} \text{（＝代入）}$$

$$\frac{n(X_A) = n(S_A) \times P(X_A)}{n(S_A) \times P(X_A) = n(X_A)} \text{（対称律）}$$

$$\frac{\text{定理３}：n(Z) = n(S) \times P(Z) \quad n(Z) = n(X_B) \quad n(S) = n(S_B) \quad P(Z) = P(X_B)}{n(X_B) = n(S_B) \times P(X_B)} \text{（＝代入）}$$

$$\frac{n(X_B) = n(S_B) \times P(X_B)}{n(S_B) \times P(X_B) = n(X_B)} \text{（対称律）}$$

<table>
<tr><td colspan="3">$\underline{\mathbf{n(S_A)\times P(X_A)>n(S_B)\times P(X_B)}}$　$\underline{n(S_A)\times P(X_A)=n(X_A)\quad n(S_B)\times P(X_B)=n(X_B)}$ （＝代入）
$B_2：n(X_A)>n(X_B)$</td></tr>
<tr><td>調査問題</td><td>仮定の候補</td><td>正誤</td></tr>
<tr><td>問題３</td><td>$\neg A_1$
C_2
D_3</td><td>正答</td></tr>
<tr><td colspan="3">正答</td></tr>
<tr><td colspan="3">$(\exists x\exists y\exists z\exists w\,[n(Y_A)=x\wedge n(Y_B)=y\wedge x>y$
$\wedge\, n(S_A)=z\wedge n(S_B)=w\wedge z>w$
$\wedge\, P(X_A)=(z-x)/z\wedge P(X_B)=(w-y)/w\wedge(z-x)/z<(w-y)/w$
$\wedge\, n(X_A)=z-x\wedge n(X_B)=w-y\wedge z-x=w-y])$
$\wedge(\exists x'\exists y'\exists z'\exists w'\,[n(Y_A)=x'\wedge n(Y_B)=y'\wedge x'>y'$
$\wedge\, n(S_A)=z'\wedge n(S_B)=w'\wedge z'>w'$
$\wedge\, P(X_A)=(z'-x')/z'\wedge P(X_B)=(w'-y')/w'\wedge(z'-x')/z'<(w'-y')/w'$
$\wedge\, n(X_A)=z'-x'\wedge n(X_B)=w'-y'\wedge z'-x'>w'-y'])$
$\wedge(\exists x''\exists y''\exists z''\exists w''\,[n(Y_A)=x''\wedge n(Y_B)=y''\wedge x''>y''$
$\wedge\, n(S_A)=z''\wedge n(S_B)=w''\wedge z''>w''$
$\wedge\, P(X_A)=(z''-x'')/z''\wedge P(X_B)=(w''-y'')/w''\wedge(z''-x'')/z''<(w''-y'')/w''$
$\wedge\, n(X_A)=z''-x''\wedge n(X_B)=w''-y''\wedge z''-x''<w''-y''])$</td></tr>
<tr><td colspan="3">結論</td></tr>
<tr><td colspan="3">(Ⅰ)は第３章の「3.2.2　比較量に関する状況」を参照。

(Ⅱ)　$(\exists x\exists y\exists z\exists w\,[n(X_A)=x\wedge n(X_B)=y\wedge x<y$
$\wedge\, n(Y_A)=z\wedge n(Y_B)=w\wedge z>w$
$\wedge\, P(X_A)=x/(x+z)\wedge P(X_B)=y/(y+w)\wedge x/(x+z)<y/(y+w)])$
$\wedge(\exists x'\exists y'\exists z'\exists w'\,[n(X_A)=x'\wedge n(X_B)=y'\wedge x'=y'$
$\wedge\, n(Y_A)=z'\wedge n(Y_B)=w'\wedge z'>w'$
$\wedge\, P(X_A)=x'/(x'+z')\wedge P(X_B)=y'/(y'+w')\wedge x'/(x'+z')<y'/(y'+w')])$
$\wedge(\exists x''\exists y''\exists z''\exists w''\,[n(X_A)=x''\wedge n(X_B)=y''\wedge n(Y_A)=z''\wedge n(Y_B)=w''$
$\wedge\, x''<z''\wedge y''>w''\wedge x''>y''\wedge z''>w''$
$\wedge\, P(X_A)=x''/(x''+z'')\wedge P(X_B)=y''/(y''+w'')\wedge x''/(x''+z'')<y''/(y''+w'')])$

(Ⅲ)　$(\exists x\exists y\exists z\exists w\,[n(X_A)=x\wedge n(X_B)=y\wedge x=y$
$\wedge\, n(Y_A)=z\wedge n(Y_B)=w\wedge z>w$
$\wedge\, n(S_A)=x+z\wedge n(S_B)=y+w\wedge x+z>y+w$
$\wedge\, P(X_A)=x/(x+z)\wedge P(X_B)=y/(y+w)\wedge x/(x+z)<y/(y+w)])$
$\wedge(\exists x'\exists y'\exists z'\exists w'\,[n(X_A)=x'\wedge n(X_B)=y'\wedge x'<y'$
$\wedge\, n(Y_A)=z'\wedge n(Y_B)=w'\wedge z'>w'$
$\wedge\, n(S_A)=x'+z'\wedge n(S_B)=y'+w'\wedge x'+z'<y'+w'$
$\wedge\, P(X_A)=x'/(x'+z')\wedge P(X_B)=y'/(y'+w')\wedge x'/(x'+z')<y'/(y'+w')])$
$\wedge(\exists x''\exists y''\exists z''\exists w''\,[n(X_A)=x''\wedge n(X_B)=y''\wedge x''>y''$
$\wedge\, n(Y_A)=z''\wedge n(Y_B)=w''\wedge z''>w''$
$\wedge\, n(S_A)=x''+z''\wedge n(S_B)=y''+w''\wedge x''+z''>y''+w''$
$\wedge\, P(X_A)=x''/(x''+z'')\wedge P(X_B)=y''/(y''+w'')\wedge x''/(x''+z'')<y''/(y''+w'')])$</td></tr>
<tr><td colspan="3">児童の考え方</td></tr>
</table>

(Ⅰ)は第３章の「3.2.2　比較量に関する状況」を参照。

(Ⅱ)　$n(X_A)=a,\ n(X_B)=b,\ n(Y_A)=c,\ n(Y_B)=d$ …①

①の「,」を除いて列記したものを$\boxed{1}$とする。

$$\dfrac{\boxed{1}\qquad a<b\qquad c>d\qquad a/(a+c)<b/(b+d)}{\begin{array}{l}\exists x\,\exists y\,\exists z\,\exists w\,[n(X_A)=x\wedge n(X_B)=y\wedge x<y\\ \qquad\wedge\, n(Y_A)=z\wedge n(Y_B)=w\wedge z>w\\ \qquad\wedge\, P(X_A)=x/(x+z)\wedge P(X_B)=y/(y+w)\wedge x/(x+z)<y/(y+w)]\ \text{…ⓐ}\end{array}}\ (\exists\exists\text{入})$$

$n(X_A)=a',\ n(X_B)=b',\ n(Y_A)=c',\ n(Y_B)=d'$…②

②の「,」を除いて列記したものを$\boxed{2}$とする。

$$\dfrac{\boxed{2}\qquad a'=b'\qquad c'>d'\qquad a'/(a'+c')<b'/(b'+d')}{\begin{array}{l}\exists x'\,\exists y'\,\exists z'\,\exists w'\,[n(X_A)=x'\wedge n(X_B)=y'\wedge x'=y'\\ \qquad\wedge\, n(Y_A)=z'\wedge n(Y_B)=w'\wedge z'>w'\\ \qquad\wedge\, P(X_A)=x'/(x'+z')\wedge P(X_B)=y'/(y'+w')\wedge x'/(x'+z')<y'/(y'+w')]\ \text{…ⓑ}\end{array}}\ (\exists\exists\text{入})$$

$n(X_A)=a'',\ n(X_B)=b'',\ n(Y_A)=c'',\ n(Y_B)=d'',\ a''<c'',\ b''>d''$…③

③の「,」を除いて列記したものを$\boxed{3}$とする。

$$\dfrac{\boxed{3}\qquad a''>b''\qquad c''>d''\qquad a''/(a''+c'')<b''/(b''+d'')}{\begin{array}{l}\exists x''\,\exists y''\,\exists z''\,\exists w''\,[n(X_A)=x''\wedge n(X_B)=y''\wedge n(Y_A)=z''\wedge n(Y_B)=w''\\ \qquad\wedge\, x''<z''\wedge y''>w''\wedge x''>y''\wedge z''>w''\\ \qquad\wedge\, P(X_A)=x''/(x''+z'')\wedge P(X_B)=y''/(y''+w'')\wedge x''/(x''+z'')<y''/(y''+w'')]\ \text{…ⓒ}\end{array}}\ (\exists\exists\text{入})$$

$$\dfrac{\text{ⓐ}\qquad\text{ⓑ}\qquad\text{ⓒ}}{\begin{array}{l}(\exists x\,\exists y\,\exists z\,\exists w\,[n(X_A)=x\wedge n(X_B)=y\wedge x<y\\ \qquad\wedge\, n(Y_A)=z\wedge n(Y_B)=w\wedge z>w\\ \qquad\wedge\, P(X_A)=x/(x+z)\wedge P(X_B)=y/(y+w)\wedge x/(x+z)<y/(y+w)])\\ \wedge(\exists x'\,\exists y'\,\exists z'\,\exists w'\,[n(X_A)=x'\wedge n(X_B)=y'\wedge x'=y'\\ \qquad\wedge\, n(Y_A)=z'\wedge n(Y_B)=w'\wedge z'>w'\\ \qquad\wedge\, P(X_A)=x'/(x'+z')\wedge P(X_B)=y'/(y'+w')\wedge x'/(x'+z')<y'/(y'+w')])\\ \wedge(\exists x''\,\exists y''\,\exists z''\,\exists w''\,[n(X_A)=x''\wedge n(X_B)=y''\wedge n(Y_A)=z''\wedge n(Y_B)=w''\\ \qquad\wedge\, x''<z''\wedge y''>w''\wedge x''>y''\wedge z''>w''\\ \qquad\wedge\, P(X_A)=x''/(x''+z'')\wedge P(X_B)=y''/(y''+w'')\wedge x''/(x''+z'')<y''/(y''+w'')])\end{array}}\ (\wedge\wedge\text{入})$$

$n(X_A)$と $n(X_B)$の大小関係及び相等関係として，「$n(X_A)>n(X_B)$」，「$n(X_A)=n(X_B)$」，「$n(X_A)<n(X_B)$」の３つを条件を仮定して考えている。

(1) $n(X_A) < n(X_B)$

$n(X_A) = a$，$n(X_B) = b$，$n(Y_A) = c$，$n(Y_B) = d$ とすると，$a < b$，$c > d$，$a/(a+c) < b/(b+d)$ の条件が導かれる。

$$\frac{n(X_A) < n(X_B) \qquad n(X_A) = a \qquad n(X_B) = b}{a < b}\ (=\text{代入})$$

$$\frac{C_2 : n(Y_A) > n(Y_B) \qquad n(Y_A) = c \qquad n(Y_B) = d}{c > d}\ (=\text{代入})$$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{1 = 1 \qquad \cfrac{a < b \qquad \cfrac{c > d}{d < c}\ (<>)}{a \div c < b \div d}\ (>>2)}{1 \div (a \div c) > 1 \div (b \div d)}\ (>=2)}{c \div a > 1 \div (b \div d)}\ (\text{演推})※1}{c \div a > b \div d}\ (\text{演推})※1$$

※1
$1 \div (a \div c)$
$= (1 \times c) \div (a \div c \times c)$
$= c \div a$

※1
$1 \div (b \div d)$
$= (1 \times d) \div (b \div d \times d)$
$= d \div b$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{1 = 1 \qquad c \div a > d \div b}{1 + (c \div a) > 1 + (d \div b)}\ (>=1)}{(a+c) \div a > 1 + (d \div b)}\ (\text{演推})※2}{(a+c) \div a > (b+d) \div b}\ (\text{演推})※2$$

※2
$1 + (c \div a)$
$= (a \div a) + (c \div a)$
$= (a + c) \div a$

※2
$1 + (d \div b)$
$= (b \div b) + (d \div b)$
$= (b + d) \div b$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{1 = 1 \qquad \cfrac{\cfrac{(a+c) \div a > (b+d) \div b}{(a+c)/a > (b+d) \div b}\ (\text{演推})}{(a+c)/a > (b+d)/b}\ (\text{演推})}{1 \div (a+c)/a < 1 \div (b+d)/b}\ (>=2)}{a/(a+c) < 1 \div (b+d)/b}\ (\text{演推})※6}{a/(a+c) < b/(b+d)}\ (\text{演推})※6$$

※6
$1 \div (a+c)/a = (1 \times a) \div ((a+c)/a \times a)$
$= a \div (a+c)$

※6
$1 \div (b+d)/b = (1 \times b) \div ((b+d)/b \times b)$
$= b \div (b+d)$

(2) $n(X_A) = n(X_B)$

$n(X_A) = a'$，$n(X_B) = b'$，$n(Y_A) = c'$，$n(Y_B) = d'$ とすると，$a' = b'$，$c' > d'$，$a'/(a'+c') < b'/(b'+d')$ の条件が導かれる。

$$\frac{n(X_A) = n(X_B) \qquad n(X_A) = a' \qquad n(X_B) = b'}{a' = b'}\ (=\text{代入})$$

$$\frac{C_2 : n(Y_A) > n(Y_B) \qquad n(Y_A) = c' \qquad n(Y_B) = d'}{c' > d'}\ (=\text{代入})$$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{1 = 1 \qquad \cfrac{a' = b' \qquad c' > d'}{a' \div c' < b' \div d'}\ (>=2)}{1 \div (a' \div c') > 1 \div (b' \div d')}\ (>=2)}{c' \div a' > 1 \div (b' \div d')}\ (\text{演推})※1}{c' \div a' > d' \div b'}\ (\text{演推})※1$$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{1=1 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{1=1 \qquad c'\div a'>d'\div b'}{1+(c'\div a')>1+(d'\div b')}\,(>=1)}{(a'+c')\div a'>1+(d'\div b')}\,(\text{演推})\text{※}2}{(a'+c')\div a'>(b'+d')\div b'}\,(\text{演推})\text{※}2}{(a'+c')/a'>(b'+d')\div b'}\,(\text{演推})}{(a'+c')/a'>(b'+d')/b'}\,(\text{演推})}{1\div(a'+c')/a'<1\div(b'+d')/b'}\,(>=2)}{a'/(a'+c')<1\div(b'+d')/b'}\,(\text{演推})\text{※}6}{a'/(a'+c')<b'/(b'+d')}\,(\text{演推})\text{※}6
$$

(3) $n(X_A)>n(X_B)$

$n(X_A)>n(X_B)$ と C_2 の条件から D_3 を導くことができない。そこで，「当たりくじの本数がはずれくじの本数より多いくじは，当たりくじの方が出やすい」，「はずれくじの本数が当たりくじの本数より多いくじは，はずれくじの方が出やすい」という考えに基づいて，D_3 となる条件として，「$n(X_A)<n(Y_A)$，$n(X_B)>n(Y_B)$」を考えている。

$$
\dfrac{n(X_A)<n(Y_A) \qquad n(X_A)<n(Y_A)\to L(X_A)}{L(X_A):P(X_A)<1/2}\,(\to\text{除})
$$

$$
\dfrac{n(X_B)>n(Y_B) \qquad n(X_B)>n(Y_B)\to W(X_B)}{W(X_B):P(X_B)>1/2}\,(\to\text{除})
$$

$$
\dfrac{\dfrac{L(X_A) \quad W(X_B)}{L(X_A)\wedge W(X_B)}\,(\wedge\text{入}) \qquad L(X_A)\wedge W(X_B)\to P(X_A)<P(X_B)}{D_3: P(X_A)<P(X_B)}\,(\to\text{除})
$$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{n(X_A)<n(Y_A)}{n(Y_A)>n(X_A)}\,(<>) \qquad n(X_A)>n(X_B)}{n(Y_A)>n(X_B)}\,(\text{推移律}) \qquad n(X_B)>n(Y_B)}{C_2: n(Y_A)>n(Y_B)}\,(\text{推移律})
$$

$n(X_A)=a''$，$n(X_B)=b''$，$n(Y_A)=c''$，$n(Y_B)=d''$とすると，$a''>b''$，$c''>d''$，$a''<c''$，$b''>d''$，$a''/(a''+c'')<b''/(b''+d'')$の条件が導かれる。

$$
\dfrac{n(X_A)>n(X_B) \qquad n(X_A)=a'' \qquad n(X_B)=b''}{a''>b''}\,(=\text{代入})
$$

$$
\dfrac{n(X_A)<n(Y_A) \qquad n(X_A)=a'' \qquad n(Y_A)=c''}{a''<c''}\,(=\text{代入})
$$

$$
\dfrac{n(X_B)>n(Y_B) \qquad n(X_B)=b'' \qquad n(Y_B)=d''}{b''>d''}\,(=\text{代入})
$$

$$
\dfrac{C_2: n(Y_A)>n(Y_B) \qquad n(Y_A)=c'' \qquad n(Y_B)=d''}{c''>d''}\,(=\text{代入})
$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{1=1 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{反射律：}a''=a'' \qquad a''<c''}{a''+a''<a''+c''}\text{（＞＝１）} \qquad a''=a''}{(a''+a'')\div a''<(a''+c'')\div a''}\text{（＞＝１）}}{2<(a''+c'')\div a''}\text{（演推）※５}}{2<(a''+c'')/a''}\text{（演推）}}{1\div 2>1\div(a''+c'')/a''}\text{（＞＝２）}}{1/2>1\div(a''+c'')/a''}\text{（演推）}}{1/2>a''/(a''+c'')}\text{（演推）※６}}{}$$

※５
$$
\begin{aligned}
(a''+a'')\div a'' &= a''\div a''+a''\div a''\\
&= 1+1\\
&= 2
\end{aligned}
$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{1=1 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{反射律：}b''=b'' \qquad b''>d''}{b''+b''>b''+d''}\text{（＞＝１）} \qquad b''=b''}{(b''+b'')\div b''>(b''+d'')\div b''}\text{（＞＝１）}}{2>(b''+d'')\div b''}\text{（演推）※５}}{2>(b''+d'')/b''}\text{（演推）}}{1\div 2<1\div(b''+d'')/b''}\text{（＞＝２）}}{1/2<1\div(b''+d'')/b''}\text{（演推）}}{1/2<b''/(b''+d'')}\text{（演推）※６}}{}$$

※５
$$
\begin{aligned}
(b''+b'')\div b'' &= b''\div b''+b''\div b''\\
&= 1+1\\
&= 2
\end{aligned}
$$

$$\dfrac{\dfrac{1/2>a''/(a''+c'')}{a''/(a''+c'')<1/2}\text{（＜＞）} \qquad 1/2<b''/(b''+d'')}{a''/(a''+c'')<b''/(b''+d'')}\text{（推移律）}$$

（Ⅲ）　$n(X_A)=10$，$n(X_B)=10$，$n(Y_A)=10$，$n(Y_B)=5$…①

①の「,」を除いて列記したものを$\boxed{1}$とする。

$$\dfrac{\boxed{1} \qquad 10=10 \qquad 10>5 \qquad 10+10>10+5 \qquad 10/(10+10)<10/(10+5)}{\begin{aligned}\exists x\exists y\exists z\exists w\,[&n(X_A)=x\wedge n(X_B)=y\wedge x=y\\ &\wedge n(Y_A)=z\wedge n(Y_B)=w\wedge z>w\\ &\wedge n(S_A)=x+z\wedge n(S_B)=y+w\wedge x+z>y+w\\ &\wedge P(X_A)=x/(x+z)\wedge P(X_B)=y/(y+w)\wedge x/(x+z)<y/(y+w)]\end{aligned}}\text{（∃∃入）}\ \cdots ⓐ$$

$n(X_A)=10$，$n(X_B)=20$，$n(Y_A)=10$，$n(Y_B)=5$…②

②の「,」を除いて列記したものを$\boxed{2}$とする。

$$\dfrac{\boxed{2} \qquad 10<20 \qquad 10>5 \qquad 10+10<20+5 \qquad 10/(10+10)<20/(20+5)}{\begin{aligned}\exists x'\exists y'\exists z'\exists w'\,[&n(X_A)=x'\wedge n(X_B)=y'\wedge x'<y'\\ &\wedge n(Y_A)=z'\wedge n(Y_B)=w'\wedge z'>w'\\ &\wedge n(S_A)=x'+z'\wedge n(S_B)=y'+w'\wedge x'+z'<y'+w'\\ &\wedge P(X_A)=x'/(x'+z')\wedge P(X_B)=y'/(y'+w')\wedge x'/(x'+z')<y'/(y'+w')]\end{aligned}}\text{（∃∃入）}\ \cdots ⓑ$$

$n(X_A)=15$，$n(X_B)=10$，$n(Y_A)=10$，$n(Y_B)=5$…③

③の「,」を除いて列記したものを$\boxed{3}$とする。

$$\frac{\boxed{3} \quad 15>10 \quad 10>5 \quad 15+10>10+5 \quad 15/(15+10)<10/(10+5)}{\begin{aligned}\exists x''\exists y''\exists z''\exists w''[&n(X_A)=x''\wedge n(X_B)=y''\wedge x''>y''\\ &\wedge n(Y_A)=z''\wedge n(Y_B)=w''\wedge z''>w''\\ &\wedge n(S_A)=x''+z''\wedge n(S_B)=y''+w''\wedge x''+z''>y''+w''\\ &\wedge P(X_A)=x''/(x''+z'')\wedge P(X_B)=y''/(y''+w'')\wedge x''/(x''+z'')<y''/(y''+w'')]\end{aligned}}(\exists\exists入)\cdots ⓒ$$

$$\frac{ⓐ \qquad ⓑ \qquad ⓒ}{\begin{aligned}(\exists x\exists y\exists z\exists w[&n(X_A)=x\wedge n(X_B)=y\wedge x=y\\ &\wedge n(Y_A)=z\wedge n(Y_B)=w\wedge z>w\\ &\wedge n(S_A)=x+z\wedge n(S_B)=y+w\wedge x+z>y+w\\ &\wedge P(X_A)=x/(x+z)\wedge P(X_B)=y/(y+w)\wedge x/(x+z)<y/(y+w)])\\ \wedge(\exists x'\exists y'\exists z'\exists w'[&n(X_A)=x'\wedge n(X_B)=y'\wedge x'<y'\\ &\wedge n(Y_A)=z'\wedge n(Y_B)=w'\wedge z'>w'\\ &\wedge n(S_A)=x'+z'\wedge n(S_B)=y'+w'\wedge x'+z'<y'+w'\\ &\wedge P(X_A)=x'/(x'+z')\wedge P(X_B)=y'/(y'+w')\wedge x'/(x'+z')<y'/(y'+w')])\\ \wedge(\exists x''\exists y''\exists z''\exists w''[&n(X_A)=x''\wedge n(X_B)=y''\wedge x''>y''\\ &\wedge n(Y_A)=z''\wedge n(Y_B)=w''\wedge z''>w''\\ &\wedge n(S_A)=x''+z''\wedge n(S_B)=y''+w''\wedge x''+z''>y''+w''\\ &\wedge P(X_A)=x''/(x''+z'')\wedge P(X_B)=y''/(y''+w'')\wedge x''/(x''+z'')<y''/(y''+w'')]\end{aligned}}(\wedge\wedge入)$$

$n(X_A)$と $n(X_B)$の大小関係及び相等関係として，「$n(X_A)>n(X_B)$」，「$n(X_A)=n(X_B)$」，「$n(X_A)<n($」$X_B)$の３つを条件を仮定して考えている。

10 とその半分である５を基本として，２つのくじの当たりくじの本数とはずれくじの本数を考えている。「$n(X_A)=n(X_B)$」と C_2 の条件を満たすように，$n(X_A)=10$，$n(X_B)=10$，$n(Y_A)=10$，$n(Y_B)=10$ の条件を基に，$n(Y_B)$の項に÷２している。

(1) $n(X_A)=10$，$n(X_B)=10$，$n(Y_A)=10$，$n(Y_B)=5\cdots$①

$$\frac{n(X_A)=10 \qquad \dfrac{n(X_B)=10}{10=n(X_B)}(対称律)}{B_1: n(X_A)=n(X_B)}(推移律)$$

$$\frac{\dfrac{n(Y_A)=10 \qquad 10>5}{n(Y_A)>5}(推移律) \qquad \dfrac{n(Y_B)=5}{5=n(Y_B)}(対称律)}{C_2: n(Y_A)>n(Y_B)}(推移律)$$

$$\frac{定理５: n(S)=n(X)+n(Y) \qquad n(X)=n(X_A) \quad n(Y)=n(Y_A) \quad n(S)=n(S_A)}{n(S_A)=n(X_A)+n(Y_A)}(=代入)$$

$$\frac{n(S_A)=n(X_A)+n(Y_A) \qquad n(X_A)=10 \quad n(Y_A)=10}{\dfrac{n(S_A)=10+10}{n(S_A)=20}(演推)}(=代入)$$

$$\frac{定理５: n(S)=n(X)+n(Y) \qquad n(X)=n(X_B) \quad n(Y)=n(Y_B) \quad n(S)=n(S_B)}{n(S_B)=n(X_B)+n(Y_B)}(=代入)$$

$$\dfrac{\dfrac{n(S_B)=n(X_B)+n(Y_B) \qquad n(X_B)=10 \quad n(Y_B)=5}{n(S_B)=10+5}\,(\text{=代入})}{n(S_B)=15}\,(\text{演推})$$

$$\dfrac{\dfrac{n(S_A)=20 \qquad 20>15}{n(S_A)>15}\,(\text{推移律}) \qquad \dfrac{n(S_B)=15}{15=n(S_B)}\,(\text{対称律})}{A_2 : n(S_A)>n(S_B)}\,(\text{推移律})$$

$$\dfrac{\dfrac{n(X_A)=10 \qquad n(S_A)=10+10}{n(X_A)\div n(S_A)=10\div(10+10)}\,(==)}{n(X_A)\div n(S_A)=1/2}\,(\text{演推})$$

$$\dfrac{\dfrac{n(X_A)\div n(S_A)=1/2 \qquad 1/2<2/3}{n(X_A)\div n(S_A)<2/3}\,(\text{推移律}) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{n(X_B)=10 \qquad n(S_B)=10+5}{n(X_B)\div n(S_B)=10\div(10+5)}\,(==)}{n(X_B)\div n(S_B)=2/3}\,(\text{演推})}{2/3=n(X_B)\div n(S_B)}\,(\text{対称律})}{n(X_A)\div n(S_A)<n(X_B)\div n(S_B)}\,(\text{推移律})$$

$$\dfrac{\dfrac{\text{定義}:P(Z)=n(Z)\div n(S) \qquad n(Z)=n(X_A) \quad n(S)=n(S_A) \quad P(Z)=P(X_A)}{P(X_A)=n(X_A)\div n(S_A)}\,(\text{=代入})}{n(X_A)\div n(S_A)=P(X_A)}\,(\text{対称律})$$

$$\dfrac{\dfrac{\text{定義}:P(Z)=n(Z)\div n(S) \qquad n(Z)=n(X_B) \quad n(S)=n(S_B) \quad P(Z)=P(X_B)}{P(X_B)=n(X_B)\div n(S_B)}\,(\text{=代入})}{n(X_B)\div n(S_B)=P(X_B)}\,(\text{対称律})$$

$$\dfrac{n(X_A)\div n(S_A)<n(X_B)\div n(S_B) \qquad n(X_A)\div n(S_A)=P(X_A) \quad n(X_B)\div n(S_B)=P(X_B)}{D_3 : P(X_A)<P(X_B)}\,(\text{=代入})$$

「$n(X_A) < n(X_B)$」と C_2 の条件を満たすように，D_3 となる $n(X_A)=10$，$n(X_B)=10$，$n(Y_A)=10$，$n(Y_B)=5$ の条件を基に，$n(X_B)$ の項に×２している。

(2) $n(X_A)=10$，$n(X_B)=20$，$n(Y_A)=10$，$n(Y_B)=5$

$$\dfrac{\dfrac{n(X_A)=10 \qquad 10<20}{n(X_A)<20}\,(\text{推移律}) \qquad \dfrac{n(X_B)=20}{20=n(X_B)}\,(\text{対称律})}{B_3 : n(X_A)<n(X_B)}\,(\text{推移律})$$

$$\dfrac{\dfrac{n(Y_A)=10 \qquad 10>5}{n(Y_A)>5}\,(\text{推移律}) \qquad \dfrac{n(Y_B)=5}{5=n(Y_B)}\,(\text{対称律})}{C_2 : n(Y_A)>n(Y_B)}\,(\text{推移律})$$

$$\dfrac{\text{定理５}:n(S)=n(X)+n(Y) \qquad n(X)=n(X_A) \quad n(Y)=n(Y_A) \quad n(S)=n(S_A)}{n(S_A)=n(X_A)+n(Y_A)}\,(\text{=代入})$$

$$\dfrac{\dfrac{n(S_A)=n(X_A)+n(Y_A) \qquad n(X_A)=10 \quad n(Y_A)=10}{n(S_A)=10+10}\ (=代入)}{n(S_A)=20}\ (演推)$$

$$\dfrac{定理５：n(S)=n(X)+n(Y) \qquad n(X)=n(X_B) \quad n(Y)=n(Y_B) \quad n(S)=n(S_B)}{n(S_B)=n(X_B)+n(Y_B)}\ (=代入)$$

$$\dfrac{\dfrac{n(S_B)=n(X_B)+n(Y_B) \qquad n(X_B)=20 \quad n(Y_B)=5}{n(S_B)=20+5}\ (=代入)}{n(S_B)=25}\ (演推)$$

$$\dfrac{\dfrac{n(S_A)=20 \qquad 20<25}{n(S_A)<25}\ (推移律) \qquad \dfrac{n(S_B)=25}{25=n(S_B)}\ (対称律)}{A_3：n(S_A)<n(S_B)}\ (推移律)$$

$$\dfrac{\dfrac{n(X_A)=10 \qquad n(S_A)=10+10}{n(X_A)\div n(S_A)=10\div(10+10)}\ (==)}{n(X_A)\div n(S_A)=1/2}\ (演推)$$

$$\dfrac{\dfrac{n(X_A)\div n(S_A)=1/2 \qquad 1/2<4/5}{n(X_A)\div n(S_A)<4/5}\ (推移律) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{n(X_B)=20 \qquad n(S_B)=20+5}{n(X_B)\div n(S_B)=20\div(20+5)}\ (==)}{n(X_B)\div n(S_B)=4/5}\ (演推)}{4/5=n(X_B)\div n(S_B)}\ (対称律)}{n(X_A)\div n(S_A)<n(X_B)\div n(S_B)}\ (推移律)$$

$$\dfrac{\dfrac{定義：P(Z)=n(Z)\div n(S) \qquad n(Z)=n(X_A) \quad n(S)=n(S_A) \quad P(Z)=P(X_A)}{P(X_A)=n(X_A)\div n(S_A)}\ (=代入)}{n(X_A)\div n(S_A)=P(X_A)}\ (対称律)$$

$$\dfrac{\dfrac{定義：P(Z)=n(Z)\div n(S) \qquad n(Z)=n(X_B) \quad n(S)=n(S_B) \quad P(Z)=P(X_B)}{P(X_B)=n(X_B)\div n(S_B)}\ (=代入)}{n(X_B)\div n(S_B)=P(X_B)}\ (対称律)$$

$$\dfrac{n(X_A)\div n(S_A)<n(X_B)\div n(S_B) \qquad n(X_A)\div n(S_A)=P(X_A) \quad n(X_B)\div n(S_B)=P(X_B)}{D_3：P(X_A)<P(X_B)}\ (=代入)$$

「$n(X_A)>n(X_B)$」と C_2 の条件を満たすように，D_3 となる $n(X_A)=10$，$n(X_B)=10$，$n(Y_A)=10$，$n(Y_B)=5$ の条件を基に，$n(X_A)$ の項に＋５している。

(3) $n(X_A)=15$，$n(X_B)=10$，$n(Y_A)=10$，$n(Y_B)=5$

$$\dfrac{\dfrac{n(X_A)=15 \qquad 15>10}{n(X_A)>10}\ (推移律) \qquad \dfrac{n(X_B)=10}{10=n(X_B)}\ (対称律)}{B_2：n(X_A)>n(X_B)}\ (推移律)$$

$$\frac{\dfrac{n(Y_A)=10 \qquad 10>5}{n(Y_A)>5}\text{（推移律）} \qquad \dfrac{n(Y_B)=5}{5=n(Y_B)}\text{（対称律）}}{C_2 : n(Y_A)>n(Y_B)}\text{（推移律）}$$

$$\frac{\text{定理５：}n(S)=n(X)+n(Y) \qquad n(X)=n(X_A) \quad n(Y)=n(Y_A) \quad n(S)=n(S_A)}{n(S_A)=n(X_A)+n(Y_A)}\text{（＝代入）}$$

$$\frac{\dfrac{n(S_A)=n(X_A)+n(Y_A) \qquad n(X_A)=15 \quad n(Y_A)=10}{n(S_A)=15+10}\text{（＝代入）}}{n(S_A)=25}\text{（演推）}$$

$$\frac{\text{定理５：}n(S)=n(X)+n(Y) \qquad n(X)=n(X_B) \quad n(Y)=n(Y_B) \quad n(S)=n(S_B)}{n(S_B)=n(X_B)+n(Y_B)}\text{（＝代入）}$$

$$\frac{\dfrac{n(S_B)=n(X_B)+n(Y_B) \qquad n(X_B)=10 \quad n(Y_B)=5}{n(S_B)=10+5}\text{（＝代入）}}{n(S_B)=15}\text{（演推）}$$

$$\frac{\dfrac{n(S_A)=25 \qquad 25>15}{n(S_A)>15}\text{（推移律）} \qquad \dfrac{n(S_B)=15}{15=n(S_B)}\text{（対称律）}}{A_2 : n(S_A)>n(S_B)}\text{（推移律）}$$

$$\frac{\dfrac{n(X_A)=15 \qquad n(S_A)=15+10}{n(X_A)\div n(S_A)=15\div(15+10)}\text{（＝＝）}}{n(X_A)\div n(S_A)=3/5}\text{（演推）}$$

$$\frac{\dfrac{n(X_A)\div n(S_A)=3/5 \qquad 3/5<2/3}{n(X_A)\div n(S_A)<2/3}\text{（推移律）} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{n(X_B)=10 \qquad n(S_B)=10+5}{n(X_B)\div n(S_B)=10\div(10+5)}\text{（＝＝）}}{n(X_B)\div n(S_B)=2/3}\text{（演推）}}{2/3=n(X_B)\div n(S_B)}\text{（対称律）}}{n(X_A)\div n(S_A)<n(X_B)\div n(S_B)}\text{（推移律）}$$

$$\frac{\dfrac{\text{定義：}P(Z)=n(Z)\div n(S) \qquad n(Z)=n(X_A) \quad n(S)=n(S_A) \quad P(Z)=P(X_A)}{P(X_A)=n(X_A)\div n(S_A)}\text{（＝代入）}}{n(X_A)\div n(S_A)=P(X_A)}\text{（対称律）}$$

$$\frac{\dfrac{\text{定義：}P(Z)=n(Z)\div n(S) \qquad n(Z)=n(X_B) \quad n(S)=n(S_B) \quad P(Z)=P(X_B)}{P(X_B)=n(X_B)\div n(S_B)}\text{（＝代入）}}{n(X_B)\div n(S_B)=P(X_B)}\text{（対称律）}$$

$$\frac{n(X_A)\div n(S_A)<n(X_B)\div n(S_B) \qquad n(X_A)\div n(S_A)=P(X_A) \quad n(X_B)\div n(S_B)=P(X_B)}{D_3 : P(X_A)<P(X_B)}\text{（＝代入）}$$

付録７　割合に関する概念的知識の「基準量に関する状況」の調査問題の証明

【問題１】

仮定の候補	定理	結論
A_1 B_2 D_2	（Ⅰ）$A_1 \land D_2 \to B_2$ （Ⅱ）$A_1 \land B_2 \to D_2$	C_3

証明

（Ⅰ）は第３章の「3.2.3　基準量に関する状況」を参照。

（Ⅱ）

$$\dfrac{B_2 : n(X_A) > n(X_B) \qquad A_1 : n(S_A) = n(S_B)}{n(X_A) \div n(S_A) > n(X_B) \div n(S_B)}\ (>=1)$$

$$\dfrac{\dfrac{\text{定義}: P(Z) = n(Z) \div n(S) \qquad n(Z) = n(X_A) \quad n(S) = n(S_A) \quad P(Z) = P(X_A)}{P(X_A) = n(X_A) \div n(S_A)}\ (=\text{代入})}{n(X_A) \div n(S_A) = P(X_A)}\ (\text{対称律})$$

$$\dfrac{\dfrac{\text{定義}: P(Z) = n(Z) \div n(S) \qquad n(Z) = n(X_B) \quad n(S) = n(S_B) \quad P(Z) = P(X_B)}{P(X_B) = n(X_B) \div n(S_B)}\ (=\text{代入})}{n(X_B) \div n(S_B) = P(X_B)}\ (\text{対称律})$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{n(X_A) \div n(S_A) > n(X_B) \div n(S_B) \qquad n(X_A) \div n(S_A) = P(X_A) \quad n(X_B) \div n(S_B) = P(X_B)}{D_2 : P(X_A) > P(X_B)}\ (=\text{代入})}{B_2 \to D_2}\ (\to\text{入})}{A_1 \to (B_2 \to D_2)}\ (\to\text{入})}{A_1 \land B_2 \to D_2}\ (\text{移入})$$

仮定の候補の内，矛盾した条件はない。A_1 と B_2 を仮定する場合，D_2 は仮定として必要ない。

（Ⅱ）

$$\dfrac{A_1 : n(S_A) = n(S_B) \qquad B_2 : n(X_A) > n(X_B)}{n(S_A) - n(X_A) < n(S_B) - n(X_B)}\ (>=2)$$

$$\dfrac{\dfrac{\text{定理６}: n(Y) = n(S) - n(X) \qquad n(X) = n(X_A) \quad n(Y) = n(Y_A) \quad n(S) = n(S_A)}{n(Y_A) = n(S_A) - n(X_A)}\ (=\text{代入})}{n(S_A) - n(X_A) = n(Y_A)}\ (\text{対称律})$$

$$\dfrac{\dfrac{\text{定理６}: n(Y) = n(S) - n(X) \qquad n(X) = n(X_B) \quad n(Y) = n(Y_B) \quad n(S) = n(S_B)}{n(Y_B) = n(S_B) - n(X_B)}\ (=\text{代入})}{n(S_B) - n(X_B) = n(Y_B)}\ (\text{対称律})$$

$$\dfrac{n(S_A) - n(X_A) < n(S_B) - n(X_B) \quad n(S_A) - n(X_A) = n(Y_A) \quad n(S_B) - n(X_B) = n(Y_B)}{C_3 : n(Y_A) < n(Y_B)}\ (=\text{代入})$$

A_1 と B_2 を仮定し，結論として証明されるのは，C_3 である。

【問題２】

仮定の候補	定理	結論
A_1 B_1 D_1	（Ⅰ）$A_1 \wedge D_1 \to \mathrm{B}_1$ （Ⅱ）$A_1 \wedge B_1 \to D_1$	C_1

証明

（Ⅰ）

$$\frac{A_1 : \mathrm{n(S_A) = n(S_B)} \qquad D_1 : \mathrm{P(X_A) = P(X_B)}}{\mathrm{n(S_A) \times P(X_A) = n(S_B) \times P(X_B)}}\ (==)$$

$$\cfrac{\text{定理３}: \mathrm{n(Z) = n(S) \times P(Z)} \qquad \mathrm{n(Z) = n(X_A)} \quad \mathrm{n(S) = n(S_A)} \quad \mathrm{P(Z) = P(X_A)}}{\cfrac{\mathrm{n(X_A) = n(S_A) \times P(X_A)}}{\mathrm{n(S_A) \times P(X_A) = n(X_A)}}\ (\text{対称律})}\ (=\text{代入})$$

$$\cfrac{\text{定理３}: \mathrm{n(Z) = n(S) \times P(Z)} \qquad \mathrm{n(Z) = n(X_B)} \quad \mathrm{n(S) = n(S_B)} \quad \mathrm{P(Z) = P(X_B)}}{\cfrac{\mathrm{n(X_B) = n(S_B) \times P(X_B)}}{\mathrm{n(S_B) \times P(X_B) = n(X_B)}}\ (\text{対称律})}\ (=\text{代入})$$

$$\cfrac{\mathrm{n(S_A) \times P(X_A) = n(S_B) \times P(X_B)} \qquad \mathrm{n(S_A) \times P(X_A) = n(X_A)} \quad \mathrm{n(S_B) \times P(X_B) = n(X_B)}}{\cfrac{\cfrac{\cfrac{B_1 : \mathrm{n(X_A) = n(X_B)}}{D_1 \to B_1}\ (\to\text{入})}{A_1 \to (D_1 \to B_1)}\ (\to\text{入})}{A_1 \wedge D_1 \to B_1}\ (\text{移入})}\ (=\text{代入})$$

仮定の候補の内，矛盾した条件はない。A_1 と D_1 を仮定する場合，B_1 は仮定として必要ない。

（Ⅰ）

$$\frac{A_1 : \mathrm{n(S_A) = n(S_B)} \qquad D_1 : \mathrm{P(X_A) = P(X_B)}}{\mathrm{n(S_A) \times P(X_A) = n(S_B) \times P(X_B)}}\ (==)$$

$$\cfrac{\text{定理３}: \mathrm{n(Z) = n(S) \times P(Z)} \qquad \mathrm{n(Z) = n(X_A)} \quad \mathrm{n(S) = n(S_A)} \quad \mathrm{P(Z) = P(X_A)}}{\cfrac{\mathrm{n(X_A) = n(S_A) \times P(X_A)}}{\mathrm{n(S_A) \times P(X_A) = n(X_A)}}\ (\text{対称律})}\ (=\text{代入})$$

$$\cfrac{\text{定理３}: \mathrm{n(Z) = n(S) \times P(Z)} \qquad \mathrm{n(Z) = n(X_B)} \quad \mathrm{n(S) = n(S_B)} \quad \mathrm{P(Z) = P(X_B)}}{\cfrac{\mathrm{n(X_B) = n(S_B) \times P(X_B)}}{\mathrm{n(S_B) \times P(X_B) = n(X_B)}}\ (\text{対称律})}\ (=\text{代入})$$

$$\frac{\mathrm{n(S_A) \times P(X_A) = n(S_B) \times P(X_B)} \qquad \mathrm{n(S_A) \times P(X_A) = n(X_A)} \quad \mathrm{n(S_B) \times P(X_B) = n(X_B)}}{B_1 : \mathrm{n(X_A) = n(X_B)}}\ (=\text{代入})$$

$$\frac{A_1 : \mathrm{n(S_A) = n(S_B)} \qquad B_1 : \mathrm{n(X_A) = n(X_B)}}{\mathrm{n(S_A) - n(X_A) = n(S_B) - n(X_B)}}\ (==)$$

$$\cfrac{\text{定理６}: \mathrm{n(Y) = n(S) - n(X)} \qquad \mathrm{n(X) = n(X_A)} \quad \mathrm{n(Y) = n(Y_A)} \quad \mathrm{n(S) = n(S_A)}}{\cfrac{\mathrm{n(Y_A) = n(S_A) - n(X_A)}}{\mathrm{n(S_A) - n(X_A) = n(Y_A)}}\ (\text{対称律})}\ (=\text{代入})$$

$$\dfrac{\dfrac{\text{定理６：}n(Y)=n(S)-n(X)\qquad n(X)=n(X_B)\quad n(Y)=n(Y_B)\quad n(S)=n(S_B)}{n(Y_B)=n(S_B)-n(X_B)}\text{（＝代入）}}{n(S_B)-n(X_B)=n(Y_B)}\text{（対称律）}$$

$$\dfrac{(S_A)-n(X_A)=n(S_B)-n(X_B)\qquad n(S_A)-n(X_A)=n(Y_A)\quad n(S_B)-n(X_B)=n(Y_B)}{C_1: n(Y_A)=n(Y_B)}\text{（＝代入）}$$

A_1 と D_1 を仮定し，結論として証明されるのは，C_1 である。

（Ⅱ）

$$\dfrac{A_1: n(S_A)=n(S_B)\qquad B_1: n(X_A)=n(X_B)}{n(X_A)\div n(S_A)=n(X_B)\div n(S_B)}\text{（＝＝）}$$

$$\dfrac{\dfrac{\text{定義：}P(Z)=n(Z)\div n(S)\qquad n(Z)=n(X_A)\quad n(S)=n(S_A)\quad P(Z)=P(X_A)}{P(X_A)=n(X_A)\div n(S_A)}\text{（＝代入）}}{n(X_A)\div n(S_A)=P(X_A)}\text{（対称律）}$$

$$\dfrac{\dfrac{\text{定義：}P(Z)=n(Z)\div n(S)\qquad n(Z)=n(X_B)\quad n(S)=n(S_B)\quad P(Z)=P(X_B)}{P(X_B)=n(X_B)\div n(S_B)}\text{（＝代入）}}{n(X_B)\div n(S_B)=P(X_B)}\text{（対称律）}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{n(X_A)\div n(S_A)=n(X_B)\div n(S_B)\qquad n(X_A)\div n(S_A)=P(X_A)\quad n(X_B)\div n(S_B)=P(X_B)}{D_1: P(X_A)=P(X_B)}\text{（＝代入）}}{B_1\to D_1}\text{（→入）}}{A_1\to(B_1\to D_1)}\text{（→入）}}{A_1\wedge B_1\to D_1}\text{（移入）}$$

仮定の候補の内，矛盾した条件はない。A_1 と B_1 を仮定する場合，D_1 は仮定として必要ない。

（Ⅱ）

$$\dfrac{A_1: n(S_A)=n(S_B)\qquad B_1: n(X_A)=n(X_B)}{n(S_A)-n(X_A)=n(S_B)-n(X_B)}\text{（＝＝）}$$

$$\dfrac{\dfrac{\text{定理６：}n(Y)=n(S)-n(X)\qquad n(X)=n(X_A)\quad n(Y)=n(Y_A)\quad n(S)=n(S_A)}{n(Y_A)=n(S_A)-n(X_A)}\text{（＝代入）}}{n(S_A)-n(X_A)=n(Y_A)}\text{（対称律）}$$

$$\dfrac{\dfrac{\text{定理６：}n(Y)=n(S)-n(X)\qquad n(X)=n(X_B)\quad n(Y)=n(Y_B)\quad n(S)=n(S_B)}{n(Y_B)=n(S_B)-n(X_B)}\text{（＝代入）}}{n(S_B)-n(X_B)=n(Y_B)}\text{（対称律）}$$

$$\dfrac{(S_A)-n(X_A)=n(S_B)-n(X_B)\qquad n(S_A)-n(X_A)=n(Y_A)\quad n(S_B)-n(X_B)=n(Y_B)}{C_1: n(Y_A)=n(Y_B)}\text{（＝代入）}$$

A_1 と B_1 を仮定し，結論として証明されるのは，C_1 である。

【問題３】

仮定の候補	定理	結論
$\neg A_1$ B_2 D_3	$B_2 \wedge D_3 \to \neg A_1$	C_2

証明

$$\dfrac{B_2: \mathrm{n}(X_A) > \mathrm{n}(X_B) \qquad \dfrac{D_3: \mathrm{P}(X_A) < \mathrm{P}(X_B)}{\mathrm{P}(X_B) > \mathrm{P}(X_A)}\,(<>)}{\mathrm{n}(X_A) \div \mathrm{P}(X_A) > \mathrm{n}(X_B) \div \mathrm{P}(X_B)}\,(>>2)$$

$$\dfrac{\dfrac{\text{定理４}: \mathrm{n}(S) = \mathrm{n}(Z) \div \mathrm{P}(Z) \qquad \mathrm{n}(Z) = \mathrm{n}(X_A) \quad \mathrm{n}(S) = \mathrm{n}(S_A) \quad \mathrm{P}(Z) = \mathrm{P}(X_A)}{\mathrm{n}(S_A) = \mathrm{n}(X_A) \div \mathrm{P}(X_A)}\,(=\text{代入})}{\mathrm{n}(X_A) \div \mathrm{P}(X_A) = \mathrm{n}(S_A)}\,(\text{対称律})$$

$$\dfrac{\dfrac{\text{定理４}: \mathrm{n}(S) = \mathrm{n}(Z) \div \mathrm{P}(Z) \qquad \mathrm{n}(Z) = \mathrm{n}(X_B) \quad \mathrm{n}(S) = \mathrm{n}(S_B) \quad \mathrm{P}(Z) = \mathrm{P}(X_B)}{\mathrm{n}(S_B) = \mathrm{n}(X_B) \div \mathrm{P}(X_B)}\,(=\text{代入})}{\mathrm{n}(X_B) \div \mathrm{P}(X_B) = \mathrm{n}(S_B)}\,(\text{対称律})$$

$$\dfrac{\mathrm{n}(X_A) \div \mathrm{P}(X_A) > \mathrm{n}(X_B) \div \mathrm{P}(X_B) \qquad \mathrm{n}(X_A) \div \mathrm{P}(X_A) = \mathrm{n}(S_A) \quad \mathrm{n}(X_B) \div \mathrm{P}(X_B) = \mathrm{n}(S_B)}{A_2: \mathrm{n}(S_A) > \mathrm{n}(S_B)}\,(=\text{代入})$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A_2: \mathrm{n}(S_A) > \mathrm{n}(S_B)}{D_3 \to A_2}\,(\to\text{入})}{B_2 \to (D_3 \to A_2)}\,(\to\text{入})}{B_2 \wedge D_3 \to A_2}\,(\text{移入})}{B_2 \wedge D_3 \to A_2 \vee A_3}\,(\vee\text{入}) \qquad \dfrac{\dfrac{\neg A_1 \equiv A_2 \underline{\vee} A_3}{\neg A_1 \equiv A_2 \vee A_3}\,(\underline{\vee}\to\vee)}{A_2 \vee A_3 \to \neg A_1}\,(\equiv\text{除})}{B_2 \wedge D_3 \to \neg A_1}\,(\text{推移})$$

仮定の候補の内，矛盾した条件はない。B_2 と D_3 を仮定する場合，$\neg A_1$ は仮定として必要ない。

$$\dfrac{B_2: \mathrm{n}(X_A) > \mathrm{n}(X_B) \qquad \dfrac{D_3: \mathrm{P}(X_A) < \mathrm{P}(X_B)}{\mathrm{P}(X_B) > \mathrm{P}(X_A)}\,(<>)}{\mathrm{n}(X_A) \div \mathrm{P}(X_A) > \mathrm{n}(X_B) \div \mathrm{P}(X_B)}\,(>>2)$$

$$\dfrac{\dfrac{\text{定理４}: \mathrm{n}(S) = \mathrm{n}(Z) \div \mathrm{P}(Z) \qquad \mathrm{n}(Z) = \mathrm{n}(X_A) \quad \mathrm{n}(S) = \mathrm{n}(S_A) \quad \mathrm{P}(Z) = \mathrm{P}(X_A)}{\mathrm{n}(S_A) = \mathrm{n}(X_A) \div \mathrm{P}(X_A)}\,(=\text{代入})}{\mathrm{n}(X_A) \div \mathrm{P}(X_A) = \mathrm{n}(S_A)}\,(\text{対称律})$$

$$\dfrac{\dfrac{\text{定理４}: \mathrm{n}(S) = \mathrm{n}(Z) \div \mathrm{P}(Z) \qquad \mathrm{n}(Z) = \mathrm{n}(X_B) \quad \mathrm{n}(S) = \mathrm{n}(S_B) \quad \mathrm{P}(Z) = \mathrm{P}(X_B)}{\mathrm{n}(S_B) = \mathrm{n}(X_B) \div \mathrm{P}(X_B)}\,(=\text{代入})}{\mathrm{n}(X_B) \div \mathrm{P}(X_B) = \mathrm{n}(S_B)}\,(\text{対称律})$$

$$\dfrac{\mathrm{n}(X_A) \div \mathrm{P}(X_A) > \mathrm{n}(X_B) \div \mathrm{P}(X_B) \qquad \mathrm{n}(X_A) \div \mathrm{P}(X_A) = \mathrm{n}(S_A) \quad \mathrm{n}(X_B) \div \mathrm{P}(X_B) = \mathrm{n}(S_B)}{A_2: \mathrm{n}(S_A) > \mathrm{n}(S_B)}\,(=\text{代入})$$

$$\dfrac{1 = 1 \qquad D_3: \mathrm{P}(X_A) < \mathrm{P}(X_B)}{1 - \mathrm{P}(X_A) > 1 - \mathrm{P}(X_B)}\,(>=2)$$

$$\dfrac{\text{定理１}: \mathrm{P}(\mathrm{Y}) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{X}) \qquad \mathrm{P}(\mathrm{X}) = \mathrm{P}(\mathrm{X_A}) \quad \mathrm{P}(\mathrm{Y}) = \mathrm{P}(\mathrm{Y_A})}{\dfrac{\mathrm{P}(\mathrm{Y_A}) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{X_A})}{1 - \mathrm{P}(\mathrm{X_A}) = \mathrm{P}(\mathrm{Y_A})}\ (\text{対称律})}\ (=\text{代入})$$

$$\dfrac{\text{定理１}: \mathrm{P}(\mathrm{Y}) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{X}) \qquad \mathrm{P}(\mathrm{X}) = \mathrm{P}(\mathrm{X_B}) \quad \mathrm{P}(\mathrm{Y}) = \mathrm{P}(\mathrm{Y_B})}{\dfrac{\mathrm{P}(\mathrm{Y_B}) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{X_B})}{1 - \mathrm{P}(\mathrm{X_B}) = \mathrm{P}(\mathrm{Y_B})}\ (\text{対称律})}\ (=\text{代入})$$

$$\dfrac{1 - \mathrm{P}(\mathrm{X_A}) > 1 - \mathrm{P}(\mathrm{X_B}) \qquad 1 - \mathrm{P}(\mathrm{X_A}) = \mathrm{P}(\mathrm{Y_A}) \quad 1 - \mathrm{P}(\mathrm{X_B}) = \mathrm{P}(\mathrm{Y_B})}{E_2: \mathrm{P}(\mathrm{Y_A}) > \mathrm{P}(\mathrm{Y_B})}\ (=\text{代入})$$

$$\dfrac{A_2: \mathrm{n}(\mathrm{S_A}) > \mathrm{n}(\mathrm{S_B}) \qquad E_2: \mathrm{P}(\mathrm{Y_A}) > \mathrm{P}(\mathrm{Y_B})}{\mathrm{n}(\mathrm{S_A}) \times \mathrm{P}(\mathrm{Y_A}) > \mathrm{n}(\mathrm{S_B}) \times \mathrm{P}(\mathrm{Y_B})}\ (>>1)$$

$$\dfrac{\text{定理３}: \mathrm{n}(\mathrm{Z}) = \mathrm{n}(\mathrm{S}) \times \mathrm{P}(\mathrm{Z}) \qquad \mathrm{n}(\mathrm{Z}) = \mathrm{n}(\mathrm{Y_A}) \quad \mathrm{n}(\mathrm{S}) = \mathrm{n}(\mathrm{S_A}) \quad \mathrm{P}(\mathrm{Z}) = \mathrm{P}(\mathrm{Y_A})}{\dfrac{\mathrm{n}(\mathrm{Y_A}) = \mathrm{n}(\mathrm{S_A}) \times \mathrm{P}(\mathrm{Y_A})}{\mathrm{n}(\mathrm{S_A}) \times \mathrm{P}(\mathrm{Y_A}) = \mathrm{n}(\mathrm{Y_A})}\ (\text{対称律})}\ (=\text{代入})$$

$$\dfrac{\text{定理３}: \mathrm{n}(\mathrm{Z}) = \mathrm{n}(\mathrm{S}) \times \mathrm{P}(\mathrm{Z}) \qquad \mathrm{n}(\mathrm{Z}) = \mathrm{n}(\mathrm{Y_B}) \quad \mathrm{n}(\mathrm{S}) = \mathrm{n}(\mathrm{S_B}) \quad \mathrm{P}(\mathrm{Z}) = \mathrm{P}(\mathrm{Y_B})}{\dfrac{\mathrm{n}(\mathrm{Y_B}) = \mathrm{n}(\mathrm{S_B}) \times \mathrm{P}(\mathrm{Y_B})}{\mathrm{n}(\mathrm{S_B}) \times \mathrm{P}(\mathrm{Y_B}) = \mathrm{n}(\mathrm{Y_B})}\ (\text{対称律})}\ (=\text{代入})$$

$$\dfrac{\mathrm{n}(\mathrm{S_A}) \times \mathrm{P}(\mathrm{Y_A}) > \mathrm{n}(\mathrm{S_B}) \times \mathrm{P}(\mathrm{Y_B}) \qquad \mathrm{n}(\mathrm{S_A}) \times \mathrm{P}(\mathrm{Y_A}) = \mathrm{n}(\mathrm{Y_A}) \quad \mathrm{n}(\mathrm{S_B}) \times \mathrm{P}(\mathrm{Y_B}) = \mathrm{n}(\mathrm{Y_B})}{C_2: \mathrm{n}(\mathrm{Y_A}) > \mathrm{n}(\mathrm{Y_B})}\ (=\text{代入})$$

B_2 と D_3 を仮定し，結論として証明されるのは，C_2 である。

【問題５】

仮定の候補	定理	結論
$\neg A_1$ B_2 D_1	$B_2 \wedge D_1 \rightarrow \neg A_1$	C_2

証明

$$\dfrac{B_2: \mathrm{n}(\mathrm{X_A}) > \mathrm{n}(\mathrm{X_B}) \qquad D_1: \mathrm{P}(\mathrm{X_A}) = \mathrm{P}(\mathrm{X_B})}{\mathrm{n}(\mathrm{X_A}) \div \mathrm{P}(\mathrm{X_A}) > \mathrm{n}(\mathrm{X_B}) \div \mathrm{P}(\mathrm{X_B})}\ (>=1)$$

$$\dfrac{\text{定理４}: \mathrm{n}(\mathrm{S}) = \mathrm{n}(\mathrm{Z}) \div \mathrm{P}(\mathrm{Z}) \qquad \mathrm{n}(\mathrm{Z}) = \mathrm{n}(\mathrm{X_A}) \quad \mathrm{n}(\mathrm{S}) = \mathrm{n}(\mathrm{S_A}) \quad \mathrm{P}(\mathrm{Z}) = \mathrm{P}(\mathrm{X_A})}{\dfrac{\mathrm{n}(\mathrm{S_A}) = \mathrm{n}(\mathrm{X_A}) \div \mathrm{P}(\mathrm{X_A})}{\mathrm{n}(\mathrm{X_A}) \div \mathrm{P}(\mathrm{X_A}) = \mathrm{n}(\mathrm{S_A})}\ (\text{対称律})}\ (=\text{代入})$$

$$\dfrac{\text{定理４}: \mathrm{n}(\mathrm{S}) = \mathrm{n}(\mathrm{Z}) \div \mathrm{P}(\mathrm{Z}) \qquad \mathrm{n}(\mathrm{Z}) = \mathrm{n}(\mathrm{X_B}) \quad \mathrm{n}(\mathrm{S}) = \mathrm{n}(\mathrm{S_B}) \quad \mathrm{P}(\mathrm{Z}) = \mathrm{P}(\mathrm{X_B})}{\dfrac{\mathrm{n}(\mathrm{S_B}) = \mathrm{n}(\mathrm{X_B}) \div \mathrm{P}(\mathrm{X_B})}{\mathrm{n}(\mathrm{X_B}) \div \mathrm{P}(\mathrm{X_B}) = \mathrm{n}(\mathrm{S_B})}\ (\text{対称律})}\ (=\text{代入})$$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\mathrm{n}(X_A)\div\mathrm{P}(X_A)>\mathrm{n}(X_B)\div\mathrm{P}(X_B)\quad \mathrm{n}(X_A)\div\mathrm{P}(X_A)=\mathrm{n}(S_A)\quad \mathrm{n}(X_B)\div\mathrm{P}(X_B)=\mathrm{n}(S_B)}{A_2:\mathrm{n}(S_A)>\mathrm{n}(S_B)}\text{(＝代入)}}{D_1\to A_2}\text{(→入)}}{B_2\to(D_1\to A_2)}\text{(→入)}}{B_2\wedge D_1\to A_2}\text{(移入)}}{B_2\wedge D_1\to A_2\vee A_3}\text{(∨入)}\quad \cfrac{\cfrac{\neg A_1\equiv A_2\,\underline{\vee}\,A_3}{\neg A_1\equiv A_2\vee A_3}(\underline{\vee}\to\vee)}{A_2\vee A_3\to\neg A_1}\text{(≡除)}}{B_2\wedge D_1\to\neg A_1}\text{(推移)}$$

仮定の候補の内，矛盾した条件はない。B_2 と D_1 を仮定する場合，$\neg A_1$ は仮定として必要ない。

$$\frac{B_2:\mathrm{n}(X_A)>\mathrm{n}(X_B)\qquad D_1:\mathrm{P}(X_A)=\mathrm{P}(X_B)}{\mathrm{n}(X_A)\div\mathrm{P}(X_A)>\mathrm{n}(X_B)\div\mathrm{P}(X_B)}\text{（＞＝１）}$$

$$\cfrac{\cfrac{\text{定理４}:\mathrm{n}(S)=\mathrm{n}(Z)\div\mathrm{P}(Z)\qquad \mathrm{n}(Z)=\mathrm{n}(X_A)\quad \mathrm{n}(S)=\mathrm{n}(S_A)\quad \mathrm{P}(Z)=\mathrm{P}(X_A)}{\mathrm{n}(S_A)=\mathrm{n}(X_A)\div\mathrm{P}(X_A)}\text{(＝代入)}}{\mathrm{n}(X_A)\div\mathrm{P}(X_A)=\mathrm{n}(S_A)}\text{(対称律)}$$

$$\cfrac{\cfrac{\text{定理４}:\mathrm{n}(S)=\mathrm{n}(Z)\div\mathrm{P}(Z)\qquad \mathrm{n}(Z)=\mathrm{n}(X_B)\quad \mathrm{n}(S)=\mathrm{n}(S_B)\quad \mathrm{P}(Z)=\mathrm{P}(X_B)}{\mathrm{n}(S_B)=\mathrm{n}(X_B)\div\mathrm{P}(X_B)}\text{(＝代入)}}{\mathrm{n}(X_B)\div\mathrm{P}(X_B)=\mathrm{n}(S_B)}\text{(対称律)}$$

$$\frac{\mathrm{n}(X_A)\div\mathrm{P}(X_A)>\mathrm{n}(X_B)\div\mathrm{P}(X_B)\qquad \mathrm{n}(X_A)\div\mathrm{P}(X_A)=\mathrm{n}(S_A)\quad \mathrm{n}(X_B)\div\mathrm{P}(X_B)=\mathrm{n}(S_B)}{A_2:\mathrm{n}(S_A)>\mathrm{n}(S_B)}\text{(＝代入)}$$

$$\frac{1=1\qquad D_1:\mathrm{P}(X_A)=\mathrm{P}(X_B)}{1-\mathrm{P}(X_A)=1-\mathrm{P}(X_B)}\text{(＝＝)}$$

$$\cfrac{\cfrac{\text{定理１}:\mathrm{P}(Y)=1-\mathrm{P}(X)\qquad \mathrm{P}(X)=\mathrm{P}(X_A)\quad \mathrm{P}(Y)=\mathrm{P}(Y_A)}{\mathrm{P}(Y_A)=1-\mathrm{P}(X_A)}\text{(＝代入)}}{1-\mathrm{P}(X_A)=\mathrm{P}(Y_A)}\text{(対称律)}$$

$$\cfrac{\cfrac{\text{定理１}:\mathrm{P}(Y)=1-\mathrm{P}(X)\qquad \mathrm{P}(X)=\mathrm{P}(X_B)\quad \mathrm{P}(Y)=\mathrm{P}(Y_B)}{\mathrm{P}(Y_B)=1-\mathrm{P}(X_B)}\text{(＝代入)}}{1-\mathrm{P}(X_B)=\mathrm{P}(Y_B)}\text{(対称律)}$$

$$\frac{1-\mathrm{P}(X_A)=1-\mathrm{P}(X_B)\qquad 1-\mathrm{P}(X_A)=\mathrm{P}(Y_A)\quad 1-\mathrm{P}(X_B)=\mathrm{P}(Y_B)}{E_1:\mathrm{P}(Y_A)=\mathrm{P}(Y_B)}\text{(＝代入)}$$

$$\frac{A_2:\mathrm{n}(S_A)>\mathrm{n}(S_B)\qquad E_1:\mathrm{P}(Y_A)=\mathrm{P}(Y_B)}{\mathrm{n}(S_A)\times\mathrm{P}(Y_A)>\mathrm{n}(S_B)\times\mathrm{P}(Y_B)}\text{（＞＝１）}$$

$$\cfrac{\cfrac{\text{定理３}:\mathrm{n}(Z)=\mathrm{n}(S)\times\mathrm{P}(Z)\qquad \mathrm{n}(Z)=\mathrm{n}(Y_A)\quad \mathrm{n}(S)=\mathrm{n}(S_A)\quad \mathrm{P}(Z)=\mathrm{P}(Y_A)}{\mathrm{n}(Y_A)=\mathrm{n}(S_A)\times\mathrm{P}(Y_A)}\text{(＝代入)}}{\mathrm{n}(S_A)\times\mathrm{P}(Y_A)=\mathrm{n}(Y_A)}\text{(対称律)}$$

$$\dfrac{\dfrac{\text{定理３}: n(Z)=n(S)\times P(Z) \qquad n(Z)=n(Y_B) \quad n(S)=n(S_B) \quad P(Z)=P(Y_B)}{n(Y_B)=n(S_B)\times P(Y_B)}\ (=\text{代入})}{n(S_B)\times P(Y_B)=n(Y_B)}\ (\text{対称律})$$

$$\dfrac{n(S_A)\times P(Y_A) > n(S_B)\times P(Y_B) \qquad n(S_A)\times P(Y_A)=n(Y_A) \quad n(S_B)\times P(Y_B)=n(Y_B)}{C_2: n(Y_A) > n(Y_B)}\ (=\text{代入})$$

B_2 と D_1 を仮定し，結論として証明されるのは，C_2 である。

【問題６】

仮定の候補	定理	結論
$\neg A_1$ B_1 D_3	$B_1 \land D_3 \to \neg A_1$	C_2

証明

$$\dfrac{B_1: n(X_A)=n(X_B) \qquad D_3: P(X_A) < P(X_B)}{n(X_A)\div P(X_A) > n(X_B)\div P(X_B)}\ (>=2)$$

$$\dfrac{\dfrac{\text{定理４}: n(S)=n(Z)\div P(Z) \qquad n(Z)=n(X_A) \quad n(S)=n(S_A) \quad P(Z)=P(X_A)}{n(S_A)=n(X_A)\div P(X_A)}\ (=\text{代入})}{n(X_A)\div P(X_A)=n(S_A)}\ (\text{対称律})$$

$$\dfrac{\dfrac{\text{定理４}: n(S)=n(Z)\div P(Z) \qquad n(Z)=n(X_B) \quad n(S)=n(S_B) \quad P(Z)=P(X_B)}{n(S_B)=n(X_B)\div P(X_B)}\ (=\text{代入})}{n(X_B)\div P(X_B)=n(S_B)}\ (\text{対称律})$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{n(X_A)\div P(X_A) > n(X_B)\div P(X_B) \qquad n(X_A)\div P(X_A)=n(S_A) \quad n(X_B)\div P(X_B)=n(S_B)}{A_2: n(S_A) > n(S_B)}\ (=\text{代入})}{D_3 \to A_2}\ (\to\text{入})}{B_1 \to (D_3 \to A_2)}\ (\to\text{入})}{B_1 \land D_3 \to A_2}\ (\text{移入})}{B_1 \land D_3 \to A_2 \lor A_3}\ (\lor\text{入}) \qquad \dfrac{\dfrac{\neg A_1 \equiv A_2 \veebar A_3}{\neg A_1 \equiv A_2 \lor A_3}\ (\veebar\to\lor)}{A_2 \lor A_3 \to \neg A_1}\ (\equiv\text{除})}{B_1 \land D_3 \to \neg A_1}\ (\text{推移})$$

仮定の候補の内，矛盾した条件はない。B_1 と D_3 を仮定する場合，$\neg A_1$ は仮定として必要ない。

$$\dfrac{B_1: n(X_A)=n(X_B) \qquad D_3: P(X_A) < P(X_B)}{n(X_A)\div P(X_A) > n(X_B)\div P(X_B)}\ (>=2)$$

$$\dfrac{\dfrac{\text{定理４}: n(S)=n(Z)\div P(Z) \qquad n(Z)=n(X_A) \quad n(S)=n(S_A) \quad P(Z)=P(X_A)}{n(S_A)=n(X_A)\div P(X_A)}\ (=\text{代入})}{n(X_A)\div P(X_A)=n(S_A)}\ (\text{対称律})$$

$$\dfrac{\dfrac{\text{定理４}: n(S)=n(Z)\div P(Z) \qquad n(Z)=n(X_B) \quad n(S)=n(S_B) \quad P(Z)=P(X_B)}{n(S_B)=n(X_B)\div P(X_B)}\ (=\text{代入})}{n(X_B)\div P(X_B)=n(S_B)}\ (\text{対称律})$$

$$\frac{n(X_A) \div P(X_A) > n(X_B) \div P(X_B) \qquad n(X_A) \div P(X_A) = n(S_A) \quad n(X_B) \div P(X_B) = n(S_B)}{A_2 : n(S_A) > n(S_B)} \ (=\text{代入})$$

$$\frac{A_2 : n(S_A) > n(S_B) \qquad B_1 : n(X_A) = n(X_B)}{n(S_A) - n(X_A) > n(S_B) - n(X_B)} \ (>=1)$$

$$\cfrac{\text{定理６} : n(Y) = n(S) - n(X) \qquad n(X) = n(X_A) \quad n(Y) = n(Y_A) \quad n(S) = n(S_A)}{\cfrac{n(Y_A) = n(S_A) - n(X_A)}{n(S_A) - n(X_A) = n(Y_A)} \ (\text{対称律})} \ (=\text{代入})$$

$$\cfrac{\text{定理６} : n(Y) = n(S) - n(X) \qquad n(X) = n(X_B) \quad n(Y) = n(Y_B) \quad n(S) = n(S_B)}{\cfrac{n(Y_B) = n(S_B) - n(X_B)}{n(S_B) - n(X_B) = n(Y_B)} \ (\text{対称律})} \ (=\text{代入})$$

$$\frac{n(S_A) - n(X_A) > n(S_B) - n(X_B) \qquad n(S_A) - n(X_A) = n(Y_A) \quad n(S_B) - n(X_B) = n(Y_B)}{C_2 : n(Y_A) > n(Y_B)} \ (=\text{代入})$$

B_1 と D_3 を仮定し，結論として証明されるのは，C_2 である。

付録８　割合に関する概念的知識の「基準量に関する状況」における考え方の例

【問題４】

仮定の候補	定理
$\neg A_1$ B_2 D_2	

証明

$$\frac{n(X_A)=2\quad n(X_B)=1\quad n(S_A)=3\quad n(S_B)=2\quad 2>1\quad 3>2\quad 2/3>1/2\quad 3\text{-}2=2\text{-}1}{\begin{aligned}\exists x\exists y\exists z\exists w\ [&n(X_A)=x\wedge n(X_B)=y\wedge x>y\\ &\wedge n(S_A)=z\wedge n(S_B)=w\wedge z>w\\ &\wedge P(X_A)=x/z\wedge P(X_B)=y/w\wedge x/z>y/w\\ &\wedge n(Y_A)=z-x\wedge n(Y_B)=w-y\wedge z-x=w-y]\ \cdots ⓐ\end{aligned}}\ (\exists\exists入)$$

$$\frac{n(X_A)=3\quad n(X_B)=1\quad n(S_A)=5\quad n(S_B)=2\quad 3>1\quad 5>2\quad 3/5>1/2\quad 5\text{-}3>2\text{-}1}{\begin{aligned}\exists x'\exists y'\exists z'\exists w'\ [&n(X_A)=x'\wedge n(X_B)=y'\wedge x'>y'\\ &\wedge n(S_A)=z'\wedge n(S_B)=w'\wedge z'>w'\\ &\wedge P(X_A)=x'/z'\wedge P(X_B)=y'/w'\wedge x'/z'>y'/w'\\ &\wedge n(Y_A)=z'-x'\wedge n(Y_B)=w'-y'\wedge z'-x'>w'-y']\ \cdots ⓑ\end{aligned}}\ (\exists\exists入)$$

$$\frac{n(X_A)=3\quad n(X_B)=1\quad n(S_A)=4\quad n(S_B)=3\quad 3>1\quad 4>3\quad 3/4>1/3\quad 4\text{-}3<3\text{-}1}{\begin{aligned}\exists x''\exists y''\exists z''\exists w''\ [&n(X_A)=x''\wedge n(X_B)=y''\wedge x''>y''\\ &\wedge n(S_A)=z''\wedge n(S_B)=w''\wedge z''>w''\\ &\wedge P(X_A)=x''/z''\wedge P(X_B)=y''/w''\wedge x''/z''>y''/w''\\ &\wedge n(Y_A)=z''-x''\wedge n(Y_B)=w''-y''\wedge z''-x''<w''-y'']\ \cdots ⓒ\end{aligned}}\ (\exists\exists入)$$

$$\frac{ⓐ\qquad ⓑ\qquad ⓒ}{\begin{aligned}(\exists x\exists y\exists z\exists w\ [&n(X_A)=x\wedge n(X_B)=y\wedge x>y\\ &\wedge n(S_A)=z\wedge n(S_B)=w\wedge z>w\\ &\wedge P(X_A)=x/z\wedge P(X_B)=y/w\wedge x/z>y/w\\ &\wedge n(Y_A)=z-x\wedge n(Y_B)=w-y\wedge z-x=w-y])\\ \wedge(\exists x'\exists y'\exists z'\exists w'\ [&n(X_A)=x'\wedge n(X_B)=y'\wedge x'>y'\\ &\wedge n(S_A)=z'\wedge n(S_B)=w'\wedge z'>w'\\ &\wedge P(X_A)=x'/z'\wedge P(X_B)=y'/w'\wedge x'/z'>y'/w'\\ &\wedge n(Y_A)=z'-x'\wedge n(Y_B)=w'-y'\wedge z'-x'>w'-y'])\\ \wedge(\exists x''\exists y''\exists z''\exists w''\ [&n(X_A)=x''\wedge n(X_B)=y''\wedge x''>y''\\ &\wedge n(S_A)=z''\wedge n(S_B)=w''\wedge z''>w''\\ &\wedge P(X_A)=x''/z''\wedge P(X_B)=y''/w''\wedge x''/z''>y''/w''\\ &\wedge n(Y_A)=z''-x''\wedge n(Y_B)=w''-y''\wedge z''-x''<w''-y''])\end{aligned}}\ (\wedge\wedge入)$$

結論として，$\neg A_1$，B_2，D_2 及び C_1，$\neg A_1$，B_2，D_2 及び C_2，$\neg A_1$，B_2，D_2 及び C_3 のそれぞれを満たす $n(X_A)$，$n(X_B)$，$n(S_A)$，$n(S_B)$が存在することが証明される。

考え方の例

$0\leqq P(X)\leqq 1$ から $0\leqq n(X)\leqq n(S)$，$0\leqq P(Y)\leqq 1$ から $0\leqq n(Y)\leqq n(S)$ である。しかし，$n(X)=0$ や $n(Y)=0$ は現実的ではないため，$0<n(X)<n(S)$，$0<n(Y)<n(S)$ の場合に限定する。

したがって，最も単純な場合である $n(X_A)=1$，$n(X_B)=1$，$n(S_A)=2$，$n(S_B)=2$ の条件から考える。

(1) $n(X_A)=1$，$n(X_B)=1$，$n(S_A)=2$，$n(S_B)=2$

$$\dfrac{n(X_A)=1 \qquad \dfrac{n(X_B)=1}{1=n(X_B)}\,\text{(対称律)}}{B_1 : n(X_A)=n(X_B)}\,\text{(推移律)}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{B_2}{B_2 \vee B_3}\,\text{(∨入)} \qquad \dfrac{\dfrac{\neg B_1 \equiv B_2 \underline{\vee} B_3}{\neg B_1 \equiv B_2 \vee B_3}\,(\underline{\vee}\to\vee)}{B_2 \vee B_3 \to \neg B_1}\,\text{(≡除)}}{\neg B_1}\,\text{(→除)} \qquad B_1}{\bot}\,\text{(¬除)}$$

$$\dfrac{n(S_A)=2 \qquad \dfrac{n(S_B)=2}{2=n(S_B)}\,\text{(対称律)}}{A_1 : n(S_A)=n(S_B)}\,\text{(推移律)}$$

$$\dfrac{\neg A_1 \qquad A_1 : n(S_A)=n(S_B)}{\bot}\,\text{(¬除)}$$

B_2 と $\neg A_1$ の条件を満たすように，$n(X_A)=1$，$n(X_B)=1$，$n(S_A)=2$，$n(S_B)=2$ の条件を基に，$n(X_A)$ と $n(S_A)$ の２項にそれぞれ＋１する。

(2) $n(X_A)=2$，$n(X_B)=1$，$n(S_A)=3$，$n(S_B)=2$

$$\dfrac{\dfrac{n(X_A)=2 \qquad 2>1}{n(X_A)>1}\,\text{(推移律)} \qquad \dfrac{n(X_B)=1}{1=n(X_B)}\,\text{(対称律)}}{B_2 : n(X_A)>n(X_B)}\,\text{(推移律)}$$

$$\dfrac{\dfrac{n(S_A)=3 \qquad 3>2}{n(S_A)>2}\,\text{(推移律)} \qquad \dfrac{n(S_B)=2}{2=n(S_B)}\,\text{(対称律)}}{A_2 : n(S_A)>n(S_B)}\,\text{(推移律)}$$

$$\dfrac{\dfrac{A_2}{A_2 \vee A_3}\,\text{(∨入)} \qquad \dfrac{\dfrac{\neg A_1 \equiv A_2 \underline{\vee} A_3}{\neg A_1 \equiv A_2 \vee A_3}\,(\underline{\vee}\to\vee)}{A_2 \vee A_3 \to \neg A_1}\,\text{(≡除)}}{\neg A_1}\,\text{(→除)}$$

$$\dfrac{\text{定義：}P(Z)=n(Z)\div n(S) \qquad n(Z)=n(X_A) \quad n(S)=n(S_A) \quad P(Z)=P(X_A)}{P(X_A)=n(X_A)\div n(S_A)}\,\text{(＝代入)}$$

$$\dfrac{\dfrac{P(X_A)=n(X_A)\div n(S_A) \qquad n(X_A)=2 \quad n(S_A)=3}{P(X_A)=2\div 3}\ (=\text{代入})}{P(X_A)=2/3}\ (\text{演推})$$

$$\dfrac{\text{定義}:P(Z)=n(Z)\div n(S) \qquad n(Z)=n(X_B) \quad n(S)=n(S_B) \quad P(Z)=P(X_B)}{P(X_B)=n(X_B)\div n(S_B)}\ (=\text{代入})$$

$$\dfrac{\dfrac{P(X_B)=n(X_B)\div n(S_B) \qquad n(X_B)=1 \quad n(S_B)=2}{P(X_B)=1\div 2}\ (=\text{代入})}{P(X_B)=1/2}\ (\text{演推})$$

$$\dfrac{\dfrac{P(X_A)=2/3 \qquad 2/3>1/2}{P(X_A)>1/2}\ (\text{推移律}) \qquad \dfrac{P(X_B)=1/2}{1/2=P(X_B)}\ (\text{対称律})}{D_2:P(X_A)>P(X_B)}\ (\text{推移律})$$

$$\dfrac{\text{定理}6:n(Y)=n(S)-n(X) \qquad n(X)=n(X_A) \quad n(Y)=n(Y_A) \quad n(S)=n(S_A)}{n(Y_A)=n(S_A)-n(X_A)}\ (=\text{代入})$$

$$\dfrac{\dfrac{n(Y_A)=n(S_A)-n(X_A) \qquad n(X_A)=2 \quad n(S_A)=3}{n(Y_A)=3-2}\ (=\text{代入})}{n(Y_A)=1}\ (\text{演推})$$

$$\dfrac{\text{定理}6:n(Y)=n(S)-n(X) \qquad n(X)=n(X_B) \quad n(Y)=n(Y_B) \quad n(S)=n(S_B)}{n(Y_B)=n(S_B)-n(X_B)}\ (=\text{代入})$$

$$\dfrac{\dfrac{n(Y_B)=n(S_B)-n(X_B) \qquad n(X_B)=1 \quad n(S_B)=2}{n(Y_B)=2-1}\ (=\text{代入})}{n(Y_B)=1}\ (\text{演推})$$

$$\dfrac{n(Y_A)=1 \qquad \dfrac{n(Y_B)=1}{1=n(Y_B)}\ (\text{対称律})}{C_1:n(Y_A)=n(Y_B)}\ (\text{推移律})$$

C_2 の条件を満たすように，C_1 となる n(X$_A$)＝２，n(X$_B$)＝１，n(S$_A$)＝３，n(S$_B$)＝２の条件を基に，n(S$_A$)の項に＋１する。

(3) n(X$_A$)＝２，n(X$_B$)＝１，n(S$_A$)＝４，n(S$_B$)＝２

$$\dfrac{\dfrac{n(X_A)=2 \qquad 2>1}{n(X_A)>1}\ (\text{推移律}) \qquad \dfrac{n(X_B)=1}{1=n(X_B)}\ (\text{対称律})}{B_2:n(X_A)>n(X_B)}\ (\text{推移律})$$

$$\dfrac{\dfrac{n(S_A)=4 \qquad 4>2}{n(S_A)>2}\ (\text{推移律}) \qquad \dfrac{n(S_B)=2}{2=n(S_B)}\ (\text{対称律})}{A_2:n(S_A)>n(S_B)}\ (\text{推移律})$$

$$\dfrac{\dfrac{A_2}{A_2 \lor A_3}\,(\lor\text{入}) \qquad \dfrac{\dfrac{\neg A_1 \equiv A_2 \veebar A_3}{\neg A_1 \equiv A_2 \lor A_3}\,(\veebar\to\lor)}{A_2 \lor A_3 \to \neg A_1}\,(\equiv\text{除})}{\neg A_1}\,(\to\text{除})$$

$$\dfrac{\text{定義}: \mathrm{P(Z) = n(Z) \div n(S)} \qquad \mathrm{n(Z) = n(X_A)} \quad \mathrm{n(S) = n(S_A)} \quad \mathrm{P(Z) = P(X_A)}}{\mathrm{P(X_A) = n(X_A) \div n(S_A)}}\,(=\text{代入})$$

$$\dfrac{\dfrac{\mathrm{P(X_A) = n(X_A) \div n(S_A)} \qquad \mathrm{n(X_A) = 2} \quad \mathrm{n(S_A) = 4}}{\mathrm{P(X_A) = 2 \div 4}}\,(=\text{代入})}{\mathrm{P(X_A) = 1/2}}\,(\text{演推})$$

$$\dfrac{\text{定義}: \mathrm{P(Z) = n(Z) \div n(S)} \qquad \mathrm{n(Z) = n(X_B)} \quad \mathrm{n(S) = n(S_B)} \quad \mathrm{P(Z) = P(X_B)}}{\mathrm{P(X_B) = n(X_B) \div n(S_B)}}\,(=\text{代入})$$

$$\dfrac{\dfrac{\mathrm{P(X_B) = n(X_B) \div n(S_B)} \qquad \mathrm{n(X_B) = 1} \quad \mathrm{n(S_B) = 2}}{\mathrm{P(X_B) = 1 \div 2}}\,(=\text{代入})}{\mathrm{P(X_B) = 1/2}}\,(\text{演推})$$

$$\dfrac{\mathrm{P(X_A) = 1/2} \qquad \dfrac{\mathrm{P(X_B) = 1/2}}{\mathrm{1/2 = P(X_B)}}\,(\text{対称律})}{D_1 : \mathrm{P(X_A) = P(X_B)}}\,(\text{推移律})$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{D_2}{D_2 \lor D_3}\,(\lor\text{入}) \qquad \dfrac{\dfrac{\neg D_1 \equiv D_2 \veebar D_3}{\neg D_1 \equiv D_2 \lor D_3}\,(\veebar\to\lor)}{D_2 \lor D_3 \to \neg D_1}\,(\equiv\text{除})}{\neg D_1}\,(\to\text{除}) \qquad D_1}{\perp}\,(\neg\text{除})$$

D_2 の条件を満たすように，n(X$_A$)＝２，n(X$_B$)＝１，n(S$_A$)＝４，n(S$_B$)＝２の条件を基に，n(X$_A$)の項に＋１する。

(4) n(X$_A$)＝３，n(X$_B$)＝１，n(S$_A$)＝４，n(S$_B$)＝２

$$\dfrac{\dfrac{\mathrm{n(X_A) = 3} \qquad 3 > 1}{\mathrm{n(X_A)} > 1}\,(\text{推移律}) \qquad \dfrac{\mathrm{n(X_B) = 1}}{1 = \mathrm{n(X_B)}}\,(\text{対称律})}{B_2 : \mathrm{n(X_A) > n(X_B)}}\,(\text{推移律})$$

$$\dfrac{\dfrac{\mathrm{n(S_A) = 4} \qquad 4 > 2}{\mathrm{n(S_A)} > 2}\,(\text{推移律}) \qquad \dfrac{\mathrm{n(S_B) = 2}}{2 = \mathrm{n(S_B)}}\,(\text{対称律})}{A_2 : \mathrm{n(S_A) > n(S_B)}}\,(\text{推移律})$$

$$
\dfrac{\dfrac{A_2}{A_2 \vee A_3}\,(\vee\text{入}) \qquad \dfrac{\dfrac{\neg A_1 \equiv A_2 \veebar A_3}{\neg A_1 \equiv A_2 \vee A_3}\,(\veebar\to\vee)}{A_2 \vee A_3 \to \neg A_1}\,(\equiv\text{除})}{\neg A_1}\,(\to\text{除})
$$

$$
\dfrac{\text{定義：}\mathrm{P}(\mathrm{Z}) = \mathrm{n}(\mathrm{Z}) \div \mathrm{n}(\mathrm{S}) \qquad \mathrm{n}(\mathrm{Z}) = \mathrm{n}(\mathrm{X_A}) \quad \mathrm{n}(\mathrm{S}) = \mathrm{n}(\mathrm{S_A}) \quad \mathrm{P}(\mathrm{Z}) = \mathrm{P}(\mathrm{X_A})}{\mathrm{P}(\mathrm{X_A}) = \mathrm{n}(\mathrm{X_A}) \div \mathrm{n}(\mathrm{S_A})}\,(=\text{代入})
$$

$$
\dfrac{\dfrac{\mathrm{P}(\mathrm{X_A}) = \mathrm{n}(\mathrm{X_A}) \div \mathrm{n}(\mathrm{S_A}) \qquad \mathrm{n}(\mathrm{X_A}) = 3 \quad \mathrm{n}(\mathrm{S_A}) = 4}{\mathrm{P}(\mathrm{X_A}) = 3 \div 4}\,(=\text{代入})}{\mathrm{P}(\mathrm{X_A}) = 3/4}\,(\text{演推})
$$

$$
\dfrac{\text{定義：}\mathrm{P}(\mathrm{Z}) = \mathrm{n}(\mathrm{Z}) \div \mathrm{n}(\mathrm{S}) \qquad \mathrm{n}(\mathrm{Z}) = \mathrm{n}(\mathrm{X_B}) \quad \mathrm{n}(\mathrm{S}) = \mathrm{n}(\mathrm{S_B}) \quad \mathrm{P}(\mathrm{Z}) = \mathrm{P}(\mathrm{X_B})}{\mathrm{P}(\mathrm{X_B}) = \mathrm{n}(\mathrm{X_B}) \div \mathrm{n}(\mathrm{S_B})}\,(=\text{代入})
$$

$$
\dfrac{\dfrac{\mathrm{P}(\mathrm{X_B}) = \mathrm{n}(\mathrm{X_B}) \div \mathrm{n}(\mathrm{S_B}) \qquad \mathrm{n}(\mathrm{X_B}) = 1 \quad \mathrm{n}(\mathrm{S_B}) = 2}{\mathrm{P}(\mathrm{X_B}) = 1 \div 2}\,(=\text{代入})}{\mathrm{P}(\mathrm{X_B}) = 1/2}\,(\text{演推})
$$

$$
\dfrac{\dfrac{\mathrm{P}(\mathrm{X_A}) = 3/4 \qquad 3/4 > 1/2}{\mathrm{P}(\mathrm{X_A}) > 1/2}\,(\text{推移律}) \qquad \dfrac{\mathrm{P}(\mathrm{X_B}) = 1/2}{1/2 = \mathrm{P}(\mathrm{X_B})}\,(\text{対称律})}{D_2 : \mathrm{P}(\mathrm{X_A}) > \mathrm{P}(\mathrm{X_B})}\,(\text{推移律})
$$

$$
\dfrac{\text{定理６：}\mathrm{n}(\mathrm{Y}) = \mathrm{n}(\mathrm{S}) - \mathrm{n}(\mathrm{X}) \qquad \mathrm{n}(\mathrm{X}) = \mathrm{n}(\mathrm{X_A}) \quad \mathrm{n}(\mathrm{Y}) = \mathrm{n}(\mathrm{Y_A}) \quad \mathrm{n}(\mathrm{S}) = \mathrm{n}(\mathrm{S_A})}{\mathrm{n}(\mathrm{Y_A}) = \mathrm{n}(\mathrm{S_A}) - \mathrm{n}(\mathrm{X_A})}\,(=\text{代入})
$$

$$
\dfrac{\dfrac{\mathrm{n}(\mathrm{Y_A}) = \mathrm{n}(\mathrm{S_A}) - \mathrm{n}(\mathrm{X_A}) \qquad \mathrm{n}(\mathrm{X_A}) = 3 \quad \mathrm{n}(\mathrm{S_A}) = 4}{\mathrm{n}(\mathrm{Y_A}) = 4 - 3}\,(=\text{代入})}{\mathrm{n}(\mathrm{Y_A}) = 1}\,(\text{演推})
$$

$$
\dfrac{\text{定理６：}\mathrm{n}(\mathrm{Y}) = \mathrm{n}(\mathrm{S}) - \mathrm{n}(\mathrm{X}) \qquad \mathrm{n}(\mathrm{X}) = \mathrm{n}(\mathrm{X_B}) \quad \mathrm{n}(\mathrm{Y}) = \mathrm{n}(\mathrm{Y_B}) \quad \mathrm{n}(\mathrm{S}) = \mathrm{n}(\mathrm{S_B})}{\mathrm{n}(\mathrm{Y_B}) = \mathrm{n}(\mathrm{S_B}) - \mathrm{n}(\mathrm{X_B})}\,(=\text{代入})
$$

$$
\dfrac{\dfrac{\mathrm{n}(\mathrm{Y_B}) = \mathrm{n}(\mathrm{S_B}) - \mathrm{n}(\mathrm{X_B}) \qquad \mathrm{n}(\mathrm{X_B}) = 1 \quad \mathrm{n}(\mathrm{S_B}) = 2}{\mathrm{n}(\mathrm{Y_B}) = 2 - 1}\,(=\text{代入})}{\mathrm{n}(\mathrm{Y_B}) = 1}\,(\text{演推})
$$

$$
\dfrac{\mathrm{n}(\mathrm{Y_A}) = 1 \qquad \dfrac{\mathrm{n}(\mathrm{Y_B}) = 1}{1 = \mathrm{n}(\mathrm{Y_B})}\,(\text{対称律})}{C_1 : \mathrm{n}(\mathrm{Y_A}) = \mathrm{n}(\mathrm{Y_B})}\,(\text{推移律})
$$

C_2 の条件を満たすように，C_1 となる $\mathrm{n}(\mathrm{X_A})=３$，$\mathrm{n}(\mathrm{X_B})=１$，$\mathrm{n}(\mathrm{S_A})=４$，$\mathrm{n}(\mathrm{S_B})=２$ の条件を基に，$\mathrm{n}(\mathrm{S_A})$ の項に＋１する。

(5) $n(X_A)=3$, $n(X_B)=1$, $n(S_A)=5$, $n(S_B)=2$

$$\dfrac{\dfrac{n(X_A)=3 \qquad 3>1}{n(X_A)>1}\text{(推移律)} \qquad \dfrac{n(X_B)=1}{1=n(X_B)}\text{(対称律)}}{B_2: n(X_A)>n(X_B)}\text{(推移律)}$$

$$\dfrac{\dfrac{n(S_A)=5 \qquad 5>2}{n(S_A)>2}\text{(推移律)} \qquad \dfrac{n(S_B)=2}{2=n(S_B)}\text{(対称律)}}{A_2: n(S_A)>n(S_B)}\text{(推移律)}$$

$$\dfrac{\dfrac{A_2}{A_2 \vee A_3}\text{(∨入)} \qquad \dfrac{\dfrac{\neg A_1 \equiv A_2 \underline{\vee} A_3}{\neg A_1 \equiv A_2 \vee A_3}\text{(}\underline{\vee}\text{→∨)}}{A_2 \vee A_3 \to \neg A_1}\text{(≡除)}}{\neg A_1}\text{(→除)}$$

$$\dfrac{\text{定義}: P(Z)=n(Z)\div n(S) \qquad n(Z)=n(X_A) \quad n(S)=n(S_A) \quad P(Z)=P(X_A)}{P(X_A)=n(X_A)\div n(S_A)}\text{(＝代入)}$$

$$\dfrac{\dfrac{P(X_A)=n(X_A)\div n(S_A) \qquad n(X_A)=3 \quad n(S_A)=5}{P(X_A)=3\div 5}\text{(＝代入)}}{P(X_A)=3/5}\text{(演推)}$$

$$\dfrac{\text{定義}: P(Z)=n(Z)\div n(S) \qquad n(Z)=n(X_B) \quad n(S)=n(S_B) \quad P(Z)=P(X_B)}{P(X_B)=n(X_B)\div n(S_B)}\text{(＝代入)}$$

$$\dfrac{\dfrac{P(X_B)=n(X_B)\div n(S_B) \qquad n(X_B)=1 \quad n(S_B)=2}{P(X_B)=1\div 2}\text{(＝代入)}}{P(X_B)=1/2}\text{(演推)}$$

$$\dfrac{\dfrac{P(X_A)=3/5 \qquad 3/5>1/2}{P(X_A)>1/2}\text{(推移律)} \qquad \dfrac{P(X_B)=1/2}{1/2=P(X_B)}\text{(対称律)}}{D_2: P(X_A)>P(X_B)}\text{(推移律)}$$

$$\dfrac{\text{定理6}: n(Y)=n(S)-n(X) \qquad n(X)=n(X_A) \quad n(Y)=n(Y_A) \quad n(S)=n(S_A)}{n(Y_A)=n(S_A)-n(X_A)}\text{(＝代入)}$$

$$\dfrac{\dfrac{n(Y_A)=n(S_A)-n(X_A) \qquad n(X_A)=3 \quad n(S_A)=5}{n(Y_A)=5-3}\text{(＝代入)}}{n(Y_A)=2}\text{(演推)}$$

$$\dfrac{\text{定理6}: n(Y)=n(S)-n(X) \qquad n(X)=n(X_B) \quad n(Y)=n(Y_B) \quad n(S)=n(S_B)}{n(Y_B)=n(S_B)-n(X_B)}\text{(＝代入)}$$

$$\dfrac{\dfrac{n(Y_B) = n(S_B) - n(X_B) \qquad n(X_B) = 1 \quad n(S_B) = 2}{n(Y_B) = 2 - 1}\text{（＝代入）}}{n(Y_B) = 1}\text{（演推）}$$

$$\dfrac{\dfrac{n(Y_A) = 2 \qquad 2 > 1}{n(Y_A) > 1}\text{（推移律）} \qquad \dfrac{n(Y_B) = 1}{1 = n(Y_B)}\text{（対称律）}}{C_2 : n(Y_A) > n(Y_B)}\text{（推移律）}$$

C_3 の条件を満たすように，C_1 となる n(X$_A$)＝３，n(X$_B$)＝１，n(S$_A$)＝４，n(S$_B$)＝２の条件を基に，n(S$_B$)の項に＋１する。

(6) n(X$_A$)＝３，n(X$_B$)＝１，n(S$_A$)＝４，n(S$_B$)＝３

$$\dfrac{\dfrac{n(X_A) = 3 \qquad 3 > 1}{n(X_A) > 1}\text{（推移律）} \qquad \dfrac{n(X_B) = 1}{1 = n(X_B)}\text{（対称律）}}{B_2 : n(X_A) > n(X_B)}\text{（推移律）}$$

$$\dfrac{\dfrac{n(S_A) = 4 \qquad 4 > 3}{n(S_A) > 3}\text{（推移律）} \qquad \dfrac{n(S_B) = 3}{3 = n(S_B)}\text{（対称律）}}{A_2 : n(S_A) > n(S_B)}\text{（推移律）}$$

$$\dfrac{\dfrac{A_2}{A_2 \lor A_3}\text{（}\lor\text{入）} \qquad \dfrac{\dfrac{\neg A_1 \equiv A_2 \veebar A_3}{\neg A_1 \equiv A_2 \lor A_3}\text{（}\veebar\to\lor\text{）}}{A_2 \lor A_3 \to \neg A_1}\text{（}\equiv\text{除）}}{\neg A_1}\text{（}\to\text{除）}$$

$$\dfrac{\text{定義}: P(Z) = n(Z) \div n(S) \qquad n(Z) = n(X_A) \quad n(S) = n(S_A) \quad P(Z) = P(X_A)}{P(X_A) = n(X_A) \div n(S_A)}\text{（＝代入）}$$

$$\dfrac{\dfrac{P(X_A) = n(X_A) \div n(S_A) \qquad n(X_A) = 3 \quad n(S_A) = 4}{P(X_A) = 3 \div 4}\text{（＝代入）}}{P(X_A) = 3/4}\text{（演推）}$$

$$\dfrac{\text{定義}: P(Z) = n(Z) \div n(S) \qquad n(Z) = n(X_B) \quad n(S) = n(S_B) \quad P(Z) = P(X_B)}{P(X_B) = n(X_B) \div n(S_B)}\text{（＝代入）}$$

$$\dfrac{\dfrac{P(X_B) = n(X_B) \div n(S_B) \qquad n(X_B) = 1 \quad n(S_B) = 3}{P(X_B) = 1 \div 3}\text{（＝代入）}}{P(X_B) = 1/3}\text{（演推）}$$

$$\dfrac{\dfrac{P(X_A) = 3/4 \qquad 3/4 > 1/3}{P(X_A) > 1/3}\text{（推移律）} \qquad \dfrac{P(X_B) = 1/3}{1/3 = P(X_B)}\text{（対称律）}}{D_2 : P(X_A) > P(X_B)}\text{（推移律）}$$

$$\dfrac{\text{定理6：}n(Y)=n(S)-n(X) \qquad n(X)=n(X_A) \quad n(Y)=n(Y_A) \quad n(S)=n(S_A)}{n(Y_A)=n(S_A)-n(X_A)}\ (\text{＝代入})$$

$$\dfrac{\dfrac{n(Y_A)=n(S_A)-n(X_A) \qquad n(X_A)=3 \quad n(S_A)=4}{n(Y_A)=4-3}\ (\text{＝代入})}{n(Y_A)=1}\ (\text{演推})$$

$$\dfrac{\text{定理6：}n(Y)=n(S)-n(X) \qquad n(X)=n(X_B) \quad n(Y)=n(Y_B) \quad n(S)=n(S_B)}{n(Y_B)=n(S_B)-n(X_B)}\ (\text{＝代入})$$

$$\dfrac{\dfrac{n(Y_B)=n(S_B)-n(X_B) \qquad n(X_B)=1 \quad n(S_B)=3}{n(Y_B)=3-1}\ (\text{＝代入})}{n(Y_B)=2}\ (\text{演推})$$

$$\dfrac{\dfrac{n(Y_A)=1 \qquad 1<2}{n(Y_A)<2}\ (\text{推移律}) \qquad \dfrac{n(Y_B)=2}{2=n(Y_B)}\ (\text{対称律})}{C_3: n(Y_A)<n(Y_B)}\ (\text{推移律})$$

付録９　割合に関する概念的知識の「基準量に関する状況」における児童の考え方

①水準０：第３章の「3.2.3　基準量に関する状況」を参照。
②水準１(段階1A)：第３章の「3.2.3　基準量に関する状況」を参照。
③水準１(段階1B)：第３章の「3.2.3　基準量に関する状況」を参照。

④水準２

調査問題	仮定	正答	結論	正誤
問題５	$\neg A_1$ B_2 D_1	C_2	C_2	正答

児童の考え方

(Ⅰ)は第３章の「3.2.3　基準量に関する状況」を参照。

(Ⅱ)　D_1 となる条件として，「$n(X_A)=n(Y_A)$，$n(X_B)=n(Y_B)$」を考えている。

$$\frac{n(X_A)=n(Y_A) \qquad n(X_A)=n(Y_A)\rightarrow H(X_A)}{H(X_A):P(X_A)=1/2}\ (\rightarrow\text{除})$$

$$\frac{n(X_B)=n(Y_B) \qquad n(X_B)=n(Y_B)\rightarrow H(X_B)}{H(X_B):P(X_B)=1/2}\ (\rightarrow\text{除})$$

$$\frac{\dfrac{H(X_A) \quad H(X_B)}{H(X_A)\wedge H(X_B)}\ (\wedge\text{入}) \qquad H(X_A)\wedge H(X_B)\rightarrow P(X_A)=P(X_B)}{D_1\ :P(X_A)=P(X_B)}\ (\rightarrow\text{除})$$

$$\frac{\dfrac{n(X_A)=n(Y_A)}{n(Y_A)=n(X_A)}\ (\text{対称律}) \qquad B_2:n(X_A)>n(X_B)}{n(Y_A)>n(X_B)}\ (\text{推移律})$$

$$\frac{n(Y_A)>n(X_B) \qquad n(X_B)=n(Y_B)}{C_2:n(Y_A)>n(Y_B)}\ (\text{推移律})$$

(Ⅲ)

$$\frac{\text{定義}:P(Z)=n(Z)\div n(S) \qquad n(Z)=n(X_A) \quad n(S)=n(S_A) \quad P(Z)=P(X_A)}{P(X_A)=n(X_A)\div n(S_A)}\ (=\text{代入})$$

$$\frac{\text{定義}:P(Z)=n(Z)\div n(S) \qquad n(Z)=n(X_B) \quad n(S)=n(S_B) \quad P(Z)=P(X_B)}{P(X_B)=n(X_B)\div n(S_B)}\ (=\text{代入})$$

$$\frac{D_1:P(X_A)=P(X_B) \qquad P(X_A)=n(X_A)\div n(S_A) \quad P(X_B)=n(X_B)\div n(S_B)}{n(X_A)\div n(S_A)=n(X_B)\div n(S_B)}\ (=\text{代入})$$

$$\begin{array}{cl}
1 = 1 \qquad n(X_A) \div n(S_A) = n(X_B) \div n(S_B) & \\ \hline
1 \div (n(X_A) \div n(S_A)) = 1 \div (n(X_B) \div n(S_B)) & (==) \\ \hline
n(S_A) \div n(Y_A) = 1 \div (n(X_B) \div n(S_B)) & \text{(演推)※1} \\ \hline
n(S_A) \div n(X_A) = n(S_B) \div n(X_B) & \text{(演推)※1}
\end{array}$$

※1
$1 \div (n(X_A) \div n(S_A))$
$= 1 \times n(S_A) \div (n(X_A) \div n(S_A) \times n(S_A))$
$= n(S_A) \div n(X_A)$

※1
$1 \div (n(X_B) \div n(S_B))$
$= 1 \times n(S_B) \div (n(X_B) \div n(S_B) \times n(S_B))$
$= n(S_B) \div n(X_B)$

$$\begin{array}{cl}
B_2 : n(X_A) > n(X_B) \qquad n(S_A) \div n(X_A) = n(S_B) \div n(X_B) & \\ \hline
n(X_A) \times n(S_A) \div n(X_A) > n(X_B) \times n(S_B) \div n(X_B) & (>=1) \\ \hline
n(S_A) > n(X_B) \times n(S_B) \div n(X_B) & \text{(演推)※4} \\ \hline
A_2 : n(S_A) > n(S_B) & \text{(演推)※4}
\end{array}$$

※4 $n(X_A) \times n(S_A) \div n(X_A)$
$= n(S_A) \times n(X_A) \div n(X_A)$
$= n(S_A) \times 1$
$= n(S_A)$

※4 $n(X_B) \times n(S_B) \div n(X_B)$
$= n(S_B) \times n(X_B) \div n(X_B)$
$= n(S_B) \times 1$
$= n(S_B)$

$$\frac{1 = 1 \qquad D_1 : P(X_A) = P(X_B)}{1 - P(X_A) = 1 - P(X_B)} \ (==)$$

$$\begin{array}{cl}
\text{定理1} \quad P(Y) = 1 - P(X) \qquad P(X) = P(X_A) \quad P(Y) = P(Y_A) & \\ \hline
P(Y_A) = 1 - P(X_A) & \text{(=代入)} \\ \hline
1 - P(X_A) = P(Y_A) & \text{(対称律)}
\end{array}$$

$$\begin{array}{cl}
\text{定理1} \quad P(Y) = 1 - P(X) \qquad P(X) = P(X_B) \quad P(Y) = P(Y_B) & \\ \hline
P(Y_B) = 1 - P(X_B) & \text{(=代入)} \\ \hline
1 - P(X_B) = P(Y_B) & \text{(対称律)}
\end{array}$$

$$\frac{1 - P(X_A) = 1 - P(X_B) \qquad 1 - P(X_A) = P(Y_A) \quad 1 - P(X_B) = P(Y_B)}{E_1 : P(Y_A) = P(Y_B)} \ \text{(=代入)}$$

$$\frac{A_2 : n(S_A) > n(S_B) \qquad E_1 : P(Y_A) = P(Y_B)}{n(S_A) \times P(Y_A) > n(S_B) \times P(Y_B)} \ (>=1)$$

$$\begin{array}{cl}
\text{定理3}: n(Z) = n(S) \times P(Z) \qquad n(Z) = n(Y_A) \quad n(S) = n(S_A) \quad P(Z) = P(Y_A) & \\ \hline
n(Y_A) = n(S_A) \times P(Y_A) & \text{(=代入)} \\ \hline
n(S_A) \times P(Y_A) = n(Y_A) & \text{(対称律)}
\end{array}$$

$$\begin{array}{cl}
\text{定理3}: n(Z) = n(S) \times P(Z) \qquad n(Z) = n(Y_B) \quad n(S) = n(S_B) \quad P(Z) = P(Y_B) & \\ \hline
n(Y_B) = n(S_B) \times P(Y_B) & \text{(=代入)} \\ \hline
n(S_B) \times P(Y_B) = n(Y_B) & \text{(対称律)}
\end{array}$$

<table>
<tr><td colspan="3">$\underline{\mathbf{n(S_A)\times P(Y_A) > n(S_B)\times P(Y_B)}}$ $\underline{n(S_A)\times P(Y_A)=n(Y_A)\quad n(S_B)\times P(Y_B)=n(Y_B)}$（＝代入）
$C_2 : n(Y_A) > n(Y_B)$</td></tr>
<tr><td>調査問題</td><td>仮定の候補</td><td>正誤</td></tr>
<tr><td>問題４</td><td>$\neg A_1$
B_2
D_2</td><td>正答</td></tr>
<tr><td colspan="3">正答</td></tr>
<tr><td colspan="3">$(\exists x \exists y \exists z \exists w\ [n(X_A)=x \land n(X_B)=y \land x>y$
$\land\ n(S_A)=z \land n(S_B)=w \land z>w$
$\land\ P(X_A)=x/z \land P(X_B)=y/w \land x/z>y/w$
$\land\ n(Y_A)=z-x \land n(Y_B)=w-y \land z-x=w-y])$
$\land(\exists x' \exists y' \exists z' \exists w'\ [n(X_A)=x' \land n(X_B)=y' \land x'>y'$
$\land\ n(S_A)=z' \land n(S_B)=w' \land z'>w'$
$\land\ P(X_A)=x'/z' \land P(X_B)=y'/w' \land x'/z'>y'/w'$
$\land\ n(Y_A)=z'-x' \land n(Y_B)=w'-y' \land z'-x'>w'-y'])$
$\land(\exists x'' \exists y'' \exists z'' \exists w''\ [n(X_A)=x'' \land n(X_B)=y'' \land x''>y''$
$\land\ n(S_A)=z'' \land n(S_B)=w'' \land z''>w''$
$\land\ P(X_A)=x''/z'' \land P(X_B)=y''/w'' \land x''/z''>y''/w''$
$\land\ n(Y_A)=z''-x'' \land n(Y_B)=w''-y'' \land z''-x''<w''-y''])$</td></tr>
<tr><td colspan="3">結論</td></tr>
<tr><td colspan="3">(Ⅰ)は第３章の「3.2.3　基準量に関する状況」を参照。

(Ⅱ)　$(\exists x \exists y \exists z \exists w\ [n(X_A)=x \land n(X_B)=y \land x>y$
$\land\ n(Y_A)=z \land n(Y_B)=w \land z=w$
$\land\ P(X_A)=x/(x+z) \land P(X_B)=y/(y+w) \land x/(x+z)>y/(y+w)])$
$\land(\exists x' \exists y' \exists z' \exists w'\ [n(X_A)=x' \land n(X_B)=y' \land x'>y'$
$\land\ n(Y_A)=z' \land n(Y_B)=w' \land z'<w'$
$\land\ P(X_A)=x'/(x'+z') \land P(X_B)=y'/(y'+w') \land x'/(x'+z')>y'/(y'+w')])$
$\land(\exists x'' \exists y'' \exists z'' \exists w''\ [n(X_A)=x'' \land n(X_B)=y'' \land n(Y_A)=z'' \land n(Y_B)=w''$
$\land\ x''>z'' \land y''<w'' \land x''>y'' \land z''>w''$
$\land\ P(X_A)=x''/(x''+z'') \land P(X_B)=y''/(y''+w'') \land x''/(x''+z'')>y''/(y''+w'')])$

(Ⅲ)　$(\exists x \exists y \exists z \exists w\ [n(X_A)=x \land n(X_B)=y \land x>y$
$\land\ n(Y_A)=z \land n(Y_B)=w \land z=w$
$\land\ n(S_A)=x+z \land n(S_B)=y+w \land x+z>y+w$
$\land\ P(X_A)=x/(x+z) \land P(X_B)=y/(y+w) \land x/(x+z)>y/(y+w)])$
$\land(\exists x' \exists y' \exists z' \exists w'\ [n(X_A)=x' \land n(X_B)=y' \land x'>y'$
$\land\ n(Y_A)=z' \land n(Y_B)=w' \land z'<w'$
$\land\ n(S_A)=x'+z' \land n(S_B)=y'+w' \land x'+z'>y'+w'$
$\land\ P(X_A)=x'/(x'+z') \land P(X_B)=y'/(y'+w') \land x'/(x'+z')>y'/(y'+w')])$
$\land(\exists x'' \exists y'' \exists z'' \exists w''\ [n(X_A)=x'' \land n(X_B)=y'' \land x''>y''$
$\land\ n(Y_A)=z'' \land n(Y_B)=w'' \land z''>w''$
$\land\ n(S_A)=x''+z'' \land n(S_B)=y''+w'' \land x''+z''>y''+w''$
$\land\ P(X_A)=x''/(x''+z'') \land P(X_B)=y''/(y''+w'') \land x''/(x''+z'')>y''/(y''+w'')])$</td></tr>
<tr><td colspan="3">児童の考え方</td></tr>
</table>

（Ⅱ） $n(X_A)=a$，$n(X_B)=b$，$n(Y_A)=c$，$n(Y_B)=d$ …①

①の「,」を除いて列記したものを$\boxed{1}$とする。

$$\frac{\boxed{1}\quad a>b\quad c=d\quad a/(a+c)>b/(b+d)}{\begin{aligned}\exists x\exists y\exists z\exists w\ [&n(X_A)=x\wedge n(X_B)=y\wedge x>y\\ &\wedge n(Y_A)=z\wedge n(Y_B)=w\wedge z=w\\ &\wedge P(X_A)=x/(x+z)\wedge P(X_B)=y/(y+w)\wedge x/(x+z)>y/(y+w)]\end{aligned}}\ (\exists\exists\text{入})\ \cdots ⓐ$$

$n(X_A)=a'$，$n(X_B)=b'$，$n(Y_A)=c'$，$n(Y_B)=d''$…②

②の「,」を除いて列記したものを$\boxed{2}$とする。

$$\frac{\boxed{2}\quad a'>b'\quad c'<d'\quad a'/(a'+c')>b'/(b'+d')}{\begin{aligned}\exists x'\exists y'\exists z'\exists w'\ [&n(X_A)=x'\wedge n(X_B)=y'\wedge x'>y'\\ &\wedge n(Y_A)=z'\wedge n(Y_B)=w'\wedge z'<w'\\ &\wedge P(X_A)=x'/(x'+z')\wedge P(X_B)=y'/(y'+w')\wedge x'/(x'+z')>y'/(y'+w')]\end{aligned}}\ (\exists\exists\text{入})\ \cdots ⓑ$$

$n(X_A)=a''$，$n(X_B)=b''$，$n(Y_A)=c''$，$n(Y_B)=d''$，$a''>c''$，$b''<d''$…③

③の「,」を除いて列記したものを$\boxed{3}$とする。

$$\frac{\boxed{3}\quad a''>b''\quad c''>d''\quad a''/(a''+c'')>b''/(b''+d'')}{\begin{aligned}\exists x''\exists y''\exists z''\exists w''\ [&n(X_A)=x''\wedge n(X_B)=y''\wedge n(Y_A)=z''\wedge n(Y_B)=w''\\ &\wedge x''>z''\wedge y''<w''\wedge x''>y''\wedge z''>w''\\ &\wedge P(X_A)=x''/(x''+z'')\wedge P(X_B)=y''/(y''+w'')\wedge x''/(x''+z'')>y''/(y''+w'')]\end{aligned}}\ (\exists\exists\text{入})\ \cdots ⓒ$$

$$\frac{ⓐ\quad ⓑ\quad ⓒ}{\begin{aligned}&(\exists x\exists y\exists z\exists w\ [n(X_A)=x\wedge n(X_B)=y\wedge x>y\\ &\qquad\wedge n(Y_A)=z\wedge n(Y_B)=w\wedge z=w\\ &\qquad\wedge P(X_A)=x/(x+z)\wedge P(X_B)=y/(y+w)\wedge x/(x+z)>y/(y+w)])\\ &\wedge(\exists x'\exists y'\exists z'\exists w'\ [n(X_A)=x'\wedge n(X_B)=y'\wedge x'>y'\\ &\qquad\wedge n(Y_A)=z'\wedge n(Y_B)=w'\wedge z'<w'\\ &\qquad\wedge P(X_A)=x'/(x'+z')\wedge P(X_B)=y'/(y'+w')\wedge x'/(x'+z')>y'/(y'+w')])\\ &\wedge(\exists x''\exists y''\exists z''\exists w''\ [n(X_A)=x''\wedge n(X_B)=y''\wedge n(Y_A)=z''\wedge n(Y_B)=w''\\ &\qquad\wedge x''>z''\wedge y''<w''\wedge x''>y''\wedge z''>w''\\ &\qquad\wedge P(X_A)=x''/(x''+z'')\wedge P(X_B)=y''/(y''+w'')\wedge x''/(x''+z'')>y''/(y''+w'')])\end{aligned}}\ (\wedge\wedge\text{入})$$

$n(Y_A)$と $n(Y_B)$の大小関係及び相等関係として，「$n(Y_A)>n(Y_B)$」，「$n(Y_A)=n(Y_B)$」，「$n(Y_A)<n(Y_B)$」の３つを条件を仮定して考えている。

(1) $n(Y_A)=n(Y_B)$

$n(X_A)=a$，$n(X_B)=b$，$n(Y_A)=c$，$n(Y_B)=d$とすると，$a>b$，$c=d$，$a/(a+c)>b/(b+d)$の条件が導かれる。

$$\frac{n(Y_A)=n(Y_B)\qquad n(Y_A)=c\qquad n(Y_B)=d}{c=d}\ (=代入)$$

$$\frac{B_2: n(X_A)>n(X_B)\qquad n(X_A)=a\qquad n(X_B)=b}{a>b}\ (=代入)$$

$$\dfrac{a>b\qquad c=d}{a\div c>b\div d}\ (>=1)$$
$$\dfrac{1=1\qquad a\div c>b\div d}{1\div(a\div c)<1\div(b\div d)}\ (>=2)$$
$$\dfrac{1\div(a\div c)<1\div(b\div d)}{c\div a<1\div(b\div d)}\ (演推)※1$$
$$\dfrac{c\div a<1\div(b\div d)}{c\div a<d\div b}\ (演推)※1$$

※1
$1\div(a\div c)$
$=(1\times c)\div(a\div c\times c)$
$=c\div a$

※1
$1\div(b\div d)$
$=(1\times d)\div(b\div d\times d)$
$=d\div b$

$$\dfrac{1=1\qquad c\div a<d\div b}{1+(c\div a)<1+(d\div b)}\ (>=1)$$
$$\dfrac{1+(c\div a)<1+(d\div b)}{(a+c)\div a<1+(d\div b)}\ (演推)※2$$
$$\dfrac{(a+c)\div a<1+(d\div b)}{(a+c)\div a<(b+d)\div b}\ (演推)※2$$

※2
$1+(c\div a)$
$=(a\div a)+(c\div a)$
$=(a+c)\div a$

※2
$1+(d\div b)$
$=(b\div b)+(d\div b)$
$=(b+d)\div b$

$$\dfrac{(a+c)\div a<(b+d)\div b}{(a+c)/a<(b+d)\div b}\ (演推)$$
$$\dfrac{(a+c)/a<(b+d)\div b}{(a+c)/a<(b+d)/b}\ (演推)$$
$$\dfrac{1=1\qquad (a+c)/a<(b+d)/b}{1\div(a+c)/a>1\div(b+d)/b}\ (>=2)$$
$$\dfrac{1\div(a+c)/a>1\div(b+d)/b}{a/(a+c)>1\div(b+d)/b}\ (演推)※6$$
$$\dfrac{a/(a+c)>1\div(b+d)/b}{a/(a+c)>b/(b+d)}\ (演推)※6$$

※6
$1\div(a+c)/a=(1\times a)\div((a+c)/a\times a)$
$=a\div(a+c)$

※6
$1\div(b+d)/b=(1\times b)\div((b+d)/b\times b)$
$=b\div(b+d)$

(2) $n(Y_A)<n(Y_B)$

$n(X_A)=a'$，$n(X_B)=b'$，$n(Y_A)=c'$，$n(Y_B)=d'$とすると，$a'>b'$，$c'<d'$，$a'/(a'+c')>b'/(b'+d')$の条件が導かれる。

$$\frac{n(Y_A)<n(Y_B)\qquad n(Y_A)=c'\qquad n(Y_B)=d'}{c'<d'}\ (=代入)$$

$$\frac{B_2: n(X_A)>n(x_B)\qquad n(X_A)=a'\qquad n(X_B)=b'}{a'>b'}\ (=代入)$$

$$\dfrac{c'<d'}{d'>c'}\ (<>)$$
$$\dfrac{a'>b'\qquad d'>c'}{a'\div c'>b'\div d'}\ (>>2)$$
$$\dfrac{1=1\qquad a'\div c'>b'\div d'}{1\div(a'\div c')<1\div(b'\div d')}\ (>=2)$$
$$\dfrac{1\div(a'\div c')<1\div(b'\div d')}{c'\div a'<1\div(b'\div d')}\ (演推)※1$$
$$\dfrac{c'\div a'<1\div(b'\div d')}{c'\div a'<d'\div b'}\ (演推)※1$$
$$\dfrac{1=1\qquad c'\div a'<d'\div b'}{1+(c'\div a')<1+(d'\div b')}\ (>=1)$$
$$\dfrac{1+(c'\div a')<1+(d'\div b')}{(a'+c')\div a'<1+(d'\div b')}\ (演推)※2$$
$$\dfrac{(a'+c')\div a'<1+(d'\div b')}{(a'+c')\div a'<(b'+d')\div b'}\ (演推)※2$$
$$\dfrac{(a'+c')\div a'<(b'+d')\div b'}{(a'+c')/a'<(b'+d')\div b'}\ (演推)$$
$$\dfrac{(a'+c')/a'<(b'+d')\div b'}{(a'+c')/a'<(b'+d')/b'}\ (演推)$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{1=1 \qquad (a'+c')/a' < (b'+d')/b'}{1 \div (a'+c')/a' > 1 \div (b'+d')/b'}\,(>=2)}{a'/(a'+c') > 1 \div (b'+d')/b'}\,(\text{演推※}6)}{a'/(a'+c') > b'/(b'+d')}\,(\text{演推※}6)$$

(3) $n(Y_A) > n(Y_B)$

$n(Y_A) > n(Y_B)$ と B_2 の条件から D_2 を導くことができない。そこで，「当たりくじの本数がはずれくじの本数より多いくじは，当たりくじの方が出やすい」，「はずれくじの本数が当たりくじの本数より多いくじは，はずれくじの方が出やすい」という考えに基づいて，D_2 となる条件として，「$n(X_A) > n(Y_A)$，$n(X_B) < n(Y_B)$」を考えている。

$$\dfrac{n(X_A) > n(Y_A) \qquad \mathbf{n(X_A) > n(Y_A) \to W(X_A)}}{W(X_A) : P(X_A) > 1/2}\,(\to\text{除})$$

$$\dfrac{n(X_B) < n(Y_B) \qquad \mathbf{n(X_B) < n(Y_B) \to L(X_B)}}{L(X_B) : P(X_B) < 1/2}\,(\to\text{除})$$

$$\dfrac{\dfrac{W(X_A) \quad L(X_B)}{W(X_A) \land L(X_B)}\,(\land\text{入}) \qquad \mathbf{W(X_A) \land L(X_B) \to P(X_A) > P(X_B)}}{D_2 : P(X_A) > P(X_B)}\,(\to\text{除})$$

$$\dfrac{\dfrac{n(X_A) > n(Y_A) \qquad n(Y_A) > n(Y_B)}{n(X_A) > n(Y_B)}\,(\text{推移律}) \qquad \dfrac{n(X_B) < n(Y_B)}{n(Y_B) > n(X_B)}\,(<>)}{B_2 : n(X_A) > n(X_B)}\,(\text{推移律})$$

$n(X_A) = a''$，$n(X_B) = b''$，$n(Y_A) = c''$，$n(Y_B) = d''$とすると，$a'' > b''$，$c'' > d''$，$a'' > c''$，$b'' < d''$，$a''/(a''+c'') > b''/(b''+d'')$の条件が導かれる。

$$\dfrac{n(Y_A) > n(Y_B) \qquad n(Y_A) = c'' \quad n(Y_B) = d''}{c'' > d''}\,(=\text{代入})$$

$$\dfrac{n(X_A) > n(Y_A) \qquad n(X_A) = a'' \qquad n(Y_A) = c''}{a'' > c''}\,(=\text{代入})$$

$$\dfrac{n(X_B) < n(Y_B) \qquad n(X_B) = b'' \qquad n(Y_B) = d''}{b'' < d''}\,(=\text{代入})$$

$$\dfrac{B_2 : n(X_A) > n(X_B) \qquad n(X_A) = a'' \qquad n(X_B) = b''}{a'' > b''}\,(=\text{代入})$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{反射律}: a'' = a'' \qquad a'' > c''}{a''+a'' > a''+c''}\,(>=1) \qquad a'' = a''}{(a''+a'') \div a'' > (a''+c'') \div a''}\,(>=1)}{2 > (a''+c'') \div a''}\,(\text{演推※}5)}{2 > (a''+c'')/a''}\,(\text{演推})$$

※5

$$\begin{aligned}(a''+a'') \div a'' &= a'' \div a'' + a'' \div a'' \\ &= 1+1 \\ &= 2\end{aligned}$$

$$\dfrac{1=1 \qquad 2>(a''+c'')/a''}{1\div 2<1\div(a''+c'')/a''}\ (>=2)$$

$$\dfrac{1\div 2<1\div(a''+c'')/a''}{1/2<1\div(a''+c'')/a''}\ (\text{演推})$$

$$\dfrac{1/2<1\div(a''+c'')/a''}{1/2<a''/(a''+c'')}\ (\text{演推})※6$$

$$\dfrac{\text{反射律}: b''=b'' \qquad b''<d''}{b''+b''<b''+d''}\ (>=1)$$

$$\dfrac{b''+b''<b''+d'' \qquad b''=b''}{(b''+b'')\div b''<(b''+d'')\div b''}\ (>=1)$$

$$\dfrac{(b''+b'')\div b''<(b''+d'')\div b''}{2<(b''+d'')\div b''}\ (\text{演推})※5$$

$$\dfrac{2<(b''+d'')\div b''}{2<(b''+d'')/b''}\ (\text{演推})$$

$$\dfrac{1=1 \qquad 2<(b''+d'')/b''}{1\div 2>1\div(b''+d'')/b''}\ (>=2)$$

$$\dfrac{1\div 2>1\div(b''+d'')/b''}{1/2>1\div(b''+d'')/b''}\ (\text{演推})$$

$$\dfrac{1/2>1\div(b''+d'')/b''}{1/2>b''/(b''+d'')}\ (\text{演推})※6$$

※5
$(b''+b'')\div b''=b''\div b''+b''\div b''$
$=1+1$
$=2$

$$\dfrac{1/2<a''/(a''+c'')}{a''/(a''+c'')>1/2}\ (<>)$$

$$\dfrac{a''/(a''+c'')>1/2 \qquad 1/2>b''/(b''+d'')}{a''/(a''+c'')>b''/(b''+d'')}\ (\text{推移律})$$

(Ⅲ)　$n(X_A)=8,\ n(X_B)=4,\ n(Y_A)=4,\ n(Y_B)=4$ …①

①の「,」を除いて列記したものを①とする。

$$\dfrac{\boxed{1} \quad 8>4 \quad 4=4 \quad 8+4>4+4 \quad 8/(8+4)>4/(4+4)}{\begin{aligned}\exists x\exists y\exists z\exists w\,[&n(X_A)=x\wedge n(X_B)=y\wedge x>y\\ &\wedge n(Y_A)=z\wedge n(Y_B)=w\wedge z=w\\ &\wedge n(S_A)=x+z\wedge n(S_B)=y+w\wedge x+z>y+w\\ &\wedge P(X_A)=x/(x+z)\wedge P(X_B)=y/(y+w)\wedge x/(x+z)>y/(y+w)]\end{aligned}}\ (\exists\exists\text{入})$$

…ⓐ

$n(X_A)=8,\ n(X_B)=4,\ n(Y_A)=4,\ n(Y_B)=6$ …②

②の「,」を除いて列記したものを②とする。

$$\dfrac{\boxed{2} \quad 8>4 \quad 4<6 \quad 8+4>4+6 \quad 8/(8+4)>4/(4+6)}{\begin{aligned}\exists x'\exists y'\exists z'\exists w'\,[&n(X_A)=x'\wedge n(X_B)=y'\wedge x'>y'\\ &\wedge n(Y_A)=z'\wedge n(Y_B)=w'\wedge z'<w'\\ &\wedge n(S_A)=x'+z'\wedge n(S_B)=y'+w'\wedge x'+z'>y'+w'\\ &\wedge P(X_A)=x'/(x'+z')\wedge P(X_B)=y'/(y'+w')\wedge x'/(x'+z')>y'/(y'+w')]\end{aligned}}\ (\exists\exists\text{入})$$

…ⓑ

$n(X_A)=8,\ n(X_B)=4,\ n(Y_A)=6,\ n(Y_B)=4$ …③

③の「,」を除いて列記したものを③とする。

$$\dfrac{\boxed{3} \quad 8>4 \quad 6>4 \quad 8+6>4+4 \quad 8/(8+6)>4/(4+4)}{\begin{aligned}\exists x''\exists y''\exists z''\exists w''\,[&n(X_A)=x''\wedge n(X_B)=y''\wedge x''>y''\\ &\wedge n(Y_A)=z''\wedge n(Y_B)=w''\wedge z''>w''\\ &\wedge n(S_A)=x''+z''\wedge n(S_B)=y''+w''\wedge x''+z''>y''+w''\end{aligned}}\ (\exists\exists\text{入})$$

$\wedge P(X_A) = x''/(x''+z'') \wedge P(X_B) = y''/(y''+w'') \wedge x''/(x''+z'') > y''/(y''+w'')]$ …ⓒ

$$\frac{\text{ⓐ} \qquad \text{ⓑ} \qquad \text{ⓒ}}{\begin{array}{l}(\exists x \exists y \exists z \exists w\,[n(X_A) = x \wedge n(X_B) = y \wedge x > y \\ \quad \wedge n(Y_A) = z \wedge n(Y_B) = w \wedge z = w \\ \quad \wedge n(S_A) = x + z \wedge n(S_B) = y + w \wedge x + z > y + w \\ \quad \wedge P(X_A) = x/(x + z) \wedge P(X_B) = y/(y + w) \wedge x/(x + z) > y/(y + w)]) \\ \wedge (\exists x' \exists y' \exists z' \exists w'\,[n(X_A) = x' \wedge n(X_B) = y' \wedge x' > y' \\ \quad \wedge n(Y_A) = z' \wedge n(Y_B) = w' \wedge z' < w' \\ \quad \wedge n(S_A) = x' + z' \wedge n(S_B) = y' + w' \wedge x' + z' > y' + w' \\ \quad \wedge P(X_A) = x'/(x' + z') \wedge P(X_B) = y'/(y' + w') \wedge x'/(x' + z') > y'/(y' + w')]) \\ \wedge (\exists x'' \exists y'' \exists z'' \exists w''\,[n(X_A) = x'' \wedge n(X_B) = y'' \wedge x'' > y'' \\ \quad \wedge n(Y_A) = z'' \wedge n(Y_B) = w'' \wedge z'' > w'' \\ \quad \wedge n(S_A) = x'' + z'' \wedge n(S_B) = y'' + w'' \wedge x'' + z'' > y'' + w'' \\ \quad \wedge P(X_A) = x''/(x'' + z'') \wedge P(X_B) = y''/(y'' + w'') \wedge x''/(x'' + z'') > y''/(y'' + w'')]\end{array}} \ (\wedge\wedge\text{入})$$

$n(Y_A)$と $n(Y_B)$の大小関係及び相等関係として，「$n(Y_A) > n(Y_B)$」，「$n(Y_A) = n(Y_B)$」，「$n(Y_A) < n(Y_B)$」の３つを条件を仮定して考えている。

８とその半分である４を基本として，２つのくじの当たりくじの本数とはずれくじの本数を考えている。「$n(Y_A) = n(Y_B)$」と B_2 の条件を満たすように，$n(X_A) = 4$，$n(X_B) = 4$，$n(Y_A) = 4$，$n(Y_B) = 4$ の条件を基に，$n(X_A)$の項に×２している。

(1) $n(X_A) = 8$，$n(X_B) = 4$，$n(Y_A) = 4$，$n(Y_B) = 4$

$$\cfrac{\cfrac{n(X_A) = 8 \qquad 8 > 4}{n(X_A) > 4}\ (\text{推移律}) \qquad \cfrac{n(X_B) = 4}{4 = n(X_B)}\ (\text{対称律})}{B_2 : n(X_A) > n(X_B)}\ (\text{推移律})$$

$$\cfrac{n(Y_A) = 4 \qquad \cfrac{n(Y_B) = 4}{4 = n(Y_B)}\ (\text{対称律})}{C_1 : n(Y_A) = n(Y_B)}\ (\text{推移律})$$

$$\frac{\text{定理５}: n(S) = n(X) + n(Y) \qquad n(X) = n(X_A) \quad n(Y) = n(Y_A) \quad n(S) = n(S_A)}{n(S_A) = n(X_A) + n(Y_A)}\ (=\text{代入})$$

$$\cfrac{n(S_A) = n(X_A) + n(Y_A) \qquad n(X_A) = 8 \quad n(Y_A) = 4}{\cfrac{n(S_A) = 8 + 4}{n(S_A) = 12}\ (\text{演推})}\ (=\text{代入})$$

$$\frac{\text{定理５}: n(S) = n(X) + n(Y) \qquad n(X) = n(X_B) \quad n(Y) = n(Y_B) \quad n(S) = n(S_B)}{n(S_B) = n(X_B) + n(Y_B)}\ (=\text{代入})$$

$$\cfrac{n(S_B) = n(X_B) + n(Y_B) \qquad n(X_B) = 4 \quad n(Y_B) = 4}{\cfrac{n(S_B) = 4 + 4}{n(S_B) = 8}\ (\text{演推})}\ (=\text{代入})$$

$$\dfrac{\dfrac{n(S_A)=12 \qquad 12>8}{n(S_A)>8}\text{（推移律）} \qquad \dfrac{n(S_B)=8}{8=n(S_B)}\text{（対称律）}}{A_2:n(S_A)>n(S_B)}\text{（推移律）}$$

$$\dfrac{\dfrac{n(X_A)=8 \qquad n(S_A)=8+4}{n(X_A)\div n(S_A)=8\div(8+4)}\text{（==）}}{n(X_A)\div n(S_A)=2/3}\text{（演推）}$$

$$\dfrac{\dfrac{n(X_A)\div n(S_A)=2/3 \qquad 2/3>1/2}{n(X_A)\div n(S_A)>1/2}\text{（推移律）} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{n(X_B)=4 \qquad n(S_B)=4+4}{n(X_B)\div n(S_B)=4\div(4+4)}\text{（==）}}{n(X_B)\div n(S_B)=1/2}\text{（演推）}}{1/2=n(X_B)\div n(S_B)}\text{（対称律）}}{n(X_A)\div n(S_A)>n(X_B)\div n(S_B)}\text{（推移律）}$$

$$\dfrac{\dfrac{\text{定義：}P(Z)=n(Z)\div n(S) \qquad n(Z)=n(X_A) \quad n(S)=n(S_A) \quad P(Z)=P(X_A)}{P(X_A)=n(X_A)\div n(S_A)}\text{（=代入）}}{n(X_A)\div n(S_A)=P(X_A)}\text{（対称律）}$$

$$\dfrac{\dfrac{\text{定義：}P(Z)=n(Z)\div n(S) \qquad n(Z)=n(X_B) \quad n(S)=n(S_B) \quad P(Z)=P(X_B)}{P(X_B)=n(X_B)\div n(S_B)}\text{（=代入）}}{n(X_B)\div n(S_B)=P(X_B)}\text{（対称律）}$$

$$\dfrac{\mathbf{n(X_A)\div n(S_A)>n(X_B)\div n(S_B)} \qquad n(X_A)\div n(S_A)=P(X_A) \quad n(X_B)\div n(S_B)=P(X_B)}{D_2:P(X_A)>P(X_B)}\text{（=代入）}$$

「$n(Y_A)<n(Y_B)$」と B_2 の条件を満たすように，D_2 となる $n(X_A)=8$，$n(X_B)=4$，$n(Y_A)=4$，$n(Y_B)=4$ の条件を基に，$n(Y_B)$ の項に＋２している。

(2) $n(X_A)=8$，$n(X_B)=4$，$n(Y_A)=4$，$n(Y_B)=6$

$$\dfrac{\dfrac{n(X_A)=8 \qquad 8>4}{n(X_A)>4}\text{（推移律）} \qquad \dfrac{n(X_B)=4}{4=n(X_B)}\text{（対称律）}}{B_2:n(X_A)>n(X_B)}\text{（推移律）}$$

$$\dfrac{\dfrac{n(Y_A)=4 \qquad 4<6}{n(Y_A)<6}\text{（推移律）} \qquad \dfrac{n(Y_B)=6}{6=n(Y_B)}\text{（対称律）}}{C_3:n(Y_A)<n(Y_B)}\text{（推移律）}$$

$$\dfrac{\text{定理５：}n(S)=n(X)+n(Y) \qquad n(X)=n(X_A) \quad n(Y)=n(Y_A) \quad n(S)=n(S_A)}{n(S_A)=n(X_A)+n(Y_A)}\text{（=代入）}$$

$$\dfrac{\dfrac{n(S_A)=n(X_A)+n(Y_A) \qquad n(X_A)=8 \quad n(Y_A)=4}{n(S_A)=8+4}\text{（=代入）}}{n(S_A)=12}\text{（演推）}$$

$$\dfrac{\text{定理５：}n(S)=n(X)+n(Y)\qquad n(X)=n(X_B)\quad n(Y)=n(Y_B)\quad n(S)=n(S_B)}{n(S_B)=n(X_B)+n(Y_B)}\ \text{(＝代入)}$$

$$\dfrac{\dfrac{n(S_B)=n(X_B)+n(Y_B)\qquad n(X_B)=4\quad n(Y_B)=6}{n(S_B)=4+6}\ \text{(＝代入)}}{n(S_B)=10}\ \text{(演推)}$$

$$\dfrac{\dfrac{n(S_A)=12\qquad 12>10}{n(S_A)>10}\ \text{(推移律)}\qquad \dfrac{n(S_B)=10}{10=n(S_B)}\ \text{(対称律)}}{A_2：n(S_A)>n(S_B)}\ \text{(推移律)}$$

$$\dfrac{\dfrac{n(X_A)=8\qquad n(S_A)=8+4}{n(X_A)\div n(S_A)=8\div(8+4)}\ \text{(＝＝)}}{n(X_A)\div n(S_A)=2/3}\ \text{(演推)}$$

$$\dfrac{\dfrac{n(X_A)\div n(S_A)=2/3\qquad 2/3>2/5}{n(X_A)\div n(S_A)>2/5}\ \text{(推移律)}\qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{n(X_B)=4\qquad n(S_B)=4+6}{n(X_B)\div n(S_B)=4\div(4+6)}\ \text{(＝＝)}}{n(X_B)\div n(S_B)=2/5}\ \text{(演推)}}{2/5=n(X_B)\div n(S_B)}\ \text{(対称律)}}{n(X_A)\div n(S_A)>n(X_B)\div n(S_B)}\ \text{(推移律)}$$

$$\dfrac{\dfrac{\text{定義：}P(Z)=n(Z)\div n(S)\qquad n(Z)=n(X_A)\quad n(S)=n(S_A)\quad P(Z)=P(X_A)}{P(X_A)=n(X_A)\div n(S_A)}\ \text{(＝代入)}}{n(X_A)\div n(S_A)=P(X_A)}\ \text{(対称律)}$$

$$\dfrac{\dfrac{\text{定義：}P(Z)=n(Z)\div n(S)\qquad n(Z)=n(X_B)\quad n(S)=n(S_B)\quad P(Z)=P(X_B)}{P(X_B)=n(X_B)\div n(S_B)}\ \text{(＝代入)}}{n(X_B)\div n(S_B)=P(X_B)}\ \text{(対称律)}$$

$$\dfrac{\boldsymbol{n(X_A)\div n(S_A)>n(X_B)\div n(S_B)}\qquad n(X_A)\div n(S_A)=P(X_A)\quad n(X_B)\div n(S_B)=P(X_B)}{D_2：P(X_A)>P(X_B)}\ \text{(＝代入)}$$

「$n(Y_A)>n(Y_B)$」と B_2 の条件を満たすように，D_2 となる $n(X_A)=8$，$n(X_B)=4$，$n(Y_A)=4$，$n(Y_B)=4$ の条件を基に，$n(Y_A)$ の項に＋２している。

(3) $n(X_A)=8$，$n(X_B)=4$，$n(Y_A)=6$，$n(Y_B)=4$

$$\dfrac{\dfrac{n(X_A)=8\qquad 8>4}{n(X_A)>4}\ \text{(推移律)}\qquad \dfrac{n(X_B)=4}{4=n(X_B)}\ \text{(対称律)}}{B_2：n(X_A)>n(X_B)}\ \text{(推移律)}$$

$$\dfrac{\dfrac{n(Y_A)=6\qquad 6>4}{n(Y_A)>4}\ \text{(推移律)}\qquad \dfrac{n(Y_B)=4}{4=n(Y_B)}\ \text{(対称律)}}{C_2：n(Y_A)>n(Y_B)}\ \text{(推移律)}$$

$$\dfrac{\text{定理５：}n(S)=n(X)+n(Y)\qquad n(X)=n(X_A)\quad n(Y)=n(Y_A)\quad n(S)=n(S_A)}{n(S_A)=n(X_A)+n(Y_A)}\text{（＝代入）}$$

$$\dfrac{\dfrac{n(S_A)=n(X_A)+n(Y_A)\qquad n(X_A)=8\quad n(Y_A)=6}{n(S_A)=8+6}\text{（＝代入）}}{n(S_A)=14}\text{（演推）}$$

$$\dfrac{\text{定理５：}n(S)=n(X)+n(Y)\qquad n(X)=n(X_B)\quad n(Y)=n(Y_B)\quad n(S)=n(S_B)}{n(S_B)=n(X_B)+n(Y_B)}\text{（＝代入）}$$

$$\dfrac{\dfrac{n(S_B)=n(X_B)+n(Y_B)\qquad n(X_B)=4\quad n(Y_B)=4}{n(S_B)=4+4}\text{（＝代入）}}{n(S_B)=8}\text{（演推）}$$

$$\dfrac{\dfrac{n(S_A)=14\qquad 14>8}{n(S_A)>8}\text{（推移律）}\qquad \dfrac{n(S_B)=8}{8=n(S_B)}\text{（対称律）}}{A_2: n(S_A)>n(S_B)}\text{（推移律）}$$

$$\dfrac{\dfrac{n(X_A)=8\qquad n(S_A)=8+6}{n(X_A)\div n(S_A)=8\div(8+6)}\text{（＝＝）}}{n(X_A)\div n(S_A)=4/7}\text{（演推）}$$

$$\dfrac{\dfrac{n(X_A)\div n(S_A)=4/7\qquad 4/7>1/2}{n(X_A)\div n(S_A)>1/2}\text{（推移律）}\qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{n(X_B)=4\qquad n(S_B)=4+4}{n(X_B)\div n(S_B)=4\div(4+4)}\text{（＝＝）}}{n(X_B)\div n(S_B)=1/2}\text{（演推）}}{1/2=n(X_B)\div n(S_B)}\text{（対称律）}}{n(X_A)\div n(S_A)>n(X_B)\div n(S_B)}\text{（推移律）}$$

$$\dfrac{\dfrac{\text{定義：}P(Z)=n(Z)\div n(S)\qquad n(Z)=n(X_A)\quad n(S)=n(S_A)\quad P(Z)=P(X_A)}{P(X_A)=n(X_A)\div n(S_A)}\text{（＝代入）}}{n(X_A)\div n(S_A)=P(X_A)}\text{（対称律）}$$

$$\dfrac{\dfrac{\text{定義：}P(Z)=n(Z)\div n(S)\qquad n(Z)=n(X_B)\quad n(S)=n(S_B)\quad P(Z)=P(X_B)}{P(X_B)=n(X_B)\div n(S_B)}\text{（＝代入）}}{n(X_B)\div n(S_B)=P(X_B)}\text{（対称律）}$$

$$\dfrac{\mathbf{n(X_A)\div n(S_A)>n(X_B)\div n(S_B)}\qquad n(X_A)\div n(S_A)=P(X_A)\quad n(X_B)\div n(S_B)=P(X_B)}{D_2: P(X_A)>P(X_B)}\text{（＝代入）}$$

付録10　割合に関する手続き的知識の「割合に関する状況」の調査問題の証明

【問題１】

仮定	結論
$n(X_A)=3$，$n(X_B)=1$，$n(S_A)=5$，$n(S_B)=5$	D_2

証明

第３章の「3.3.1　割合に関する状況」を参照。

【問題２】

仮定	結論
$n(X_A)=1$，$n(X_B)=3$，$n(S_A)=2$，$n(S_B)=6$	D_1

証明

$$\frac{\text{定義：}P(Z)=n(Z)\div n(S)\qquad n(Z)=n(X_A)\quad n(S)=n(S_A)\quad P(Z)=P(X_A)}{P(X_A)=n(X_A)\div n(S_A)}\ (=\text{代入})$$

$$\cfrac{P(X_A)=n(X_A)\div n(S_A)\qquad n(X_A)=1\quad n(S_A)=2}{\cfrac{P(X_A)=1\div 2}{P(X_A)=1/2}\ (\text{演推})}\ (=\text{代入})$$

$$\frac{\text{定義：}P(Z)=n(Z)\div n(S)\qquad n(Z)=n(X_B)\quad n(S)=n(S_B)\quad P(Z)=P(X_B)}{P(X_B)=n(X_B)\div n(S_B)}\ (=\text{代入})$$

$$\cfrac{P(X_B)=n(X_B)\div n(S_B)\qquad n(X_B)=3\quad n(S_B)=6}{\cfrac{P(X_B)=3\div 6}{P(X_B)=1/2}\ (\text{演推})}\ (=\text{代入})$$

$$\cfrac{P(X_A)=1/2\qquad \cfrac{P(X_B)=1/2}{1/2=P(X_B)}\ (\text{対称律})}{D_1:P(X_A)=P(X_B)}\ (\text{推移律})$$

結論として証明されるのは，D_1 である。

【問題３】

仮定	結論
$n(X_A)=3$，$n(X_B)=3$，$n(S_A)=4$，$n(S_B)=5$	D_2

証明

$$\dfrac{\text{定義}：P(Z)=n(Z)\div n(S) \qquad n(Z)=n(X_A) \quad n(S)=n(S_A) \quad P(Z)=P(X_A)}{P(X_A)=n(X_A)\div n(S_A)}\,(\text{=代入})$$

$$\dfrac{\dfrac{P(X_A)=n(X_A)\div n(S_A) \qquad n(X_A)=3 \quad n(S_A)=4}{P(X_A)=3\div 4}\,(\text{=代入})}{P(X_A)=3/4}\,(\text{演推})$$

$$\dfrac{\text{定義}：P(Z)=n(Z)\div n(S) \qquad n(Z)=n(X_B) \quad n(S)=n(S_B) \quad P(Z)=P(X_B)}{P(X_B)=n(X_B)\div n(S_B)}\,(\text{=代入})$$

$$\dfrac{\dfrac{P(X_B)=n(X_B)\div n(S_B) \qquad n(X_B)=3 \quad n(S_B)=5}{P(X_B)=3\div 5}\,(\text{=代入})}{P(X_B)=3/5}\,(\text{演推})$$

$$\dfrac{\dfrac{P(X_A)=3/4 \qquad 3/4>3/5}{P(X_A)>3/5}\,(\text{推移律}) \qquad \dfrac{P(X_B)=3/5}{3/5=P(X_B)}\,(\text{対称律})}{D_2：P(X_A)>P(X_B)}\,(\text{推移律})$$

結論として証明されるのは，D_2 である。

【問題４】

仮定	結論
$n(X_A)=1$，$n(X_B)=3$，$n(S_A)=4$，$n(S_B)=4$	D_3

証明

$$\dfrac{\text{定義}：P(Z)=n(Z)\div n(S) \qquad n(Z)=n(X_A) \quad n(S)=n(S_A) \quad P(Z)=P(X_A)}{P(X_A)=n(X_A)\div n(S_A)}\,(\text{=代入})$$

$$\dfrac{\dfrac{P(X_A)=n(X_A)\div n(S_A) \qquad n(X_A)=1 \quad n(S_A)=4}{P(X_A)=1\div 4}\,(\text{=代入})}{P(X_A)=1/4}\,(\text{演推})$$

$$\dfrac{\text{定義}：P(Z)=n(Z)\div n(S) \qquad n(Z)=n(X_B) \quad n(S)=n(S_B) \quad P(Z)=P(X_B)}{P(X_B)=n(X_B)\div n(S_B)}\,(\text{=代入})$$

$$\dfrac{\dfrac{P(X_B)=n(X_B)\div n(S_B) \qquad n(X_B)=3 \quad n(S_B)=4}{P(X_B)=3\div 4}\,(\text{=代入})}{P(X_B)=3/4}\,(\text{演推})$$

$$\dfrac{\dfrac{P(X_A)=1/4 \qquad 1/4<3/4}{P(X_A)<3/4}\,(\text{推移律}) \qquad \dfrac{P(X_B)=3/4}{3/4=P(X_B)}\,(\text{対称律})}{D_3：P(X_A)<P(X_B)}\,(\text{推移律})$$

結論として証明されるのは，D_3 である。

【問題５】

仮定	結論
$n(X_A) = 3$，$n(X_B) = 6$，$n(S_A) = 4$，$n(S_B) = 8$	D_1

証明

$$\dfrac{定義：P(Z) = n(Z) \div n(S) \qquad n(Z) = n(X_A) \quad n(S) = n(S_A) \quad P(Z) = P(X_A)}{P(X_A) = n(X_A) \div n(S_A)}\ (=代入)$$

$$\dfrac{\dfrac{P(X_A) = n(X_A) \div n(S_A) \qquad n(X_A) = 3 \quad n(S_A) = 4}{P(X_A) = 3 \div 4}\ (=代入)}{P(X_A) = 3/4}\ (演推)$$

$$\dfrac{定義：P(Z) = n(Z) \div n(S) \qquad n(Z) = n(X_B) \quad n(S) = n(S_B) \quad P(Z) = P(X_B)}{P(X_B) = n(X_B) \div n(S_B)}\ (=代入)$$

$$\dfrac{\dfrac{P(X_B) = n(X_B) \div n(S_B) \qquad n(X_B) = 6 \quad n(S_B) = 8}{P(X_B) = 6 \div 8}\ (=代入)}{P(X_B) = 3/4}\ (演推)$$

$$\dfrac{P(X_A) = 3/4 \qquad \dfrac{P(X_B) = 3/4}{3/4 = P(X_B)}\ (対称律)}{D_1：P(X_A) = P(X_B)}\ (推移律)$$

結論として証明されるのは，D_1 である。

【問題６】

仮定	結論
$n(X_A) = 2$，$n(X_B) = 2$，$n(S_A) = 4$，$n(S_B) = 5$	D_2

証明

$$\dfrac{定義：P(Z) = n(Z) \div n(S) \qquad n(Z) = n(X_A) \quad n(S) = n(S_A) \quad P(Z) = P(X_A)}{P(X_A) = n(X_A) \div n(S_A)}\ (=代入)$$

$$\dfrac{\dfrac{P(X_A) = n(X_A) \div n(S_A) \qquad n(X_A) = 2 \quad n(S_A) = 4}{P(X_A) = 1 \div 2}\ (=代入)}{P(X_A) = 1/2}\ (演推)$$

$$\dfrac{定義：P(Z) = n(Z) \div n(S) \qquad n(Z) = n(X_B) \quad n(S) = n(S_B) \quad P(Z) = P(X_B)}{P(X_B) = n(X_B) \div n(S_B)}\ (=代入)$$

$$\dfrac{\dfrac{P(X_B) = n(X_B) \div n(S_B) \qquad n(X_B) = 2 \quad n(S_B) = 5}{P(X_B) = 2 \div 5}\ (=代入)}{P(X_B) = 2/5}\ (演推)$$

$$\dfrac{\dfrac{\mathrm{P}(X_A)=1/2 \qquad 1/2>2/5}{\mathrm{P}(X_A)>2/5}\,(\text{推移律}) \qquad \dfrac{\mathrm{P}(X_B)=2/5}{2/5=\mathrm{P}(X_B)}\,(\text{対称律})}{D_2 : \mathrm{P}(X_A)>\mathrm{P}(X_B)}\,(\text{推移律})$$

結論として証明されるのは，D_2 である。

【問題７】

仮定	結論
$\mathrm{n}(X_A)=1$，$\mathrm{n}(X_B)=4$，$\mathrm{n}(S_A)=2$，$\mathrm{n}(S_B)=5$	D_3

証明

$$\dfrac{\text{定義}:\mathrm{P}(Z)=\mathrm{n}(Z)\div\mathrm{n}(S) \qquad \mathrm{n}(Z)=\mathrm{n}(X_A) \quad \mathrm{n}(S)=\mathrm{n}(S_A) \quad \mathrm{P}(Z)=\mathrm{P}(X_A)}{\mathrm{P}(X_A)=\mathrm{n}(X_A)\div\mathrm{n}(S_A)}\,(\text{＝代入})$$

$$\dfrac{\dfrac{\mathrm{P}(X_A)=\mathrm{n}(X_A)\div\mathrm{n}(S_A) \qquad \mathrm{n}(X_A)=1 \quad \mathrm{n}(S_A)=2}{\mathrm{P}(X_A)=1\div 2}\,(\text{＝代入})}{\mathrm{P}(X_A)=1/2}\,(\text{演推})$$

$$\dfrac{\text{定義}:\mathrm{P}(Z)=\mathrm{n}(Z)\div\mathrm{n}(S) \qquad \mathrm{n}(Z)=\mathrm{n}(X_B) \quad \mathrm{n}(S)=\mathrm{n}(S_B) \quad \mathrm{P}(Z)=\mathrm{P}(X_B)}{\mathrm{P}(X_B)=\mathrm{n}(X_B)\div\mathrm{n}(S_B)}\,(\text{＝代入})$$

$$\dfrac{\dfrac{\mathrm{P}(X_B)=\mathrm{n}(X_B)\div\mathrm{n}(S_B) \qquad \mathrm{n}(X_B)=4 \quad \mathrm{n}(S_B)=5}{\mathrm{P}(X_B)=4\div 5}\,(\text{＝代入})}{\mathrm{P}(X_B)=4/5}\,(\text{演推})$$

$$\dfrac{\dfrac{\mathrm{P}(X_A)=1/2 \qquad 1/2<4/5}{\mathrm{P}(X_A)<4/5}\,(\text{推移律}) \qquad \dfrac{\mathrm{P}(X_B)=4/5}{4/5=\mathrm{P}(X_B)}\,(\text{対称律})}{D_3 : \mathrm{P}(X_A)<\mathrm{P}(X_B)}\,(\text{推移律})$$

結論として証明されるのは，D_3 である。

【問題８】

仮定	結論
$\mathrm{n}(X_A)=1$，$\mathrm{n}(X_B)=3$，$\mathrm{n}(S_A)=4$，$\mathrm{n}(S_B)=6$	D_3

証明

$$\dfrac{\text{定義}:\mathrm{P}(Z)=\mathrm{n}(Z)\div\mathrm{n}(S) \qquad \mathrm{n}(Z)=\mathrm{n}(X_A) \quad \mathrm{n}(S)=\mathrm{n}(S_A) \quad \mathrm{P}(Z)=\mathrm{P}(X_A)}{\mathrm{P}(X_A)=\mathrm{n}(X_A)\div\mathrm{n}(S_A)}\,(\text{＝代入})$$

$$\dfrac{\dfrac{\mathrm{P}(X_A)=\mathrm{n}(X_A)\div\mathrm{n}(S_A) \qquad \mathrm{n}(X_A)=1 \quad \mathrm{n}(S_A)=4}{\mathrm{P}(X_A)=1\div 4}\,(\text{＝代入})}{\mathrm{P}(X_A)=1/4}\,(\text{演推})$$

$$\frac{\text{定義：}P(Z)=n(Z)\div n(S) \qquad n(Z)=n(X_B) \quad n(S)=n(S_B) \quad P(Z)=P(X_B)}{P(X_B)=n(X_B)\div n(S_B)}\ (=\text{代入})$$

$$\cfrac{\cfrac{P(X_B)=n(X_B)\div n(S_B) \qquad n(X_B)=3 \quad n(S_B)=6}{P(X_B)=3\div 6}\ (=\text{代入})}{P(X_B)=1/2}\ (\text{演推})$$

$$\cfrac{\cfrac{P(X_A)=1/4 \qquad 1/4<1/2}{P(X_A)<1/2}\ (\text{推移律}) \qquad \cfrac{P(X_B)=1/2}{1/2=P(X_B)}\ (\text{対称律})}{D_3: P(X_A)<P(X_B)}\ (\text{推移律})$$

結論として証明されるのは，D_3 である。

【問題９】

仮定	結論
$n(X_A)=2$， $n(X_B)=3$， $n(S_A)=4$， $n(S_B)=5$	D_3
証明	

$$\frac{\text{定義：}P(Z)=n(Z)\div n(S) \qquad n(Z)=n(X_A) \quad n(S)=n(S_A) \quad P(Z)=P(X_A)}{P(X_A)=n(X_A)\div n(S_A)}\ (=\text{代入})$$

$$\cfrac{\cfrac{P(X_A)=n(X_A)\div n(S_A) \qquad n(X_A)=2 \quad n(S_A)=4}{P(X_A)=2\div 4}\ (=\text{代入})}{P(X_A)=1/2}\ (\text{演推})$$

$$\frac{\text{定義：}P(Z)=n(Z)\div n(S) \qquad n(Z)=n(X_B) \quad n(S)=n(S_B) \quad P(Z)=P(X_B)}{P(X_B)=n(X_B)\div n(S_B)}\ (=\text{代入})$$

$$\cfrac{\cfrac{P(X_B)=n(X_B)\div n(S_B) \qquad n(X_B)=3 \quad n(S_B)=5}{P(X_B)=3\div 5}\ (=\text{代入})}{P(X_B)=3/5}\ (\text{演推})$$

$$\cfrac{\cfrac{P(X_A)=1/2 \qquad 1/2<3/5}{P(X_A)<3/5}\ (\text{推移律}) \qquad \cfrac{P(X_B)=3/5}{3/5=P(X_B)}\ (\text{対称律})}{D_3: P(X_A)<P(X_B)}\ (\text{推移律})$$

結論として証明されるのは，D_3 である。

【問題10】

仮定	結論
$n(X_A)=1$， $n(X_B)=3$， $n(S_A)=8$， $n(S_B)=10$	D_3
証明	

$$\frac{\text{定義}：P(Z)=n(Z)\div n(S)\qquad n(Z)=n(X_A)\quad n(S)=n(S_A)\quad P(Z)=P(X_A)}{P(X_A)=n(X_A)\div n(S_A)}\ (=\text{代入})$$

$$\cfrac{P(X_A)=n(X_A)\div n(S_A)\qquad n(X_A)=1\quad n(S_A)=8}{\cfrac{P(X_A)=1\div 8}{P(X_A)=1/8}\ (\text{演推})}\ (=\text{代入})$$

$$\frac{\text{定義}：P(Z)=n(Z)\div n(S)\qquad n(Z)=n(X_B)\quad n(S)=n(S_B)\quad P(Z)=P(X_B)}{P(X_B)=n(X_B)\div n(S_B)}\ (=\text{代入})$$

$$\cfrac{P(X_B)=n(X_B)\div n(S_B)\qquad n(X_B)=3\quad n(S_B)=10}{\cfrac{P(X_B)=3\div 10}{P(X_B)=3/10}\ (\text{演推})}\ (=\text{代入})$$

$$\frac{\dfrac{P(X_A)=1/8\qquad 1/8<3/10}{P(X_A)<3/10}\ (\text{推移律})\qquad \dfrac{P(X_B)=3/10}{3/10=P(X_B)}\ (\text{対称律})}{D_3：P(X_A)<P(X_B)}\ (\text{推移律})$$

結論として証明されるのは，D_3 である。

【問題11】

仮定	結論
$n(X_A)=3$，$n(X_B)=4$，$n(S_A)=4$，$n(S_B)=5$	D_3

証明

$$\frac{\text{定義}：P(Z)=n(Z)\div n(S)\qquad n(Z)=n(X_A)\quad n(S)=n(S_A)\quad P(Z)=P(X_A)}{P(X_A)=n(X_A)\div n(S_A)}\ (=\text{代入})$$

$$\cfrac{P(X_A)=n(X_A)\div n(S_A)\qquad n(X_A)=3\quad n(S_A)=4}{\cfrac{P(X_A)=3\div 4}{P(X_A)=3/4}\ (\text{演推})}\ (=\text{代入})$$

$$\frac{\text{定義}：P(Z)=n(Z)\div n(S)\qquad n(Z)=n(X_B)\quad n(S)=n(S_B)\quad P(Z)=P(X_B)}{P(X_B)=n(X_B)\div n(S_B)}\ (=\text{代入})$$

$$\cfrac{P(X_B)=n(X_B)\div n(S_B)\qquad n(X_B)=4\quad n(S_B)=5}{\cfrac{P(X_B)=4\div 5}{P(X_B)=4/5}\ (\text{演推})}\ (=\text{代入})$$

$$\frac{\dfrac{P(X_A)=3/4\qquad 3/4<4/5}{P(X_A)<4/5}\ (\text{推移律})\qquad \dfrac{P(X_B)=4/5}{4/5=P(X_B)}\ (\text{対称律})}{D_3：P(X_A)<P(X_B)}\ (\text{推移律})$$

結論として証明されるのは，D_3 である。

【問題12】

<table>
<tr><th>仮定</th><th>結論</th></tr>
<tr><td>$n(X_A)=4$，$n(X_B)=3$，$n(S_A)=10$，$n(S_B)=6$</td><td>D_3</td></tr>
<tr><th colspan="2">証明</th></tr>
<tr><td colspan="2">

$$\frac{\text{定義：}P(Z)=n(Z)\div n(S)\qquad n(Z)=n(X_A)\quad n(S)=n(S_A)\quad P(Z)=P(X_A)}{P(X_A)=n(X_A)\div n(S_A)}\ (=\text{代入})$$

$$\cfrac{\cfrac{P(X_A)=n(X_A)\div n(S_A)\qquad n(X_A)=4\quad n(S_A)=10}{P(X_A)=4\div 10}\ (=\text{代入})}{P(X_A)=2/5}\ (\text{演推})$$

$$\frac{\text{定義：}P(Z)=n(Z)\div n(S)\qquad n(Z)=n(X_B)\quad n(S)=n(S_B)\quad P(Z)=P(X_B)}{P(X_B)=n(X_B)\div n(S_B)}\ (=\text{代入})$$

$$\cfrac{\cfrac{P(X_B)=n(X_B)\div n(S_B)\qquad n(X_B)=3\quad n(S_B)=6}{P(X_B)=3\div 6}\ (=\text{代入})}{P(X_B)=1/2}\ (\text{演推})$$

$$\cfrac{\cfrac{P(X_A)=2/5\qquad 2/5<1/2}{P(X_A)<1/2}\ (\text{推移律})\qquad \cfrac{P(X_B)=1/2}{1/2=P(X_B)}\ (\text{対称律})}{D_3:P(X_A)<P(X_B)}\ (\text{推移律})$$

結論として証明されるのは，D_3 である。

</td></tr>
</table>

付録11　割合に関する手続き的知識の「割合に関する状況」における児童の考え方

①水準０

調査問題	仮定の候補	正答	結論	正誤
問題１	$n(X_A)=3$，$n(X_B)=1$，$n(S_A)=5$，$n(S_B)=5$	D_2	D_1	誤答
児童の考え方				
第３章の「3.3.1　割合に関する状況」を参照。				

②水準1A

調査問題	仮定の候補	正答	結論	正誤
問題１	$n(X_A)=3$，$n(X_B)=1$，$n(S_A)=5$，$n(S_B)=5$	D_2	D_2	正答
児童の考え方				
第３章の「3.3.1　割合に関する状況」を参照。				
調査問題	仮定の候補	正答	結論	正誤
問題４	$n(X_A)=1$，$n(X_B)=3$，$n(S_A)=4$，$n(S_B)=4$	D_3	D_3	正答
児童の考え方				

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{n(X_A)=1 \qquad 1<3}{n(X_A)<3}\text{（推移律）} \qquad \dfrac{n(X_B)=3}{3=n(X_B)}\text{（対称律）}}{B_3: n(X_A)<n(X_B)}\text{（推移律）} \qquad n(X_A)<n(X_B)\rightarrow P(X_A)<P(X_B)}{D_3: P(X_A)<P(X_B)}\text{（→除）}$$

調査問題	仮定の候補	正答	結論	正誤
問題６	$n(X_A)=2$，$n(X_B)=2$，$n(S_A)=4$，$n(S_B)=5$	D_2	D_1	誤答
児童の考え方				
第３章の「3.3.1　割合に関する状況」を参照。				

③水準1B

調査問題	仮定の候補	正答	結論	正誤
問題６	$n(X_A)=2$，$n(X_B)=2$，$n(S_A)=4$，$n(S_B)=5$	D_2	D_2	正答
児童の考え方				

（Ⅰ）は第３章の「3.3.1　割合に関する状況」を参照。

（Ⅱ）

$$\cfrac{\cfrac{n(S_A)=4 \qquad n(X_A)=2}{n(S_A)-n(X_A)=4-2}\ (==)}{n(S_A)-n(X_A)=2}\ (演推)$$

$$\frac{定理６：n(Y)=n(S)-n(X) \qquad n(X)=n(X_A) \quad n(Y)=n(Y_A) \quad n(S)=n(S_A)}{n(Y_A)=n(S_A)-n(X_A)}\ (=代入)$$

$$\frac{n(Y_A)=n(S_A)-n(X_A) \qquad n(S_A)-n(X_A)=2}{n(Y_A)=2}\ (=代入)$$

$$\cfrac{\cfrac{n(S_B)=5 \qquad n(X_B)=2}{n(S_B)-n(X_B)=5-2}\ (==)}{n(S_B)-n(X_B)=3}\ (演推)$$

$$\frac{定理６：n(Y)=n(S)-n(X) \qquad n(X)=n(X_B) \quad n(Y)=n(Y_B) \quad n(S)=n(S_B)}{n(Y_B)=n(S_B)-n(X_B)}\ (=代入)$$

$$\frac{n(Y_B)=n(S_B)-n(X_B) \qquad n(S_B)-n(X_B)=3}{n(Y_B)=3}\ (=代入)$$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{n(Y_A)=2 \qquad 2<3}{n(Y_A)<3}\ (推移律) \qquad \cfrac{n(Y_B)=3}{3=n(Y_B)}\ (対称律)}{C_3：n(Y_A)<n(Y_B)}\ (推移律) \qquad \mathbf{n(Y_A)<n(Y_B)\rightarrow P(X_A)>P(X_B)}}{D_2：P(X_A)>P(X_B)}\ (\rightarrow除)$$

調査問題	仮定の候補	正答	結論	正誤
問題３	$n(X_A)=3$，$n(X_B)=3$，$n(S_A)=4$，$n(S_B)=5$	D_2	D_2	正答

児童の考え方

（Ⅰ）

$$\cfrac{n(X_A)=3 \qquad \cfrac{n(X_B)=3}{3=n(X_B)}\ (対称律)}{B_1：n(X_A)=n(X_B)}\ (推移律)$$

$$\cfrac{\cfrac{n(S_A)=4 \qquad 4<5}{n(S_A)<5}\ (推移律) \qquad \cfrac{n(S_B)=5}{5=n(S_B)}\ (対称律)}{A_3：n(S_A)<n(S_B)}\ (推移律)$$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{B_1 \qquad A_3}{B_1\wedge A_3}\ (\wedge入)}{A_3：n(S_A)<n(S_B)}\ (\wedge除) \qquad \mathbf{n(S_A)<n(S_B)\rightarrow P(X_A)>P(X_B)}}{D_2：P(X_A)>P(X_B)}\ (\rightarrow除)$$

(Ⅱ)

$$\cfrac{\cfrac{n(S_A)=4 \qquad n(X_A)=3}{n(S_A)-n(X_A)=4-3}\,\text{(==)}}{n(S_A)-n(X_A)=1}\,\text{(演推)}$$

$$\cfrac{\text{定理6}:n(Y)=n(S)-n(X) \qquad n(X)=n(X_A) \quad n(Y)=n(Y_A) \quad n(S)=n(S_A)}{n(Y_A)=n(S_A)-n(X_A)}\,\text{(=代入)}$$

$$\cfrac{n(Y_A)=n(S_A)-n(X_A) \qquad n(S_A)-n(X_A)=1}{n(Y_A)=1}\,\text{(=代入)}$$

$$\cfrac{\cfrac{n(S_B)=5 \qquad n(X_B)=3}{n(S_B)-n(X_B)=5-3}\,\text{(==)}}{n(S_B)-n(X_B)=2}\,\text{(演推)}$$

$$\cfrac{\text{定理6}:n(Y)=n(S)-n(X) \qquad n(X)=n(X_B) \quad n(Y)=n(Y_B) \quad n(S)=n(S_B)}{n(Y_B)=n(S_B)-n(X_B)}\,\text{(=代入)}$$

$$\cfrac{n(Y_B)=n(S_B)-n(X_B) \qquad n(S_B)-n(X_B)=2}{n(Y_B)=2}\,\text{(=代入)}$$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{n(Y_A)=1 \qquad 1<2}{n(Y_A)<2}\,\text{(推移律)} \qquad \cfrac{n(Y_B)=2}{2=n(Y_B)}\,\text{(対称律)}}{C_3:n(Y_A)<n(Y_B)}\,\text{(推移律)} \qquad \mathbf{n(Y_A)<n(Y_B)\to P(X_A)>P(X_B)}}{D_2:P(X_A)>P(X_B)}\,\text{(→除)}$$

調査問題	仮定の候補	正答	結論	正誤
問題 12	$n(X_A)=4$，$n(X_B)=3$，$n(S_A)=10$，$n(S_B)=6$	D_3	D_3	正答

児童の考え方

(Ⅰ)

$$\cfrac{\cfrac{n(X_A)=4 \qquad 4>3}{n(X_A)>3}\,\text{(推移律)} \qquad \cfrac{n(X_B)=3}{3=n(X_B)}\,\text{(対称律)}}{B_2:n(X_A)>n(X_B)}\,\text{(推移律)}$$

$$\cfrac{\cfrac{n(S_A)=10 \qquad 10>6}{n(S_A)>6}\,\text{(推移律)} \qquad \cfrac{n(S_B)=6}{6=n(S_B)}\,\text{(対称律)}}{A_2:n(S_A)>n(S_B)}\,\text{(推移律)}$$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{B_2 \qquad A_2}{B_2 \wedge A_2}\,(\wedge\text{入})}{A_2:n(S_A)>n(S_B)}\,(\wedge\text{除}) \qquad \mathbf{n(S_A)>n(S_B)\to P(X_A)<P(X_B)}}{D_3:P(X_A)<P(X_B)}\,\text{(→除)}$$

(Ⅱ)

$$\cfrac{\cfrac{n(S_A)=10 \qquad n(X_A)=4}{n(S_A)-n(X_A)=10-4}\,\text{(==)}}{n(S_A)-n(X_A)=6}\,\text{(演推)}$$

$$\cfrac{\text{定理6}: n(Y)=n(S)-n(X)\qquad n(X)=n(X_A)\quad n(Y)=n(Y_A)\quad n(S)=n(S_A)}{n(Y_A)=n(S_A)-n(X_A)}\ (=\text{代入})$$

$$\cfrac{n(Y_A)=n(S_A)-n(X_A)\qquad n(S_A)-n(X_A)=6}{n(Y_A)=6}\ (=\text{代入})$$

$$\cfrac{\cfrac{n(S_B)=6\qquad n(X_B)=3}{n(S_B)-n(X_B)=6-3}\ (==)}{n(S_B)-n(X_B)=3}\ (\text{演推})$$

$$\cfrac{\text{定理6}: n(Y)=n(S)-n(X)\qquad n(X)=n(X_B)\quad n(Y)=n(Y_B)\quad n(S)=n(S_B)}{n(Y_B)=n(S_B)-n(X_B)}\ (=\text{代入})$$

$$\cfrac{n(Y_B)=n(S_B)-n(X_B)\qquad n(S_B)-n(X_B)=3}{n(Y_B)=3}\ (=\text{代入})$$

$$\cfrac{\cfrac{n(Y_A)=6\qquad 6>3}{n(Y_A)>3}\ (\text{推移律})\qquad \cfrac{n(Y_B)=3}{3=n(Y_B)}\ (\text{対称律})}{C_2: n(Y_A)>n(Y_B)}\ (\text{推移律})$$

$$\cfrac{C_2: n(Y_A)>n(Y_B)\qquad \mathbf{n(Y_A)>n(Y_B)\to P(X_A)<P(X_B)}}{D_3: P(X_A)<P(X_B)}\ (\to\text{除})$$

調査問題	仮定の候補	正答	結論	正誤
問題２	$n(X_A)=1$，$n(X_B)=3$，$n(S_A)=2$，$n(S_B)=6$	D_1	D_2	誤答

児童の考え方

（Ⅰ）

$$\cfrac{\cfrac{n(X_A)=1\qquad 1<3}{n(X_A)<3}\ (\text{推移律})\qquad \cfrac{n(X_B)=3}{3=n(X_B)}\ (\text{対称律})}{B_3: n(X_A)<n(X_B)}\ (\text{推移律})$$

$$\cfrac{\cfrac{n(S_A)=2\qquad 2<6}{n(S_A)<6}\ (\text{推移律})\qquad \cfrac{n(S_B)=6}{6=n(S_B)}\ (\text{対称律})}{A_3: n(S_A)<n(S_B)}\ (\text{推移律})$$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{B_3\qquad A_3}{B_3\wedge A_3}\ (\wedge\text{入})}{A_3: n(S_A)<n(S_B)}\ (\wedge\text{除})\qquad \mathbf{n(S_A)<n(S_B)\to P(X_A)>P(X_B)}}{D_2: P(X_A)>P(X_B)}\ (\to\text{除})$$

（Ⅱ）は第３章の「3.3.1　割合に関する状況」を参照。

④水準1C

調査問題	仮定の候補	正答	結論	正誤
問題２	n(XA)＝１，n(XB)＝３，n(SA)＝２，n(SB)＝６	D_1	D_1	正答
児童の考え方				
第３章の「3.3.1　割合に関する状況」を参照。				

調査問題	仮定の候補	正答	結論	正誤
問題８	n(XA)＝１，n(XB)＝３，n(SA)＝４，n(SB)＝６	D_3	D_3	正答
児童の考え方				

$$\dfrac{\dfrac{n(S_A)=4 \qquad n(X_A)=1}{n(S_A)-n(X_A)=4-1}\ (==)}{n(S_A)-n(X_A)=3}\ (\text{演推})$$

$$\dfrac{\text{定理6}:n(Y)=n(S)-n(X) \qquad n(X)=n(X_A) \quad n(Y)=n(Y_A) \quad n(S)=n(S_A)}{n(Y_A)=n(S_A)-n(X_A)}\ (=\text{代入})$$

$$\dfrac{n(Y_A)=n(S_A)-n(X_A) \qquad n(S_A)-n(X_A)=3}{n(Y_A)=3}\ (=\text{代入})$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{n(X_A)=1 \qquad 1<3}{n(X_A)<3}\ (\text{推移律}) \qquad \dfrac{n(Y_A)=3}{3=n(Y_A)}\ (\text{対称律})}{n(X_A)<n(Y_A)}\ (\text{推移律}) \qquad n(X_A)<n(Y_A)\rightarrow L(X_A)}{L(X_A):P(X_A)<1/2}\ (\rightarrow\text{除})$$

$$\dfrac{\dfrac{n(S_B)=6 \qquad n(X_B)=3}{n(S_B)-n(X_B)=6-3}\ (==)}{n(S_B)-n(X_B)=3}\ (\text{演推})$$

$$\dfrac{\text{定理6}:n(Y)=n(S)-n(X) \qquad n(X)=n(X_B) \quad n(Y)=n(Y_B) \quad n(S)=n(S_B)}{n(Y_B)=n(S_B)-n(X_B)}\ (=\text{代入})$$

$$\dfrac{n(Y_B)=n(S_B)-n(X_B) \qquad n(S_B)-n(X_B)=3}{n(Y_B)=3}\ (=\text{代入})$$

$$\dfrac{\dfrac{n(X_B)=3 \qquad \dfrac{n(Y_B)=3}{3=n(Y_B)}\ (\text{対称律})}{n(X_B)=n(Y_B)}\ (\text{推移律}) \qquad n(X_B)=n(Y_B)\rightarrow H(X_B)}{H(X_B):P(X_B)=1/2}\ (\rightarrow\text{除})$$

$$\dfrac{\dfrac{L(X_A)\quad H(X_B)}{L(X_A)\wedge H(X_B)}\ (\wedge入)\qquad \mathbf{L(X_A)\wedge H(X_B)\rightarrow P(X_A)<P(X_B)}}{D_3 : P(X_A) < P(X_B)}\ (\rightarrow除)$$

調査問題	仮定の候補	正答	結論	正誤
問題９	$n(X_A)=2$，$n(X_B)=3$，$n(S_A)=4$，$n(S_B)=5$	D_3	D_3	正答

児童の考え方

$$\dfrac{\dfrac{n(S_A)=4\qquad n(X_A)=2}{n(S_A)-n(X_A)=4-2}\ (==)}{n(S_A)-n(X_A)=2}\ (演推)$$

$$\dfrac{定理６：n(Y)=n(S)-n(X)\qquad n(X)=n(X_A)\quad n(Y)=n(Y_A)\quad n(S)=n(S_A)}{n(Y_A)=n(S_A)-n(X_A)}\ (=代入)$$

$$\dfrac{n(Y_A)=n(S_A)-n(X_A)\qquad n(S_A)-n(X_A)=2}{n(Y_A)=2}\ (=代入)$$

$$\dfrac{\dfrac{n(X_A)=2\qquad \dfrac{n(Y_A)=2}{2=n(Y_A)}\ (対称律)}{n(X_A)=n(Y_A)}\ (推移律)\qquad \mathbf{n(X_A)=n(Y_A)\rightarrow H(X_A)}}{H(X_A)：P(X_A)=1/2}\ (\rightarrow除)$$

$$\dfrac{\dfrac{n(S_B)=5\qquad n(X_B)=3}{n(S_B)-n(X_B)=5-3}\ (==)}{n(S_B)-n(X_B)=2}\ (演推)$$

$$\dfrac{定理６：n(Y)=n(S)-n(X)\qquad n(X)=n(X_B)\quad n(Y)=n(Y_B)\quad n(S)=n(S_B)}{n(Y_B)=n(S_B)-n(X_B)}\ (=代入)$$

$$\dfrac{n(Y_B)=n(S_B)-n(X_B)\qquad n(S_B)-n(X_B)=2}{n(Y_B)=2}\ (=代入)$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{n(X_B)=3\qquad 3>2}{n(X_B)>2}\ (推移律)\qquad \dfrac{n(Y_B)=2}{2=n(Y_B)}\ (対称律)}{n(X_B)>n(Y_B)}\ (推移律)\qquad \mathbf{n(X_B)>n(Y_B)\rightarrow W(X_B)}}{W(X_B)：P(X_B)>1/2}\ (\rightarrow除)$$

$$\dfrac{\dfrac{H(X_A)\quad W(X_B)}{H(X_A)\wedge W(X_B)}\ (\wedge入)\qquad \mathbf{H(X_A)\wedge W(X_B)\rightarrow P(X_A)<P(X_B)}}{D_3 : P(X_A) < P(X_B)}\ (\rightarrow除)$$

調査問題	仮定の候補	正答	結論	正誤
問題７	$n(X_A)=1$，$n(X_B)=4$，$n(S_A)=2$，$n(S_B)=5$	D_3	D_3	正答

児童の考え方

$$\dfrac{\dfrac{n(S_A)=2 \qquad n(X_A)=1}{n(S_A)-n(X_A)=2-1}\,(==)}{n(S_A)-n(X_A)=1}\,(\text{演推})$$

$$\dfrac{\text{定理６}:n(Y)=n(S)-n(X) \qquad n(X)=n(X_A) \quad n(Y)=n(Y_A) \quad n(S)=n(S_A)}{n(Y_A)=n(S_A)-n(X_A)}\,(=\text{代入})$$

$$\dfrac{n(Y_A)=n(S_A)-n(X_A) \qquad n(S_A)-n(X_A)=1}{n(Y_A)=1}\,(=\text{代入})$$

$$\dfrac{\dfrac{n(X_A)=1 \qquad \dfrac{n(Y_A)=1}{1=n(Y_A)}\,(\text{対称律})}{n(X_A)=n(Y_A)}\,(\text{推移律}) \qquad n(X_A)=n(Y_A)\to H(X_A)}{H(X_A):P(X_A)=1/2}\,(\to\text{除})$$

$$\dfrac{\dfrac{n(S_B)=5 \qquad n(X_B)=4}{n(S_B)-n(X_B)=5-4}\,(==)}{n(S_B)-n(X_B)=1}\,(\text{演推})$$

$$\dfrac{\text{定理６}:n(Y)=n(S)-n(X) \qquad n(X)=n(X_B) \quad n(Y)=n(Y_B) \quad n(S)=n(S_B)}{n(Y_B)=n(S_B)-n(X_B)}\,(=\text{代入})$$

$$\dfrac{n(Y_B)=n(S_B)-n(X_B) \qquad n(S_B)-n(X_B)=1}{n(Y_B)=1}\,(=\text{代入})$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{n(X_B)=4 \qquad 4>1}{n(X_B)>1}\,(\text{推移律}) \qquad \dfrac{n(Y_B)=1}{1=n(Y_B)}\,(\text{対称律})}{n(X_B)>n(Y_B)}\,(\text{推移律}) \qquad n(X_B)>n(Y_B)\to W(X_B)}{W(X_B):P(X_B)>1/2}\,(\to\text{除})$$

$$\dfrac{\dfrac{H(X_A) \quad W(X_B)}{H(X_A)\wedge W(X_B)}\,(\wedge\text{入}) \qquad H(X_A)\wedge W(X_B)\to P(X_A)<P(X_B)}{D_3:P(X_A)<P(X_B)}\,(\to\text{除})$$

調査問題	仮定の候補	正答	結論	正誤
問題５	$n(X_A)=3$，$n(X_B)=6$，$n(S_A)=4$，$n(S_B)=8$	D_1	D_1	正答

児童の考え方

第３章の「3.3.1　割合に関する状況」を参照。

⑤水準２

<table>
<tr><td>調査問題</td><td>仮定の候補</td><td>正答</td><td>結論</td><td>正誤</td></tr>
<tr><td>問題５</td><td>$n(X_A)=3$，$n(X_B)=6$，$n(S_A)=4$，$n(S_B)=8$</td><td>D_1</td><td>D_1</td><td>正答</td></tr>
<tr><td colspan="5">児童の考え方</td></tr>
<tr><td colspan="5">（Ⅰ）は第３章の「3.3.1　割合に関する状況」を参照。</td></tr>
<tr><td colspan="5">（Ⅱ）

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{n(X_A)=3 \quad n(S_A)=4}{n(X_A)\div n(S_A)=3\div 4}\text{（==）}}{n(X_A)\div n(S_A)=0.75}\text{（演推）} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{n(X_B)=6 \quad n(S_B)=8}{n(X_B)\div n(S_B)=6\div 8}\text{（==）}}{n(X_B)\div n(S_B)=0.75}\text{（演推）}}{0.75=n(X_B)\div n(S_B)}\text{（対称律）}}{n(X_A)\div n(S_A)=n(X_B)\div n(S_B)}\text{（推移律）}$$

$$\dfrac{\dfrac{\text{定義：}P(Z)=n(Z)\div n(S) \quad n(Z)=n(X_A) \quad n(S)=n(S_A) \quad P(Z)=P(X_A)}{P(X_A)=n(X_A)\div n(S_A)}\text{（=代入）}}{n(X_A)\div n(S_A)=P(X_A)}\text{（対称律）}$$

$$\dfrac{\dfrac{\text{定義：}P(Z)=n(Z)\div n(S) \quad n(Z)=n(X_B) \quad n(S)=n(S_B) \quad P(Z)=P(X_B)}{P(X_B)=n(X_B)\div n(S_B)}\text{（=代入）}}{n(X_B)\div n(S_B)=P(X_B)}\text{（対称律）}$$

$$\dfrac{\mathbf{n(X_A)\div n(S_A)=n(X_B)\div n(S_B)} \quad n(X_A)\div n(S_A)=P(X_A) \quad n(X_B)\div n(S_B)=P(X_B)}{D_1：P(X_A)=P(X_B)}\text{（=代入）}$$
</td></tr>
<tr><td>調査問題</td><td>仮定の候補</td><td>正答</td><td>結論</td><td>正誤</td></tr>
<tr><td>問題 10</td><td>$n(X_A)=2$，$n(X_B)=3$，$n(S_A)=8$，$n(S_B)=10$</td><td>D_3</td><td>D_3</td><td>正答</td></tr>
<tr><td colspan="5">児童の考え方</td></tr>
<tr><td colspan="5">（Ⅰ）

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{n(S_A)=8 \quad 5=5}{n(S_A)\times 5=8\times 5}\text{（==）}}{n(S_A)\times 5=40}\text{（演推）} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{n(S_B)=10 \quad 4=4}{n(S_B)\times 4=10\times 4}\text{（==）}}{n(S_B)\times 4=40}\text{（演推）}}{40=n(S_B)\times 4}\text{（対称律）}}{n(S_A)\times 5=n(S_B)\times 4}\text{（推移律）}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{n(X_A)=2 \quad 5=5}{n(X_A)\times 5=2\times 5}\text{（==）}}{n(X_A)\times 5=10}\text{（演推）} \quad 10<12}{n(X_A)\times 5<12}\text{（推移律）} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{n(X_B)=3 \quad 4=4}{n(X_B)\times 4=3\times 4}\text{（==）}}{n(X_B)\times 4=12}\text{（演推）}}{12=n(X_B)\times 4}\text{（対称律）}}{n(X_A)\times 5<n(X_B)\times 4}\text{（推移律）}$$
</td></tr>
</table>

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{n(S_A)\times 5 = n(S_B)\times 4 \qquad n(X_A)\times 5 < n(X_B)\times 4}{n(S_A)\times 5 = n(S_B)\times 4 \land n(X_A)\times 5 < n(X_B)\times 4}\text{(∧入)}}{n(X_A)\times 5 < n(X_B)\times 4}\text{(∧除)} \qquad n(X_A)\times 5 < n(X_B)\times 4 \to P(X_A) < P(X_B)}{D_3 : P(X_A) < P(X_B)}\text{(→除)}$$

（Ⅱ）

$$\dfrac{\dfrac{n(X_A) = 2 \qquad n(S_A) = 8}{n(X_A) \div n(S_A) = 2 \div 8}\text{(==)}}{n(X_A) \div n(S_A) = 0.25}\text{(演推)}$$

$$\dfrac{\dfrac{n(X_A) \div n(S_A) = 0.25 \qquad 0.25 < 0.3}{n(X_A) \div n(S_A) < 0.3}\text{(推移律)} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{n(X_B) = 3 \qquad n(S_B) = 10}{n(X_B) \div n(S_B) = 3 \div 10}\text{(==)}}{n(X_B) \div n(S_B) = 0.3}\text{(演推)}}{0.3 = n(X_B) \div n(S_B)}\text{(対称律)}}{n(X_A) \div n(S_A) < n(X_B) \div n(S_B)}\text{(推移律)}$$

$$\dfrac{\dfrac{\text{定義：}P(Z) = n(Z) \div n(S) \qquad n(Z) = n(X_A) \quad n(S) = n(S_A) \quad P(Z) = P(X_A)}{P(X_A) = n(X_A) \div n(S_A)}\text{(=代入)}}{n(X_A) \div n(S_A) = P(X_A)}\text{(対称律)}$$

$$\dfrac{\dfrac{\text{定義：}P(Z) = n(Z) \div n(S) \qquad n(Z) = n(X_B) \quad n(S) = n(S_B) \quad P(Z) = P(X_B)}{P(X_B) = n(X_B) \div n(S_B)}\text{(=代入)}}{n(X_B) \div n(S_B) = P(X_B)}\text{(対称律)}$$

$$\dfrac{n(X_A) \div n(S_A) < n(X_B) \div n(S_B) \qquad n(X_A) \div n(S_A) = P(X_A) \quad n(X_B) \div n(S_B) = P(X_B)}{D_3 : P(X_A) < P(X_B)}\text{(=代入)}$$

調査問題	仮定の候補	正答	結論	正誤
問題 11	$n(X_A) = 3$， $n(X_B) = 4$， $n(S_A) = 4$， $n(S_B) = 5$	D_3	D_3	正答

児童の考え方

（Ⅰ）

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{n(S_A) = 4 \qquad 5 = 5}{n(S_A)\times 5 = 4 \times 5}\text{(==)}}{n(S_A)\times 5 = 20}\text{(演推)} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{n(S_B) = 5 \qquad 4 = 4}{n(S_B)\times 4 = 5 \times 4}\text{(==)}}{n(S_B)\times 4 = 20}\text{(演推)}}{20 = n(S_B)\times 4}\text{(対称律)}}{n(S_A)\times 5 = n(S_B)\times 4}\text{(推移律)}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{n(X_A) = 3 \qquad 5 = 5}{n(X_A)\times 5 = 3 \times 5}\text{(==)}}{n(X_A)\times 5 = 15}\text{(演推)} \qquad 15 < 16}{n(X_A)\times 5 < 16}\text{(推移律)} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{n(X_B) = 4 \qquad 4 = 4}{n(X_B)\times 4 = 4 \times 4}\text{(==)}}{n(X_B)\times 4 = 16}\text{(演推)}}{16 = n(X_B)\times 4}\text{(対称律)}}{n(X_A)\times 5 < n(X_B)\times 4}\text{(推移律)}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{n(S_A)\times 5 = n(S_B)\times 4 \qquad n(X_A)\times 5 < n(X_B)\times 4}{n(S_A)\times 5 = n(S_B)\times 4 \land n(X_A)\times 5 < n(X_B)\times 4}\text{(∧入)}}{n(X_A)\times 5 < n(X_B)\times 4}\text{(∧除)} \qquad n(X_A)\times 5 < n(X_B)\times 4 \to P(X_A) < P(X_B)}{D_3 : P(X_A) < P(X_B)}\text{(→除)}$$

(Ⅱ)

$$\cfrac{\cfrac{n(X_A)=3 \qquad n(S_A)=4}{n(X_A)\div n(S_A)=3\div 4}\ (==)}{n(X_A)\div n(S_A)=0.75}\ (\text{演推})$$

$$\cfrac{\cfrac{n(X_A)\div n(S_A)=0.75 \qquad 0.75<0.8}{n(X_A)\div n(S_A)<0.8}\ (\text{推移律}) \qquad \cfrac{\cfrac{\cfrac{n(X_B)=4 \qquad n(S_B)=5}{n(X_B)\div n(S_B)=4\div 5}\ (==)}{n(X_B)\div n(S_B)=0.8}\ (\text{演推})}{0.8=n(X_B)\div n(S_B)}\ (\text{対称律})}{n(X_A)\div n(S_A)<n(X_B)\div n(S_B)}\ (\text{推移律})$$

$$\cfrac{\cfrac{\text{定義：}P(Z)=n(Z)\div n(S) \qquad n(Z)=n(X_A) \quad n(S)=n(S_A) \quad P(Z)=P(X_A)}{P(X_A)=n(X_A)\div n(S_A)}\ (=\text{代入})}{n(X_A)\div n(S_A)=P(X_A)}\ (\text{対称律})$$

$$\cfrac{\cfrac{\text{定義：}P(Z)=n(Z)\div n(S) \qquad n(Z)=n(X_B) \quad n(S)=n(S_B) \quad P(Z)=P(X_B)}{P(X_B)=n(X_B)\div n(S_B)}\ (=\text{代入})}{n(X_B)\div n(S_B)=P(X_B)}\ (\text{対称律})$$

$$\cfrac{n(X_A)\div n(S_A)<n(X_B)\div n(S_B) \qquad n(X_A)\div n(S_A)=P(X_A) \quad n(X_B)\div n(S_B)=P(X_B)}{D_3 : P(X_A)<P(X_B)}\ (=\text{代入})$$

付録12　割合に関する手続き的知識の「比較量に関する状況」の調査問題の証明

【問題１】

仮定	結論
$n(S_A)=5,\ n(S_B)=5,\ P(X_A)=0.6,\ P(X_B)=0.2$	B_2
証明	
第３章の「3.3.2　比較量に関する状況」を参照。	

【問題２】

仮定	結論
$n(S_A)=2,\ n(S_B)=6,\ P(X_A)=0.5,\ P(X_B)=0.5$	B_3

証明

$$\dfrac{\text{定理３}:n(Z)=n(S)\times P(Z)\qquad n(Z)=n(X_A)\quad n(S)=n(S_A)\quad P(Z)=P(X_A)}{n(X_A)=n(S_A)\times P(X_A)}\ (=\text{代入})$$

$$\dfrac{\dfrac{n(X_A)=n(S_A)\times P(X_A)\qquad n(S_A)=2\qquad P(X_A)=0.5}{n(X_A)=2\times 0.5}\ (=\text{代入})}{n(X_A)=1}\ (\text{演推})$$

$$\dfrac{\text{定理３}:n(Z)=n(S)\times P(Z)\qquad n(Z)=n(X_B)\quad n(S)=n(S_B)\quad P(Z)=P(X_B)}{n(X_B)=n(S_B)\times P(X_B)}\ (=\text{代入})$$

$$\dfrac{\dfrac{n(X_B)=n(S_B)\times P(X_B)\qquad n(S_B)=6\qquad P(X_B)=0.5}{n(X_B)=6\times 0.5}\ (=\text{代入})}{n(X_B)=3}\ (\text{演推})$$

$$\dfrac{\dfrac{n(X_A)=1\qquad 1<3}{n(X_A)<3}\ (\text{推移律})\qquad \dfrac{n(X_B)=3}{3=n(X_B)}\ (\text{対称律})}{B_3:n(X_A)<n(X_B)}\ (\text{推移律})$$

結論として証明されるのは，B_3 である。

【問題３】

仮定	結論
$n(S_A)=4,\ n(S_B)=5,\ P(X_A)=0.75,\ P(X_B)=0.6$	B_1

証明

$$\cfrac{\text{定理３}: n(Z)=n(S)\times P(Z) \qquad n(Z)=n(X_A) \quad n(S)=n(S_A) \quad P(Z)=P(X_A)}{n(X_A)=n(S_A)\times P(X_A)}\ (=\text{代入})$$

$$\cfrac{\cfrac{n(X_A)=n(S_A)\times P(X_A) \qquad n(S_A)=4 \qquad P(X_A)=0.75}{n(X_A)=4\times 0.75}\ (=\text{代入})}{n(X_A)=3}\ (\text{演推})$$

$$\cfrac{\text{定理３}: n(Z)=n(S)\times P(Z) \qquad n(Z)=n(X_B) \quad n(S)=n(S_B) \quad P(Z)=P(X_B)}{n(X_B)=n(S_B)\times P(X_B)}\ (=\text{代入})$$

$$\cfrac{\cfrac{n(X_B)=n(S_B)\times P(X_B) \qquad n(S_B)=5 \qquad P(X_B)=0.6}{n(X_B)=5\times 0.6}\ (=\text{代入})}{n(X_B)=3}\ (\text{演推})$$

$$\cfrac{n(X_A)=3 \qquad \cfrac{n(X_B)=3}{3=n(X_B)}\ (\text{対称律})}{B_1: n(X_A)=n(X_B)}\ (\text{推移律})$$

結論として証明されるのは，B_1 である。

【問題４】

仮定	結論
$n(S_A)=4$，$n(S_B)=4$，$P(X_A)=0.25$，$P(X_B)=0.75$	B_3

証明

$$\cfrac{\text{定理３}: n(Z)=n(S)\times P(Z) \qquad n(Z)=n(X_A) \quad n(S)=n(S_A) \quad P(Z)=P(X_A)}{n(X_A)=n(S_A)\times P(X_A)}\ (=\text{代入})$$

$$\cfrac{\cfrac{n(X_A)=n(S_A)\times P(X_A) \qquad n(S_A)=4 \qquad P(X_A)=0.25}{n(X_A)=4\times 0.25}\ (=\text{代入})}{n(X_A)=1}\ (\text{演推})$$

$$\cfrac{\text{定理３}: n(Z)=n(S)\times P(Z) \qquad n(Z)=n(X_B) \quad n(S)=n(S_B) \quad P(Z)=P(X_B)}{n(X_B)=n(S_B)\times P(X_B)}\ (=\text{代入})$$

$$\cfrac{\cfrac{n(X_B)=n(S_B)\times P(X_B) \qquad n(S_B)=4 \qquad P(X_B)=0.75}{n(X_B)=4\times 0.75}\ (=\text{代入})}{n(X_B)=3}\ (\text{演推})$$

$$\cfrac{\cfrac{n(X_A)=1 \qquad 1<3}{n(X_A)<3}\ (\text{推移律}) \qquad \cfrac{n(X_B)=3}{3=n(X_B)}\ (\text{対称律})}{B_3: n(X_A)<n(X_B)}\ (\text{推移律})$$

結論として証明されるのは，B_3 である。

【問題５】

仮定	結論
$n(S_A)=4$，$n(S_B)=8$，$P(X_A)=0.75$，$P(X_B)=0.75$	B_3

証明

$$\frac{\text{定理３}:n(Z)=n(S)\times P(Z)\qquad n(Z)=n(X_A)\quad n(S)=n(S_A)\quad P(Z)=P(X_A)}{n(X_A)=n(S_A)\times P(X_A)}\ (=\text{代入})$$

$$\cfrac{\cfrac{n(X_A)=n(S_A)\times P(X_A)\qquad n(S_A)=4\qquad P(X_A)=0.75}{n(X_A)=4\times 0.75}\ (=\text{代入})}{n(X_A)=3}\ (\text{演推})$$

$$\frac{\text{定理３}:n(Z)=n(S)\times P(Z)\qquad n(Z)=n(X_B)\quad n(S)=n(S_B)\quad P(Z)=P(X_B)}{n(X_B)=n(S_B)\times P(X_B)}\ (=\text{代入})$$

$$\cfrac{\cfrac{n(X_B)=n(S_B)\times P(X_B)\qquad n(S_B)=8\qquad P(X_B)=0.75}{n(X_B)=8\times 0.75}\ (=\text{代入})}{n(X_B)=6}\ (\text{演推})$$

$$\cfrac{\cfrac{n(X_A)=3\qquad 3<6}{n(X_A)<6}\ (\text{推移律})\qquad \cfrac{n(X_B)=6}{6=n(X_B)}\ (\text{対称律})}{B_3:n(X_A)<n(X_B)}\ (\text{推移律})$$

結論として証明されるのは，B_3 である。

【問題６】

仮定	結論
$n(S_A)=4$，$n(S_B)=5$，$P(X_A)=0.5$，$P(X_B)=0.4$	B_1

証明

$$\frac{\text{定理３}:n(Z)=n(S)\times P(Z)\qquad n(Z)=n(X_A)\quad n(S)=n(S_A)\quad P(Z)=P(X_A)}{n(X_A)=n(S_A)\times P(X_A)}\ (=\text{代入})$$

$$\cfrac{\cfrac{n(X_A)=n(S_A)\times P(X_A)\qquad n(S_A)=4\qquad P(X_A)=0.5}{n(X_A)=4\times 0.5}\ (=\text{代入})}{n(X_A)=2}\ (\text{演推})$$

$$\frac{\text{定理３}:n(Z)=n(S)\times P(Z)\qquad n(Z)=n(X_B)\quad n(S)=n(S_B)\quad P(Z)=P(X_B)}{n(X_B)=n(S_B)\times P(X_B)}\ (=\text{代入})$$

$$\cfrac{\cfrac{n(X_B)=n(S_B)\times P(X_B)\qquad n(S_B)=5\qquad P(X_B)=0.4}{n(X_B)=5\times 0.4}\ (=\text{代入})}{n(X_B)=2}\ (\text{演推})$$

$$\dfrac{n(X_A)=2 \qquad \dfrac{n(X_B)=2}{2=n(X_B)}\ (\text{対称律})}{B_1 : n(X_A)=n(X_B)}\ (\text{推移律})$$

結論として証明されるのは，B_1 である。

【問題７】

仮定	結論
$n(S_A)=2$，$n(S_B)=5$，$P(X_A)=0.5$，$P(X_B)=0.8$	B_3

証明

$$\dfrac{\text{定理３}: n(Z)=n(S)\times P(Z) \qquad n(Z)=n(X_A) \quad n(S)=n(S_A) \quad P(Z)=P(X_A)}{n(X_A)=n(S_A)\times P(X_A)}\ (=\text{代入})$$

$$\dfrac{n(X_A)=n(S_A)\times P(X_A) \qquad n(S_A)=2 \qquad P(X_A)=0.5}{\dfrac{n(X_A)=2\times 0.5}{n(X_A)=1}\ (\text{演推})}\ (=\text{代入})$$

$$\dfrac{\text{定理３}: n(Z)=n(S)\times P(Z) \qquad n(Z)=n(X_B) \quad n(S)=n(S_B) \quad P(Z)=P(X_B)}{n(X_B)=n(S_B)\times P(X_B)}\ (=\text{代入})$$

$$\dfrac{n(X_B)=n(S_B)\times P(X_B) \qquad n(S_B)=5 \qquad P(X_B)=0.8}{\dfrac{n(X_B)=5\times 0.8}{n(X_B)=4}\ (\text{演推})}\ (=\text{代入})$$

$$\dfrac{\dfrac{n(X_A)=1 \qquad 1<4}{n(X_A)<4}\ (\text{推移律}) \qquad \dfrac{n(X_B)=4}{4=n(X_B)}\ (\text{対称律})}{B_3 : n(X_A)<n(X_B)}\ (\text{推移律})$$

結論として証明されるのは，B_3 である。

【問題８】

仮定	結論
$n(S_A)=4$，$n(S_B)=6$，$P(X_A)=0.25$，$P(X_B)=0.5$	B_3

証明

$$\dfrac{\text{定理３}: n(Z)=n(S)\times P(Z) \qquad n(Z)=n(X_A) \quad n(S)=n(S_A) \quad P(Z)=P(X_A)}{n(X_A)=n(S_A)\times P(X_A)}\ (=\text{代入})$$

$$\dfrac{n(X_A)=n(S_A)\times P(X_A) \qquad n(S_A)=4 \qquad P(X_A)=0.25}{\dfrac{n(X_A)=4\times 0.25}{n(X_A)=1}\ (\text{演推})}\ (=\text{代入})$$

$$\dfrac{\text{定理３：}n(Z)=n(S)\times P(Z) \qquad n(Z)=n(X_B) \quad n(S)=n(S_B) \quad P(Z)=P(X_B)}{n(X_B)=n(S_B)\times P(X_B)}\ (=\text{代入})$$

$$\dfrac{\dfrac{n(X_B)=n(S_B)\times P(X_B) \qquad n(S_B)=6 \qquad P(X_B)=0.5}{n(X_B)=6\times 0.5}\ (=\text{代入})}{n(X_B)=3}\ (\text{演推})$$

$$\dfrac{\dfrac{n(X_A)=1 \qquad 1<3}{n(X_A)<3}\ (\text{推移律}) \qquad \dfrac{n(X_B)=3}{3=n(X_B)}\ (\text{対称律})}{B_3: n(X_A)<n(X_B)}\ (\text{推移律})$$

結論として証明されるのは，B_3 である。

【問題９】

仮定	結論
$n(S_A)=4$，$n(S_B)=5$，$P(X_A)=0.5$，$P(X_B)=0.6$	B_3

証明

$$\dfrac{\text{定理３：}n(Z)=n(S)\times P(Z) \qquad n(Z)=n(X_A) \quad n(S)=n(S_A) \quad P(Z)=P(X_A)}{n(X_A)=n(S_A)\times P(X_A)}\ (=\text{代入})$$

$$\dfrac{\dfrac{n(X_A)=n(S_A)\times P(X_A) \qquad n(S_A)=4 \qquad P(X_A)=0.5}{n(X_A)=4\times 0.5}\ (=\text{代入})}{n(X_A)=2}\ (\text{演推})$$

$$\dfrac{\text{定理３：}n(Z)=n(S)\times P(Z) \qquad n(Z)=n(X_B) \quad n(S)=n(S_B) \quad P(Z)=P(X_B)}{n(X_B)=n(S_B)\times P(X_B)}\ (=\text{代入})$$

$$\dfrac{\dfrac{n(X_B)=n(S_B)\times P(X_B) \qquad n(S_B)=5 \qquad P(X_B)=0.6}{n(X_B)=5\times 0.6}\ (=\text{代入})}{n(X_B)=3}\ (\text{演推})$$

$$\dfrac{\dfrac{n(X_A)=2 \qquad 2<3}{n(X_A)<3}\ (\text{推移律}) \qquad \dfrac{n(X_B)=3}{3=n(X_B)}\ (\text{対称律})}{B_3: n(X_A)<n(X_B)}\ (\text{推移律})$$

結論として証明されるのは，B_3 である。

【問題10】

仮定	結論
$n(S_A)=8$，$n(S_B)=10$，$P(X_A)=0.25$，$P(X_B)=0.3$	B_3

証明

$$\cfrac{\text{定理３：}n(Z)=n(S)\times P(Z)\qquad n(Z)=n(X_A)\quad n(S)=n(S_A)\quad P(Z)=P(X_A)}{n(X_A)=n(S_A)\times P(X_A)}\,\text{(＝代入)}$$

$$\cfrac{n(X_A)=n(S_A)\times P(X_A)\qquad n(S_A)=8\qquad P(X_A)=0.25}{\cfrac{n(X_A)=8\times 0.25}{n(X_A)=2}\,\text{(演推)}}\,\text{(＝代入)}$$

$$\cfrac{\text{定理３：}n(Z)=n(S)\times P(Z)\qquad n(Z)=n(X_B)\quad n(S)=n(S_B)\quad P(Z)=P(X_B)}{n(X_B)=n(S_B)\times P(X_B)}\,\text{(＝代入)}$$

$$\cfrac{n(X_B)=n(S_B)\times P(X_B)\qquad n(S_B)=10\qquad P(X_B)=0.3}{\cfrac{n(X_B)=10\times 0.3}{n(X_B)=3}\,\text{(演推)}}\,\text{(＝代入)}$$

$$\cfrac{\cfrac{n(X_A)=2\qquad 2<3}{n(X_A)<3}\,\text{(推移律)}\qquad \cfrac{n(X_B)=3}{3=n(X_B)}\,\text{(対称律)}}{B_3: n(X_A)<n(X_B)}\,\text{(推移律)}$$

結論として証明されるのは，B_3 である。

【問題11】

仮定	結論
$n(S_A)=4$，$n(S_B)=5$，$P(X_A)=0.75$，$P(X_B)=0.8$	B_3

証明

$$\cfrac{\text{定理３：}n(Z)=n(S)\times P(Z)\qquad n(Z)=n(X_A)\quad n(S)=n(S_A)\quad P(Z)=P(X_A)}{n(X_A)=n(S_A)\times P(X_A)}\,\text{(＝代入)}$$

$$\cfrac{n(X_A)=n(S_A)\times P(X_A)\qquad n(S_A)=4\qquad P(X_A)=0.75}{\cfrac{n(X_A)=4\times 0.75}{n(X_A)=3}\,\text{(演推)}}\,\text{(＝代入)}$$

$$\cfrac{\text{定理３：}n(Z)=n(S)\times P(Z)\qquad n(Z)=n(X_B)\quad n(S)=n(S_B)\quad P(Z)=P(X_B)}{n(X_B)=n(S_B)\times P(X_B)}\,\text{(＝代入)}$$

$$\cfrac{n(X_B)=n(S_B)\times P(X_B)\qquad n(S_B)=5\qquad P(X_B)=0.8}{\cfrac{n(X_B)=5\times 0.8}{n(X_B)=4}\,\text{(演推)}}\,\text{(＝代入)}$$

$$\cfrac{\cfrac{n(X_A)=3\qquad 3<4}{n(X_A)<4}\,\text{(推移律)}\qquad \cfrac{n(X_B)=4}{4=n(X_B)}\,\text{(対称律)}}{B_3: n(X_A)<n(X_B)}\,\text{(推移律)}$$

結論として証明されるのは，B_3 である。

【問題12】

仮定	結論
$n(S_A)=10$，$n(S_B)=6$，$P(X_A)=0.4$，$P(X_B)=0.5$	B_2

証明

$$\frac{\text{定理３：}n(Z)=n(S)\times P(Z)\qquad n(Z)=n(X_A)\quad n(S)=n(S_A)\quad P(Z)=P(X_A)}{n(X_A)=n(S_A)\times P(X_A)}\text{（＝代入）}$$

$$\frac{n(X_A)=n(S_A)\times P(X_A)\qquad n(S_A)=10\qquad P(X_A)=0.4}{\dfrac{n(X_A)=10\times 0.4}{n(X_A)=4}\text{（演推）}}\text{（＝代入）}$$

$$\frac{\text{定理３：}n(Z)=n(S)\times P(Z)\qquad n(Z)=n(X_B)\quad n(S)=n(S_B)\quad P(Z)=P(X_B)}{n(X_B)=n(S_B)\times P(X_B)}\text{（＝代入）}$$

$$\frac{n(X_B)=n(S_B)\times P(X_B)\qquad n(S_B)=6\qquad P(X_B)=0.5}{\dfrac{n(X_B)=6\times 0.5}{n(X_B)=3}\text{（演推）}}\text{（＝代入）}$$

$$\frac{\dfrac{n(X_A)=4\qquad 4>3}{n(X_A)>3}\text{（推移律）}\qquad \dfrac{n(X_B)=3}{3=n(X_B)}\text{（対称律）}}{B_2：n(X_A)>n(X_B)}\text{（推移律）}$$

結論として証明されるのは，B_2 である。

付録13　割合に関する手続き的知識の「比較量に関する状況」における児童の考え方

①水準０

調査問題	仮定の候補	正答	結論	正誤
問題１	$n(S_A)=5$，$n(S_B)=5$，$P(X_A)=0.6$，$P(X_B)=0.2$	B_2	B_1	誤答

児童の考え方

第３章の「3.3.2　比較量に関する状況」を参照。

②水準1A

調査問題	仮定の候補	正答	結論	正誤
問題１	$n(S_A)=5$，$n(S_B)=5$，$P(X_A)=0.6$，$P(X_B)=0.2$	B_2	B_2	正答

児童の考え方

第３章の「3.3.2　比較量に関する状況」を参照。

調査問題	仮定の候補	正答	結論	正誤
問題４	$n(S_A)=4$，$n(S_B)=4$，$P(X_A)=0.25$，$P(X_B)=0.75$	B_3	B_3	正答

児童の考え方

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{P(X_A)=0.25 \quad 0.25<0.75}{P(X_A)<0.75}\text{(推移律)} \quad \dfrac{P(X_B)=0.75}{0.75=P(X_B)}\text{(対称律)}}{P(X_A)<P(X_B)}\text{(推移律)} \quad P(X_A)<P(X_B)\rightarrow n(X_A)<n(X_B)}{B_3: n(X_A)<n(X_B)}\text{(→除)}$$

調査問題	仮定の候補	正答	結論	正誤
問題 11	$n(S_A)=4$，$n(S_B)=5$，$P(X_A)=0.75$，$P(X_B)=0.8$	B_3	B_3	正答

児童の考え方

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{P(X_A)=0.75 \quad 0.75<0.8}{P(X_A)<0.8}\text{(推移律)} \quad \dfrac{P(X_B)=0.8}{0.8=P(X_B)}\text{(対称律)}}{P(X_A)<P(X_B)}\text{(推移律)} \quad P(X_A)<P(X_B)\rightarrow n(X_A)<n(X_B)}{B_3: n(X_A)<n(X_B)}\text{(→除)}$$

調査問題	仮定の候補	正答	結論	正誤
問題９	$n(S_A)=4$，$n(S_B)=5$，$P(X_A)=0.5$，$P(X_B)=0.6$	B_3	B_3	正答

児童の考え方

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{P(X_A)=0.5 \quad 0.5<0.6}{P(X_A)<0.6}\text{(推移律)} \quad \dfrac{P(X_B)=0.6}{0.6=P(X_B)}\text{(対称律)}}{P(X_A)<P(X_B)}\text{(推移律)} \quad P(X_A)<P(X_B)\to n(X_A)<n(X_B)}{B_3 : n(X_A)<n(X_B)}\text{(→除)}$$

調査問題	仮定の候補	正答	結論	正誤
問題 10	$n(S_A)=8$， $n(S_B)=10$， $P(X_A)=0.25$， $P(X_B)=0.3$	B_3	B_3	正答

児童の考え方

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{P(X_A)=0.25 \quad 0.25<0.3}{P(X_A)<0.3}\text{(推移律)} \quad \dfrac{P(X_B)=0.3}{0.3=P(X_B)}\text{(対称律)}}{P(X_A)<P(X_B)}\text{(推移律)} \quad P(X_A)<P(X_B)\to n(X_A)<n(X_B)}{B_3 : n(X_A)<n(X_B)}\text{(→除)}$$

調査問題	仮定の候補	正答	結論	正誤
問題８	$n(S_A)=4$， $n(S_B)=6$， $P(X_A)=0.25$， $P(X_B)=0.5$	B_3	B_3	正答

児童の考え方

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{P(X_A)=0.25 \quad 0.25<0.5}{P(X_A)<0.5}\text{(推移律)} \quad \dfrac{P(X_B)=0.5}{0.5=P(X_B)}\text{(対称律)}}{P(X_A)<P(X_B)}\text{(推移律)} \quad P(X_A)<P(X_B)\to n(X_A)<n(X_B)}{B_3 : n(X_A)<n(X_B)}\text{(→除)}$$

調査問題	仮定の候補	正答	結論	正誤
問題７	$n(S_A)=2$， $n(S_B)=5$， $P(X_A)=0.5$， $P(X_B)=0.8$	B_3	B_3	正答

児童の考え方

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{P(X_A)=0.5 \quad 0.5<0.8}{P(X_A)<0.8}\text{(推移律)} \quad \dfrac{P(X_B)=0.8}{0.8=P(X_B)}\text{(対称律)}}{P(X_A)<P(X_B)}\text{(推移律)} \quad P(X_A)<P(X_B)\to n(X_A)<n(X_B)}{B_3 : n(X_A)<n(X_B)}\text{(→除)}$$

調査問題	仮定の候補	正答	結論	正誤
問題２	$n(S_A)=2$， $n(S_B)=6$， $P(X_A)=0.5$， $P(X_B)=0.5$	B_3	B_1	誤答

児童の考え方

第３章の「3.3.2　比較量に関する状況」を参照。

③水準1B

調査問題	仮定の候補	正答	結論	正誤
問題２	$n(S_A)=2$， $n(S_B)=6$， $P(X_A)=0.5$， $P(X_B)=0.5$	B_3	B_3	正答

<table>
<tr><td colspan="5">児童の考え方</td></tr>
<tr><td colspan="5">第３章の「3.3.2　比較量に関する状況」を参照。</td></tr>
<tr><td>調査問題</td><td>仮定の候補</td><td>正答</td><td>結論</td><td>正誤</td></tr>
<tr><td>問題５</td><td>$n(S_A)=4$，$n(S_B)=8$，$P(X_A)=0.75$，$P(X_B)=0.75$</td><td>B_3</td><td>B_3</td><td>正答</td></tr>
<tr><td colspan="5">児童の考え方</td></tr>
<tr><td colspan="5">

$$\dfrac{P(X_A)=0.75 \qquad \dfrac{P(X_B)=0.75}{0.75=P(X_B)}\text{(対称律)}}{D_1: n(X_A)=n(X_B)}\text{(推移律)}$$

$$\dfrac{\dfrac{n(S_A)=4 \qquad 4<8}{n(S_A)<8}\text{(推移律)} \qquad \dfrac{n(S_B)=8}{8=n(S_B)}\text{(対称律)}}{A_3: n(S_A)<n(S_B)}\text{(推移律)}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{D_1 \qquad A_3}{D_1 \land A_3}\text{(∧入)}}{A_3: n(S_A)<n(S_B)}\text{(∧除)} \qquad n(S_A)<n(S_B)\to n(X_A)<n(X_B)}{B_3: n(X_A)<n(X_B)}\text{(→除)}$$

</td></tr>
<tr><td>調査問題</td><td>仮定の候補</td><td>正答</td><td>結論</td><td>正誤</td></tr>
<tr><td>問題６</td><td>$n(S_A)=4$，$n(S_B)=5$，$P(X_A)=0.5$，$P(X_B)=0.4$</td><td>B_1</td><td>B_2</td><td>誤答</td></tr>
<tr><td colspan="5">児童の考え方</td></tr>
<tr><td colspan="5">第３章の「3.3.2　比較量に関する状況」を参照。</td></tr>
</table>

④水準２

<table>
<tr><td>調査問題</td><td>仮定の候補</td><td>正答</td><td>結論</td><td>正誤</td></tr>
<tr><td>問題６</td><td>$n(S_A)=4$，$n(S_B)=5$，$P(X_A)=0.5$，$P(X_B)=0.4$</td><td>B_1</td><td>B_1</td><td>正答</td></tr>
<tr><td colspan="5">児童の考え方</td></tr>
<tr><td colspan="5">第３章の「3.3.2　比較量に関する状況」を参照。</td></tr>
<tr><td>調査問題</td><td>仮定の候補</td><td>正答</td><td>結論</td><td>正誤</td></tr>
<tr><td>問題 12</td><td>$n(S_A)=10$，$n(S_B)=6$，$P(X_A)=0.4$，$P(X_B)=0.5$</td><td>B_2</td><td>B_2</td><td>正答</td></tr>
<tr><td colspan="5">児童の考え方</td></tr>
</table>

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{n(S_A)=10 \qquad P(X_A)=0.4}{n(S_A)\times P(X_A)=10\times 0.4}\ (＝＝)}{n(S_A)\times P(X_A)=4}\ (演推) \qquad 4>3}{n(S_A)\times P(X_A)>3}\ (推移律) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{n(S_B)=6 \qquad P(X_B)=0.5}{n(S_B)\times P(X_B)=6\times 0.5}\ (＝＝)}{n(S_B)\times P(X_B)=3}\ (演推)}{3=n(S_B)\times P(X_B)}\ (対称律)}{}}{n(S_A)\times P(X_A)>n(S_B)\times P(X_B)}\ (推移律)$$

$$\dfrac{\dfrac{定理3:n(Z)=(S)\times P(Z) \qquad n(Z)=n(X_A) \quad n(S)=n(S_A) \quad P(Z)=P(X_A)}{n(X_A)=n(S_A)\times P(X_A)}\ (＝代入)}{n(S_A)\times P(X_A)=n(X_A)}\ (対称律)$$

$$\dfrac{\dfrac{定理3:n(Z)=(S)\times P(Z) \qquad n(Z)=n(X_B) \quad n(S)=n(S_B) \quad P(Z)=P(X_B)}{n(X_B)=n(S_B)\times P(X_B)}\ (＝代入)}{n(S_B)\times P(X_B)=n(X_B)}\ (対称律)$$

$$\dfrac{\mathbf{n(S_A)\times P(X_A)>n(S_B)\times P(X_B)} \qquad n(S_A)\times P(X_A)=n(X_A) \quad n(S_B)\times P(X_B)=n(X_B)}{B_2: n(X_A)>n(X_B)}\ (＝代入)$$

調査問題	仮定の候補	正答	結論	正誤
問題３	$n(S_A)=4$，$n(S_B)=5$，$P(X_A)=0.75$，$P(X_B)=0.6$	B_1	B_1	正答

児童の考え方

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{n(S_A)=4 \qquad P(X_A)=0.75}{n(S_A)\times P(X_A)=4\times 0.75}\ (＝＝)}{n(S_A)\times P(X_A)=3}\ (演推) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{n(S_B)=5 \qquad P(X_B)=0.6}{n(S_B)\times P(X_B)=5\times 0.6}\ (＝＝)}{n(S_B)\times P(X_B)=3}\ (演推)}{3=n(S_B)\times P(X_B)}\ (対称律)}{n(S_A)\times P(X_A)=n(S_B)\times P(X_B)}\ (推移律)$$

$$\dfrac{\dfrac{定理3:n(Z)=(S)\times P(Z) \qquad n(Z)=n(X_A) \quad n(S)=n(S_A) \quad P(Z)=P(X_A)}{n(X_A)=n(S_A)\times P(X_A)}\ (＝代入)}{n(S_A)\times P(X_A)=n(X_A)}\ (対称律)$$

$$\dfrac{\dfrac{定理3:n(Z)=(S)\times P(Z) \qquad n(Z)=n(X_B) \quad n(S)=n(S_B) \quad P(Z)=P(X_B)}{n(X_B)=n(S_B)\times P(X_B)}\ (＝代入)}{n(S_B)\times P(X_B)=n(X_B)}\ (対称律)$$

$$\dfrac{\mathbf{n(S_A)\times P(X_A)=n(S_B)\times P(X_B)} \qquad n(S_A)\times P(X_A)=n(X_A) \quad n(S_B)\times P(X_B)=n(X_B)}{B_1: n(X_A)=n(X_B)}\ (＝代入)$$

付録14　割合に関する手続き的知識の「基準量に関する状況」の調査問題の証明

【問題１】

仮定	結論
$n(X_A)=3,\ n(X_B)=1,\ P(X_A)=0.6,\ P(X_B)=0.2$	A_1

証明

第３章の「3.3.3　基準量に関する状況」を参照。

【問題２】

仮定	結論
$n(X_A)=1,\ n(X_B)=3,\ P(X_A)=0.5,\ P(X_B)=0.5$	A_3

証明

$$\dfrac{\text{定理４}:n(S)=n(Z)\div P(Z) \qquad n(Z)=n(X_A) \quad n(S)=n(S_A) \quad P(Z)=P(X_A)}{n(S_A)=n(X_A)\div P(X_A)}\ (=\text{代入})$$

$$\dfrac{\dfrac{n(S_A)=n(X_A)\div P(X_A) \qquad n(X_A)=1 \qquad P(X_A)=0.5}{n(S_A)=1\div 0.5}\ (=\text{代入})}{n(S_A)=2}\ (\text{演推})$$

$$\dfrac{\text{定理４}:n(S)=n(Z)\div P(Z) \qquad n(Z)=n(X_B) \quad n(S)=n(S_B) \quad P(Z)=P(X_B)}{n(S_B)=n(X_B)\div P(X_B)}\ (=\text{代入})$$

$$\dfrac{\dfrac{n(S_B)=n(X_B)\div P(X_B) \qquad n(X_B)=3 \qquad P(X_B)=0.5}{n(S_B)=3\div 0.5}\ (=\text{代入})}{n(S_B)=6}\ (\text{演推})$$

$$\dfrac{\dfrac{n(S_A)=2 \qquad 2<6}{n(S_A)<6}\ (\text{推移律}) \qquad \dfrac{n(S_B)=6}{6=n(S_B)}\ (\text{対称律})}{A_3:n(S_A)<n(S_B)}\ (\text{推移律})$$

結論として証明されるのは，A_3 である。

【問題３】

仮定	結論
$n(X_A)=3,\ n(X_B)=3,\ P(X_A)=0.75,\ P(X_B)=0.6$	A_3

証明

$$\dfrac{\text{定理４：}n(S)=n(Z)\div P(Z) \qquad n(Z)=n(X_A) \quad n(S)=n(S_A) \quad P(Z)=P(X_A)}{n(S_A)=n(X_A)\div P(X_A)}\text{（＝代入）}$$

$$\dfrac{n(S_A)=n(X_A)\div P(X_A) \qquad n(X_A)=3 \qquad P(X_A)=0.75}{\dfrac{n(S_A)=3\div 0.75}{n(S_A)=4}\text{（演推）}}\text{（＝代入）}$$

$$\dfrac{\text{定理４：}n(S)=n(Z)\div P(Z) \qquad n(Z)=n(X_B) \quad n(S)=n(S_B) \quad P(Z)=P(X_B)}{n(S_B)=n(X_B)\div P(X_B)}\text{（＝代入）}$$

$$\dfrac{n(S_B)=n(X_B)\div P(X_B) \qquad n(X_B)=3 \qquad P(X_B)=0.6}{\dfrac{n(S_B)=3\div 0.6}{n(S_B)=5}\text{（演推）}}\text{（＝代入）}$$

$$\dfrac{\dfrac{n(S_A)=4 \qquad 4<5}{n(S_A)<5}\text{（推移律）} \qquad \dfrac{n(S_B)=5}{5=n(S_B)}\text{（対称律）}}{A_3 : n(S_A)<n(S_B)}\text{（推移律）}$$

結論として証明されるのは，A_3 である。

【問題４】

仮定	結論
$n(X_A)=1$，$n(X_B)=3$，$P(X_A)=0.25$，$P(X_B)=0.75$	A_1

証明

$$\dfrac{\text{定理４：}n(S)=n(Z)\div P(Z) \qquad n(Z)=n(X_A) \quad n(S)=n(S_A) \quad P(Z)=P(X_A)}{n(S_A)=n(X_A)\div P(X_A)}\text{（＝代入）}$$

$$\dfrac{n(S_A)=n(X_A)\div P(X_A) \qquad n(X_A)=1 \qquad P(X_A)=0.25}{\dfrac{n(S_A)=1\div 0.25}{n(S_A)=4}\text{（演推）}}\text{（＝代入）}$$

$$\dfrac{\text{定理４：}n(S)=n(Z)\div P(Z) \qquad n(Z)=n(X_B) \quad n(S)=n(S_B) \quad P(Z)=P(X_B)}{n(S_B)=n(X_B)\div P(X_B)}\text{（＝代入）}$$

$$\dfrac{n(S_B)=n(X_B)\div P(X_B) \qquad n(X_B)=3 \qquad P(X_B)=0.75}{\dfrac{n(S_B)=3\div 0.75}{n(S_B)=4}\text{（演推）}}\text{（＝代入）}$$

$$\dfrac{n(S_A)=4 \qquad \dfrac{n(S_B)=4}{4=n(S_B)}\text{（対称律）}}{A_1 : n(S_A)=n(S_B)}\text{（推移律）}$$

結論として証明されるのは，A_1 である。

【問題５】

仮定	結論
$n(X_A)=3$，$n(X_B)=6$，$P(X_A)=0.75$，$P(X_B)=0.75$	A_3

証明

$$\dfrac{\text{定理４：}n(S)=n(Z)\div P(Z) \qquad n(Z)=n(X_A) \quad n(S)=n(S_A) \quad P(Z)=P(X_A)}{n(S_A)=n(X_A)\div P(X_A)}\ \text{(＝代入)}$$

$$\dfrac{\dfrac{n(S_A)=n(X_A)\div P(X_A) \qquad n(X_A)=3 \qquad P(X_A)=0.75}{n(S_A)=3\div 0.75}\ \text{(＝代入)}}{n(S_A)=4}\ \text{(演推)}$$

$$\dfrac{\text{定理４：}n(S)=n(Z)\div P(Z) \qquad n(Z)=n(X_B) \quad n(S)=n(S_B) \quad P(Z)=P(X_B)}{n(S_B)=n(X_B)\div P(X_B)}\ \text{(＝代入)}$$

$$\dfrac{\dfrac{n(S_B)=n(X_B)\div P(X_B) \qquad n(X_B)=6 \qquad P(X_B)=0.75}{n(S_B)=6\div 0.75}\ \text{(＝代入)}}{n(S_B)=8}\ \text{(演推)}$$

$$\dfrac{\dfrac{n(S_A)=4 \qquad 4<8}{n(S_A)<8}\ \text{(推移律)} \qquad \dfrac{n(S_B)=8}{8=n(S_B)}\ \text{(対称律)}}{A_3 : n(S_A)<n(S_B)}\ \text{(推移律)}$$

結論として証明されるのは，A_3 である。

【問題６】

仮定	結論
$n(X_A)=2$，$n(X_B)=2$，$P(X_A)=0.5$，$P(X_B)=0.4$	A_3

証明

$$\dfrac{\text{定理４：}n(S)=n(Z)\div P(Z) \qquad n(Z)=n(X_A) \quad n(S)=n(S_A) \quad P(Z)=P(X_A)}{n(S_A)=n(X_A)\div P(X_A)}\ \text{(＝代入)}$$

$$\dfrac{\dfrac{n(S_A)=n(X_A)\div P(X_A) \qquad n(X_A)=2 \qquad P(X_A)=0.5}{n(S_A)=2\div 0.5}\ \text{(＝代入)}}{n(S_A)=4}\ \text{(演推)}$$

$$\dfrac{\text{定理４：}n(S)=n(Z)\div P(Z) \qquad n(Z)=n(X_B) \quad n(S)=n(S_B) \quad P(Z)=P(X_B)}{n(S_B)=n(X_B)\div P(X_B)}\ \text{(＝代入)}$$

$$\dfrac{\dfrac{n(S_B)=n(X_B)\div P(X_B) \qquad n(X_B)=2 \qquad P(X_B)=0.4}{n(S_B)=2\div 0.4}\ \text{(＝代入)}}{n(S_B)=5}\ \text{(演推)}$$

$$\cfrac{\cfrac{n(S_A)=4 \qquad 4<5}{n(S_A)<5}\text{（推移律）} \qquad \cfrac{n(S_B)=5}{5=n(S_B)}\text{（対称律）}}{A_3 : n(S_A)<n(S_B)}\text{（推移律）}$$

結論として証明されるのは，A_3 である。

【問題７】

仮定	結論
$n(X_A)=1$，$n(X_B)=4$，$P(X_A)=0.5$，$P(X_B)=0.8$	A_3

証明

$$\cfrac{\text{定理４：} n(S)=n(Z)\div P(Z) \qquad n(Z)=n(X_A) \quad n(S)=n(S_A) \quad P(Z)=P(X_A)}{n(S_A)=n(X_A)\div P(X_A)}\text{（＝代入）}$$

$$\cfrac{n(S_A)=n(X_A)\div P(X_A) \qquad n(X_A)=1 \qquad P(X_A)=0.5}{\cfrac{n(S_A)=1\div 0.5}{n(S_A)=2}\text{（演推）}}\text{（＝代入）}$$

$$\cfrac{\text{定理４：} n(S)=n(Z)\div P(Z) \qquad n(Z)=n(X_B) \quad n(S)=n(S_B) \quad P(Z)=P(X_B)}{n(S_B)=n(X_B)\div P(X_B)}\text{（＝代入）}$$

$$\cfrac{n(S_B)=n(X_B)\div P(X_B) \qquad n(X_B)=4 \qquad P(X_B)=0.8}{\cfrac{n(S_B)=4\div 0.8}{n(S_B)=5}\text{（演推）}}\text{（＝代入）}$$

$$\cfrac{\cfrac{n(S_A)=2 \qquad 2<5}{n(S_A)<5}\text{（推移律）} \qquad \cfrac{n(S_B)=5}{5=n(S_B)}\text{（対称律）}}{A_3 : n(S_A)<n(S_B)}\text{（推移律）}$$

結論として証明されるのは，A_3 である。

【問題８】

仮定	結論
$n(X_A)=1$，$n(X_B)=3$，$P(X_A)=0.25$，$P(X_B)=0.5$	A_3

証明

$$\cfrac{\text{定理４：} n(S)=n(Z)\div P(Z) \qquad n(Z)=n(X_A) \quad n(S)=n(S_A) \quad P(Z)=P(X_A)}{n(S_A)=n(X_A)\div P(X_A)}\text{（＝代入）}$$

$$\cfrac{n(S_A)=n(X_A)\div P(X_A) \qquad n(X_A)=1 \qquad P(X_A)=0.25}{\cfrac{n(S_A)=1\div 0.25}{n(S_A)=4}\text{（演推）}}\text{（＝代入）}$$

$$\dfrac{\text{定理4：}n(S)=n(Z)\div P(Z) \qquad n(Z)=n(X_B) \quad n(S)=n(S_B) \quad P(Z)=P(X_B)}{n(S_B)=n(X_B)\div P(X_B)}\ (=\text{代入})$$

$$\dfrac{n(S_B)=n(X_B)\div P(X_B) \qquad n(X_B)=3 \qquad P(X_B)=0.5}{\dfrac{n(S_B)=3\div 0.5}{n(S_B)=6}\ (\text{演推})}\ (=\text{代入})$$

$$\dfrac{\dfrac{n(S_A)=4 \qquad 4<6}{n(S_A)<6}\ (\text{推移律}) \qquad \dfrac{n(S_B)=6}{6=n(S_B)}\ (\text{対称律})}{A_3 : n(S_A)<n(S_B)}\ (\text{推移律})$$

結論として証明されるのは，A_3 である。

【問題９】

仮定	結論
$n(X_A)=2$，$n(X_B)=3$，$P(X_A)=0.5$，$P(X_B)=0.6$	A_3

証明

$$\dfrac{\text{定理4：}n(S)=n(Z)\div P(Z) \qquad n(Z)=n(X_A) \quad n(S)=n(S_A) \quad P(Z)=P(X_A)}{n(S_A)=n(X_A)\div P(X_A)}\ (=\text{代入})$$

$$\dfrac{n(S_A)=n(X_A)\div P(X_A) \qquad n(X_A)=2 \qquad P(X_A)=0.5}{\dfrac{n(S_A)=2\div 0.5}{n(S_A)=4}\ (\text{演推})}\ (=\text{代入})$$

$$\dfrac{\text{定理4：}n(S)=n(Z)\div P(Z) \qquad n(Z)=n(X_B) \quad n(S)=n(S_B) \quad P(Z)=P(X_B)}{n(S_B)=n(X_B)\div P(X_B)}\ (=\text{代入})$$

$$\dfrac{n(S_B)=n(X_B)\div P(X_B) \qquad n(X_B)=3 \qquad P(X_B)=0.6}{\dfrac{n(S_B)=3\div 0.6}{n(S_B)=5}\ (\text{演推})}\ (=\text{代入})$$

$$\dfrac{\dfrac{n(S_A)=4 \qquad 4<5}{n(S_A)<5}\ (\text{推移律}) \qquad \dfrac{n(S_B)=5}{5=n(S_B)}\ (\text{対称律})}{A_3 : n(S_A)<n(S_B)}\ (\text{推移律})$$

結論として証明されるのは，A_3 である。

【問題10】

仮定	結論
$n(X_A)=2$，$n(X_B)=3$，$P(X_A)=0.25$，$P(X_B)=0.3$	A_3

証明

$$\frac{\text{定理4：}n(S)=n(Z)\div P(Z)\qquad n(Z)=n(X_A)\quad n(S)=n(S_A)\quad P(Z)=P(X_A)}{n(S_A)=n(X_A)\div P(X_A)}\ (=\text{代入})$$

$$\cfrac{\cfrac{n(S_A)=n(X_A)\div P(X_A)\qquad n(X_A)=2\qquad P(X_A)=0.25}{n(S_A)=2\div 0.25}\ (=\text{代入})}{n(S_A)=8}\ (\text{演推})$$

$$\frac{\text{定理4：}n(S)=n(Z)\div P(Z)\qquad n(Z)=n(X_B)\quad n(S)=n(S_B)\quad P(Z)=P(X_B)}{n(S_B)=n(X_B)\div P(X_B)}\ (=\text{代入})$$

$$\cfrac{\cfrac{n(S_B)=n(X_B)\div P(X_B)\qquad n(X_B)=3\qquad P(X_B)=0.3}{n(S_B)=3\div 0.3}\ (=\text{代入})}{n(S_B)=10}\ (\text{演推})$$

$$\cfrac{\cfrac{n(S_A)=8\qquad 8<10}{n(S_A)<10}\ (\text{推移律})\qquad \cfrac{n(S_B)=10}{10=n(S_B)}\ (\text{対称律})}{A_3 : n(S_A)<n(S_B)}\ (\text{推移律})$$

結論として証明されるのは，A_3 である。

【問題11】

仮定	結論
$n(X_A)=3$，$n(X_B)=4$，$P(X_A)=0.75$，$P(X_B)=0.8$	A_3

証明

$$\frac{\text{定理4：}n(S)=n(Z)\div P(Z)\qquad n(Z)=n(X_A)\quad n(S)=n(S_A)\quad P(Z)=P(X_A)}{n(S_A)=n(X_A)\div P(X_A)}\ (=\text{代入})$$

$$\cfrac{\cfrac{n(S_A)=n(X_A)\div P(X_A)\qquad n(X_A)=3\qquad P(X_A)=0.75}{n(S_A)=3\div 0.75}\ (=\text{代入})}{n(S_A)=4}\ (\text{演推})$$

$$\frac{\text{定理4：}n(S)=n(Z)\div P(Z)\qquad n(Z)=n(X_B)\quad n(S)=n(S_B)\quad P(Z)=P(X_B)}{n(S_B)=n(X_B)\div P(X_B)}\ (=\text{代入})$$

$$\cfrac{\cfrac{n(S_B)=n(X_B)\div P(X_B)\qquad n(X_B)=4\qquad P(X_B)=0.8}{n(S_B)=4\div 0.8}\ (=\text{代入})}{n(S_B)=5}\ (\text{演推})$$

$$\cfrac{\cfrac{n(S_A)=4\qquad 4<5}{n(S_A)<5}\ (\text{推移律})\qquad \cfrac{n(S_B)=5}{5=n(S_B)}\ (\text{対称律})}{A_3 : n(S_A)<n(S_B)}\ (\text{推移律})$$

結論として証明されるのは，A_3 である。

【問題12】

仮定	結論
$n(X_A)=4$，$n(X_B)=3$，$P(X_A)=0.4$，$P(X_B)=0.5$	A_2

証明

$$\frac{\text{定理4}:n(S)=n(Z)\div P(Z) \qquad n(Z)=n(X_A) \quad n(S)=n(S_A) \quad P(Z)=P(X_A)}{n(S_A)=n(X_A)\div P(X_A)}\ (=\text{代入})$$

$$\dfrac{\dfrac{n(S_A)=n(X_A)\div P(X_A) \qquad n(X_A)=4 \qquad P(X_A)=0.4}{n(S_A)=4\div 0.4}\ (=\text{代入})}{n(S_A)=10}\ (\text{演推})$$

$$\frac{\text{定理4}:n(S)=n(Z)\div P(Z) \qquad n(Z)=n(X_B) \quad n(S)=n(S_B) \quad P(Z)=P(X_B)}{n(S_B)=n(X_B)\div P(X_B)}\ (=\text{代入})$$

$$\dfrac{\dfrac{n(S_B)=n(X_B)\div P(X_B) \qquad n(X_B)=3 \qquad P(X_B)=0.5}{n(S_B)=3\div 0.5}\ (=\text{代入})}{n(S_B)=6}\ (\text{演推})$$

$$\dfrac{\dfrac{n(S_A)=10 \qquad 10>6}{n(S_A)>6}\ (\text{推移律}) \qquad \dfrac{n(S_B)=6}{6=n(S_B)}\ (\text{対称律})}{A_2:n(S_A)>n(S_B)}\ (\text{推移律})$$

結論として証明されるのは，A_2 である。

付録15　割合に関する手続き的知識の「基準量に関する状況」における児童の考え方

①水準０

調査問題	仮定の候補	正答	結論	正誤
問題２	$n(X_A)=1$，$n(X_B)=3$，$P(X_A)=0.5$，$P(X_B)=0.5$	A_3	A_1	誤答

児童の考え方

第３章の「3.3.3　基準量に関する状況」を参照。

②水準1A

調査問題	仮定の候補	正答	結論	正誤
問題２	$n(X_A)=1$，$n(X_B)=3$，$P(X_A)=0.5$，$P(X_B)=0.5$	A_3	A_3	正答

児童の考え方

第３章の「3.3.3　基準量に関する状況」を参照。

調査問題	仮定の候補	正答	結論	正誤
問題５	$n(X_A)=3$，$n(X_B)=6$，$P(X_A)=0.75$，$P(X_B)=0.75$	A_3	A_3	正答

児童の考え方

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{n(X_A)=3 \qquad 3<6}{n(X_A)<6}\,(\text{推移律}) \qquad \dfrac{n(X_B)=6}{6=n(X_B)}\,(\text{対称律})}{B_3: n(X_A)<n(X_B)}\,(\text{推移律}) \qquad n(X_A)<n(X_B)\to n(S_A)<n(S_B)}{A_3: n(S_A)<n(S_B)}\,(\to\text{除})$$

調査問題	仮定の候補	正答	結論	正誤
問題７	$n(X_A)=1$，$n(X_B)=4$，$P(X_A)=0.5$，$P(X_B)=0.8$	A_3	A_3	正答

児童の考え方

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{n(X_A)=1 \qquad 1<4}{n(X_A)<4}\,(\text{推移律}) \qquad \dfrac{n(X_B)=4}{4=n(X_B)}\,(\text{対称律})}{B_3: n(X_A)<n(X_B)}\,(\text{推移律}) \qquad n(X_A)<n(X_B)\to n(S_A)<n(S_B)}{A_3: n(S_A)<n(S_B)}\,(\to\text{除})$$

調査問題	仮定の候補	正答	結論	正誤
問題 11	$n(X_A)=3$，$n(X_B)=4$，$P(X_A)=0.75$，$P(X_B)=0.8$	A_3	A_3	正答

児童の考え方

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{n(X_A)=3 \quad 3<4}{n(X_A)<4}\text{(推移律)} \quad \dfrac{n(X_B)=4}{4=n(X_B)}\text{(対称律)}}{B_3 : n(X_A)<n(X_B)}\text{(推移律)} \quad n(X_A)<n(X_B)\to n(S_A)<n(S_B)}{A_3 : n(S_A)<n(S_B)}(\to\text{除})$$

調査問題	仮定の候補	正答	結論	正誤
問題８	n(X$_A$)＝１，n(X$_B$)＝３，P(X$_A$)＝0.25，P(X$_B$)＝0.5	A_3	A_3	正答

児童の考え方

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{n(X_A)=1 \quad 1<3}{n(X_A)<3}\text{(推移律)} \quad \dfrac{n(X_B)=3}{3=n(X_B)}\text{(対称律)}}{B_3 : n(X_A)<n(X_B)}\text{(推移律)} \quad n(X_A)<n(X_B)\to n(S_A)<n(S_B)}{A_3 : n(S_A)<n(S_B)}(\to\text{除})$$

調査問題	仮定の候補	正答	結論	正誤
問題９	n(X$_A$)＝２，n(X$_B$)＝３，P(X$_A$)＝0.5，P(X$_B$)＝0.6	A_3	A_3	正答

児童の考え方

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{n(X_A)=2 \quad 2<3}{n(X_A)<3}\text{(推移律)} \quad \dfrac{n(X_B)=3}{3=n(X_B)}\text{(対称律)}}{B_3 : n(X_A)<n(X_B)}\text{(推移律)} \quad n(X_A)<n(X_B)\to n(S_A)<n(S_B)}{A_3 : n(S_A)<n(S_B)}(\to\text{除})$$

調査問題	仮定の候補	正答	結論	正誤
問題 10	n(X$_A$)＝２，n(X$_B$)＝３，P(X$_A$)＝0.25，P(X$_B$)＝0.3	A_3	A_3	正答

児童の考え方

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{n(X_A)=2 \quad 2<3}{n(X_A)<3}\text{(推移律)} \quad \dfrac{n(X_B)=3}{3=n(X_B)}\text{(対称律)}}{B_3 : n(X_A)<n(X_B)}\text{(推移律)} \quad n(X_A)<n(X_B)\to n(S_A)<n(S_B)}{A_3 : n(S_A)<n(S_B)}(\to\text{除})$$

調査問題	仮定の候補	正答	結論	正誤
問題 12	n(X$_A$)＝４，n(X$_B$)＝３，P(X$_A$)＝0.4，P(X$_B$)＝0.5	A_2	A_2	正答

児童の考え方

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{n(X_A)=4 \quad 4>3}{n(X_A)>3}\text{(推移律)} \quad \dfrac{n(X_B)=3}{3=n(X_B)}\text{(対称律)}}{B_2 : n(X_A)>n(X_B)}\text{(推移律)} \quad n(X_A)>n(X_B)\to n(S_A)>n(S_B)}{A_2 : n(S_A)>n(S_B)}(\to\text{除})$$

調査問題	仮定の候補	正答	結論	正誤
問題３	n(X$_A$)＝３，n(X$_B$)＝３，P(X$_A$)＝0.75，P(X$_B$)＝0.6	A_3	A_3	誤答

児童の考え方

第３章の「3.3.3　基準量に関する状況」を参照。

③水準1B

調査問題	仮定の候補	正答	結論	正誤
問題３	$n(X_A)=3$，$n(X_B)=3$，$P(X_A)=0.75$，$P(X_B)=0.6$	A_3	A_3	正答

児童の考え方

$$\dfrac{n(X_A)=3 \qquad \dfrac{n(X_B)=3}{3=n(X_B)}\text{(対称律)}}{B_1: n(X_A)=n(X_B)}\text{(推移律)}$$

$$\dfrac{\dfrac{P(X_A)=0.75 \qquad 0.75>0.6}{P(X_A)>0.6}\text{(推移律)} \qquad \dfrac{P(X_B)=0.6}{0.6=P(X_B)}\text{(対称律)}}{D_2: P(X_A)>P(X_B)}\text{(推移律)}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{B_1 \quad D_2}{B_1\wedge D_2}\text{(}\wedge\text{入)}}{D_2: P(X_A)>P(X_B)}\text{(}\wedge\text{除)} \qquad P(X_A)>P(X_B)\to n(S_A)<n(S_B)}{A_3: n(S_A)<n(S_B)}\text{(}\to\text{除)}$$

調査問題	仮定の候補	正答	結論	正誤
問題６	$n(X_A)=2$，$n(X_B)=2$，$P(X_A)=0.5$，$P(X_B)=0.4$	A_3	A_3	正答

児童の考え方

$$\dfrac{n(X_A)=2 \qquad \dfrac{n(X_B)=2}{2=n(X_B)}\text{(対称律)}}{B_1: n(X_A)=n(X_B)}\text{(推移律)}$$

$$\dfrac{\dfrac{P(X_A)=0.5 \qquad 0.5>0.4}{P(X_A)>0.4}\text{(推移律)} \qquad \dfrac{P(X_B)=0.4}{0.4=P(X_B)}\text{(対称律)}}{D_2: P(X_A)>P(X_B)}\text{(推移律)}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{B_1 \quad D_2}{B_1\wedge D_2}\text{(}\wedge\text{入)}}{D_2: P(X_A)>P(X_B)}\text{(}\wedge\text{除)} \qquad P(X_A)>P(X_B)\to n(S_A)<n(S_B)}{A_3: n(S_A)<n(S_B)}\text{(}\to\text{除)}$$

調査問題	仮定の候補	正答	結論	正誤
問題１	$n(X_A)=3$，$n(X_B)=1$，$P(X_A)=0.6$，$P(X_B)=0.2$	A_1	A_2	誤答

児童の考え方

第３章の「3.3.3　基準量に関する状況」を参照。

④水準２

調査問題	仮定の候補	正答	結論	正誤
問題１	$n(X_A)=3$，$n(X_B)=1$，$P(X_A)=0.6$，$P(X_B)=0.2$	A_1	A_1	正答
児童の考え方				
(Ⅰ)は第３章の「3.3.3　基準量に関する状況」を参照。				

(Ⅱ)

$$\dfrac{P(X_A)=0.6}{P(X_A)=60\div 100}\text{(演推)}$$

$$\dfrac{P(X_A)=60\div 100}{P(X_A)=60/100}\text{(演推)}$$

$$\dfrac{1=1 \qquad P(X_A)=60/100}{1\div P(X_A)=1\div 60/100}\text{(==)}$$

$$\dfrac{1\div P(X_A)=1\div 60/100}{1\div P(X_A)=100/60}\text{(演推)}$$

$$\dfrac{n(X_A)=3 \qquad 1\div P(X_A)=100/60}{n(X_A)\times 1\div P(X_A)=3\times 100/60}\text{(==)}$$

$$\dfrac{n(X_A)\times 1\div P(X_A)=3\times 100/60}{n(X_A)\times 1\div P(X_A)=5}\text{(演推)}$$

$$\dfrac{n(X_A)\times 1\div P(X_A)=5}{n(X_A)\div P(X_A)=5}\text{(演推)}$$

$$\dfrac{P(X_B)=0.2}{P(X_B)=20\div 100}\text{(演推)}$$

$$\dfrac{P(X_B)=20\div 100}{P(X_B)=20/100}\text{(演推)}$$

$$\dfrac{1=1 \qquad P(X_B)=20/100}{1\div P(X_B)=1\div 20/100}\text{(==)}$$

$$\dfrac{1\div P(X_B)=1\div 20/100}{1\div P(X_B)=100/20}\text{(演推)}$$

$$\dfrac{n(X_B)=1 \qquad 1\div P(X_B)=100/20}{n(X_B)\times 1\div P(X_B)=1\times 100/20}\text{(==)}$$

$$\dfrac{n(X_B)\times 1\div P(X_B)=1\times 100/20}{n(X_B)\times 1\div P(X_B)=5}\text{(演推)}$$

$$\dfrac{n(X_B)\times 1\div P(X_B)=5}{n(X_B)\div P(X_B)=5}\text{(演推)}$$

$$\dfrac{n(X_B)\div P(X_B)=5}{5=n(X_B)\div P(X_B)}\text{(対称律)}$$

$$\dfrac{n(X_A)\div P(X_A)=5 \qquad 5=n(X_B)\div P(X_B)}{n(X_A)\div P(X_A)=n(X_B)\div P(X_B)}\text{(推移律)}$$

$$\dfrac{\text{定理４：}n(S)=n(Z)\div P(Z) \qquad n(Z)=n(X_A) \quad n(S)=n(S_A) \quad P(Z)=P(X_A)}{n(S_A)=n(X_A)\div P(X_A)}\text{(=代入)}$$

$$\dfrac{n(S_A)=n(X_A)\div P(X_A)}{n(X_A)\div P(X_A)=n(S_A)}\text{(対称律)}$$

$$\dfrac{\text{定理４：}n(S)=n(Z)\div P(Z) \qquad n(Z)=n(X_B) \quad n(S)=n(S_B) \quad P(Z)=P(X_B)}{n(S_B)=n(X_B)\div P(X_B)}\text{(=代入)}$$

$$\dfrac{n(S_B)=n(X_B)\div P(X_B)}{n(X_B)\div P(X_B)=n(S_B)}\text{(対称律)}$$

$$\dfrac{\mathbf{n(X_A)\div P(X_A)=n(X_B)\div P(X_B)} \qquad n(X_A)\div P(X_A)=n(S_A) \quad n(X_B)\div P(X_B)=n(S_B)}{A_1：n(S_A)=n(S_B)}\text{(=代入)}$$

調査問題	仮定の候補	正答	結論	正誤
問題４	$n(X_A)=1$，$n(X_B)=3$，$P(X_A)=0.25$，$P(X_B)=0.75$	A_1	A_1	正答

児童の考え方

（Ⅰ）

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{n(X_A)=1 \qquad P(X_A)=0.25}{n(X_A)\div P(X_A)=1\div 0.25}\,(==)}{n(X_A)\div P(X_A)=4}\,(\text{演推}) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{n(X_B)=3 \qquad P(X_B)=0.75}{n(X_B)\div P(X_B)=3\div 0.75}\,(==)}{n(X_B)\div P(X_B)=4}\,(\text{演推})}{4=n(X_B)\div P(X_B)}\,(\text{対称律})}{}}{n(X_A)\div P(X_A)=n(X_B)\div P(X_B)}\,(\text{推移律})$$

$$\dfrac{\dfrac{\text{定理４}: n(S)=n(Z)\div P(Z) \qquad n(Z)=n(X_A) \quad n(S)=n(S_A) \quad P(Z)=P(X_A)}{n(S_A)=n(X_A)\div P(X_A)}\,(=\text{代入})}{n(X_A)\div P(X_A)=n(S_A)}\,(\text{対称律})$$

$$\dfrac{\dfrac{\text{定理４}: n(S)=n(Z)\div P(Z) \qquad n(Z)=n(X_B) \quad n(S)=n(S_B) \quad P(Z)=P(X_B)}{n(S_B)=n(X_B)\div P(X_B)}\,(=\text{代入})}{n(X_B)\div P(X_B)=n(S_B)}\,(\text{対称律})$$

$$\dfrac{\mathbf{n(X_A)\div P(X_A)=n(X_B)\div P(X_B)} \qquad n(X_A)\div P(X_A)=n(S_A) \quad n(X_B)\div P(X_B)=n(S_B)}{A_1: n(S_A)=n(S_B)}\,(=\text{代入})$$

（Ⅱ）

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{n(X_A)=1 \qquad \dfrac{\dfrac{1=1 \qquad \dfrac{\dfrac{P(X_A)=0.25}{P(X_A)=25\div 100}\,(\text{演推})}{P(X_A)=25/100}\,(\text{演推})}{1\div P(X_A)=1\div 25/100}\,(==)}{1\div P(X_A)=100/25}\,(\text{演推})}{n(X_A)\times 1\div P(X_A)=1\times 100/25}\,(==)}{n(X_A)\times 1\div P(X_A)=4}\,(\text{演推})}{n(X_A)\div P(X_A)=4}\,(\text{演推})$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{n(X_B)=3 \qquad \dfrac{\dfrac{1=1 \qquad \dfrac{\dfrac{P(X_B)=0.75}{P(X_B)=75\div 100}\,(\text{演推})}{P(X_B)=75/100}\,(\text{演推})}{1\div P(X_B)=1\div 75/100}\,(==)}{1\div P(X_B)=100/75}\,(\text{演推})}{n(X_B)\times 1\div P(X_B)=3\times 100/75}\,(==)}{n(X_B)\times 1\div P(X_B)=4}\,(\text{演推})}{n(X_B)\div P(X_B)=4}\,(\text{演推})$$

$$\dfrac{n(X_A)\div P(X_A)=4 \qquad \dfrac{n(X_B)\div P(X_B)=4}{4=n(X_B)\div P(X_B)}\,(\text{対称律})}{n(X_A)\div P(X_A)=n(X_B)\div P(X_B)}\,(\text{推移律})$$

$$\frac{\text{定理４：}n(S)=n(Z)\div P(Z) \qquad n(Z)=n(X_A) \quad n(S)=n(S_A) \quad P(Z)=P(X_A)}{\dfrac{n(S_A)=n(X_A)\div P(X_A)}{n(X_A)\div P(X_A)=n(S_A)}\text{（対称律）}} \text{（＝代入）}$$

$$\frac{\text{定理４：}n(S)=n(Z)\div P(Z) \qquad n(Z)=n(X_B) \quad n(S)=n(S_B) \quad P(Z)=P(X_B)}{\dfrac{n(S_B)=n(X_B)\div P(X_B)}{n(X_B)\div P(X_B)=n(S_B)}\text{（対称律）}} \text{（＝代入）}$$

$$\frac{\mathbf{n(X_A)\div P(X_A)=n(X_B)\div P(X_B)} \qquad n(X_A)\div P(X_A)=n(S_A) \quad n(X_B)\div P(X_B)=n(S_B)}{A_1:n(S_A)=n(S_B)} \text{（＝代入）}$$

付録16　割合に関する２つの知識の同時活性化を図る授業の学習指導案

第５学年　算数科学習指導案

１．日　時　　　平成 24 年１月中旬～２月上旬

２．単元名　　　「割合」

３．単元目標

割合の意味について理解し，倍，百分率，歩合を用いて問題を解決したり割合を帯グラフや円グラフに表したりすることができる。

○　割合で考えることのよさを知り，これを用いて数量の関係を判断しようとする。

○　双方向の見方から，問題場面における割合，比較量，基準量を捉え，２つの数量の関係を把握する場合や２組の数量の関係を比較する場合の問題を解決することができる。

○　倍，百分率，歩合を用いて，問題場面を比の関係図や線分図に表したり，帯グラフや円グラフを読み取ったりかいたりすることができる。

○　割合，比較量，基準量の関係を理解することができる。

４．指導に当たって

○　本単元に至るまで，児童は第３学年及び第４学年の「何倍でしょう」，第５学年の「小数×小数」，「小数÷小数」の単元を通して，乗法や除法の文章題について，何倍になるかを考えて問題解決を行ってきている。しかし，文章題を解く際，「大きい数×小さい数」，「大きい数÷小さい数」というように暗黙的に処理をしたり，双方向ではなく一方向の観点から事象を捉えようとしたりする児童がいる。また，日常生活において，２つの数量の関係を把握する場合，児童は質的に大小関係を把握することが多い。量的に差を求めることはあるが，割合を求めることは殆どない。２組の数量の関係を比較する場合も同様，児童は差による比較を行うことが多く，割合による比較を行うことは殆どない。そのため，割合の学習において，２つの数量の関係を把握する場合や２組の数量の関係を比較する場合に,児童は乗法的な考えよりも加法的な考えを優先する。さらに，日常生活において，児童は「半分」という言葉を使用する。しかし，半分の意味について，児童が乗法的に 0.5 倍や 1/2 と認識しているとは限らない。２つに分割した部分の大きさが等しいことを半分と考えている加法的な場合がある。したがって，児童は，加法的な考えに基づいたミスコンセプションやプリコンセプションを有している。

○　乗法的構造（A ÷ B ＝ C，B × C ＝ A，A ÷ C ＝ B）を異種の２量の商と同種の２量の商に区別するとき，前者は単位量当たりの量，後者は割合と捉えることができる。本単元で学習する内容は，後者の割合である。内包としての割合の定義は，「同種の２つの数量 A，B があり，A が B の何倍であるかを表した数 p を割合という」である。この定義から，「比較量÷基準量＝割合」，「基準量×割合＝比較量」，「比較量÷割合＝基準量」という３つの式が導かれる。また，割合の概念の適用される範囲としての外延は，「諸事物の関係についての倍，百分率，歩合のような割合を用いた表記の仕方」である。数量の属性に関して，比較量が基準量の部分となる「全体－部分型」，比較量と基準量が異なるものに属する「対比型」，比較量と基準量が同じものに属し，一方の量の時間経過により変化したものが他方の量となる「伸縮型」の３つの型がある。日常生活において，２つの数量の関係を把握する場合や２組の数量の関係を比較する場合に割合を用いることができる。しかし，割合に関して考慮すべきミスコンセプションやプリコンセプションがあるため，加法的な考えと乗法的な考えの双方からアプローチできる場面を設定したり，

割合，比較量，基準量の関係を比の関係図や線分図に表出させたりすることを通して，ミスコンセプションを修正し，プリコンセプションを発展させることが重要であると考えられる。

○　そこで，本単元を指導するに当たり，「高さくらべ」の学習を通して，双方向の見方から，高い・低いという質的な比較だけでなく，差や割合による量的な比較を行い，帰納的な考え方により，割合の内包に関する３つの式を導く。次に「〇〇の△△倍が××」という短い文や比の関係図を導入し，割合，比較量，基準量の関係を理解させる。また，２つの数量の関係を把握する異なる場面の問題を解決させることにより，割合，比較量，基準量の相互関係について理解を深め，問題解決力を高める。ここでは，個別指導を中心に授業を展開する。さらに，倍，百分率，歩合の相互関係や「～に対して」等の割合，比較量，基準量を含む文章表現の学習を通して，児童の問題解決力をさらに高める。また，割増や割引などの割合の和・差・積等に関する問題解決や，２組の数量の関係を比較する「くじの当たりやすさくらべ」の学習を通して，割合で考えることのよさを理解させ，児童の判断力を高めていきたい。そして，帯グラフや円グラフの学習では，これらのグラフを読み取ったりかいたりすることを中心に，総合的な判断力を養っていきたい。

５．本単元の評価規準

関心・意欲・態度	数学的な考え方	技能	知識・理解
・差による比較と割合による比較ができる場面から，割合による比較が必要な場面に至るまでを経験することにより，割合で考えることのよさを意識し，割合に関連する数量の関係を思考・判断しようとする。	・一方から他方を見たり，他方から一方を見たりする双方向の見方から，割合，比較量，基準量の関係を捉え，２つの数量の関係を把握する場合や２組の数量の関係を比較する場合の問題を解決することができる。	・問題場面を「〇〇の△△倍が××」という短い文に書き換えたり，比の関係図や線分図に表したりすることができる。 ・帯グラフや円グラフを読み取ったりかいたりすることができる。	・問題場面に関係なく，割合，比較量，基準の相互関係を理解することができる。 ・倍，百分率，歩合の相互関係を理解することができる。

6．本単元の各時間の評価規準（全 18 時間）

時間	算数への 関心・意欲・態度	数学的な考え方	数量や図形についての 技能	数量や図形についての知識・理解
《１．割合》				
1 (一斉指導と個別指導)	・大小，差，割合を使って，進んで３つの建物の「高さくらべ」をしようとする。	・３つの建物を差や割合を使って比較し，関係図を基に説明することができる。	・３つの建物の高さの関係を，関係図に表すことができる。	・関係図を基に，双方向の見方を理解することができる。
2 (一斉指導と個別指導)	・関係図や線分図を基に，割合，比較量，基準量の関係を捉えようとする。	・割合を使って比較する場合について，関係図や線分図を基に，割合，比較量，基準量の関係を説明することができる。	・割合を使って比較する場合について，関係図や線分図を基に，割合，比較量，基準量の関係を式に表すことができる。	・差による比較と割合による比較において，基準量と比較量があることを理解することができる。
3 (一斉指導と個別指導)	・「高さくらべ」の場面について，割合，比較量，基準量の関係を進んで捉えようとする。	・「高さくらべ」の場面について，短い文と比の関係図を基に，割合，比較量，基準量の関係を説明することができる。	・「高さくらべ」の場面について，割合，比較量，基準量の関係を「○○の△△倍が××」という短い文に書き換えたり，比の関係図に表したすることができる。	・「高さくらべ」の場面について，割合，比較量，基準量の関係を理解することができる。
4・5 (個別指導)	・２つの数量の関係を把握する問題場面について，割合，比較量，基準量の関係を進んで捉えようとする。	・２つの数量の関係を把握する問題場面について，割合，比較量，基準量の関係を表した比の関係図を基に，問題を解くことができる。	・２つの数量の関係を把握する問題場面について，割合，比較量，基準量の関係を短い文に書き換え，比の関係図に表すことができる。	・割合，比較量，基準量の相互関係を理解することができる。
6 (一斉指導と個別指導)	・倍，百分率，歩合の関係を進んで捉えようとする。	・倍，百分率，歩合について，1 倍＝ 100%＝10 割という相互関係を捉えることができる。	・倍，百分率，歩合の換算をすることができる。	・倍，百分率，歩合の相互関係を理解することができる。
7 (一斉指導と個別指導)	・倍，百分率，歩合の換算を行い，進んで問題解決しようとする。	・百分率や歩合を用いた問題場面について，割合，比較量，基準量の関係を表した比の関係図を基に，問題を解くことができる。	・倍，百分率，歩合の換算を行い，割合，比較量，基準量の関係を短い文に書き換え，比の関係図に表すことができる。	・倍，百分率，歩合の換算の必要性について理解することができる。
8 (一斉指導と	・割合，比較量，基準量を含む文章表現の「～に対して」等の	・割合，比較量，基準量を含む文章表現を線分図と対応させて	・割合，比較量，基準量を含む文章表現を短い文に書き換える	・割合，比較量，基準量を含む文章表現に関係なく，基

個別指導）	言葉に着目し，短い文に書き換えようとする。	説明することができる。	ことができる。	準量を捉えることができる。
９・10（個別指導）	・割合，比較量，基準量を含む文章表現から基準量を捉え,倍,百分率，歩合の換算を行い，進んで問題解決しようとする。	・割合，比較量，基準量を含む文章表現から基準量を捉え，割合，比較量，基準量の関係を表した比の関係図を基に，問題を解くことができる。	・割合，比較量，基準量を含む文章表現における割合,比較量,基準量の関係を短い文に書き換え，比の関係図に表すことができる。 ・倍，百分率，歩合によって答を表すことができる。	・割合，比較量，基準量を含む文章表現に関係なく，割合，比較量，基準量の関係を理解することができる。
《２．割合を使って》				
11・12（一斉指導と個別指導）	・売買の流れを進んで掴もうとする。	・「～増し」,「～引き」の問題場面について，線分図を基に，「～増し」，「～引き」に関連する割合を捉え，比の関係図を基に，問題を解くことができる。	・「～増し」,「～引き」という言葉から，割合，比較量，基準量の関係を短い文に書き換え，比の関係図に表すことができる。	・売買の流れ及び「～増し」，「～引き」の意味を理解することができる。
13・14（一斉指導と個別指導）	・割合が２つ以上入った問題に進んで取り組もうとする。	・割合が２つ入った問題において，線分図と２つの比の関係図を組み合わせた図を基に，問題を解くことができる。	・割合が２つ入った問題において，割合，比較量，基準量の関係を２つの短い文に書き換え，２つの比の関係図を組み合わせた図に表すことができる。	・割合が２つ入った問題場面において，基準量を捉えることができる。
15・16（一斉指導と個別指導）	・「部分－全体」の関係において，くじの当たりやすさについて判断しようとする。	・くじ全体の数に対する当たりくじの数の関係を捉え，問題を解くことができる。	・くじ全体の数に対する当たりくじの数の関係をテープ図や比の関係図に表すことができる。	・２組の数量の関係を割合を用いて比較することの意味を理解することができる。
《３．割合のグラフ》				
17・18（一斉指導と個別指導）	・帯グラフや円グラフの特徴から，これらのグラフのよさを捉えようとする。	・棒グラフや折れ線グラフと帯グラフ，円グラフとの違い，帯グラフと円グラフの似ている点や違う点をまとめることができる。	・帯グラフや円グラフの各部分を百分率で表すことができる。 ・帯グラフや円グラフをかくことができる。	・帯グラフと円グラフの意味を理解することができる。 ・帯グラフや円グラフのかき方を理解することができる。

７．学習指導計画（全 18 時間）

小単元	時間	目標	学習活動	主な評価規準
１．割合	１	・３つの建物の関係を双方向の見方から捉えることができる。	・３つの建物の「高さくらべ」において，差による比較と割合による比較を見出し，これら２つの比較の共通の見方として，双方向の見方を捉える。	・３つの建物を差や割合を使って比較し，関係図を基に説明することができる。
	２	・関係図や線分図から，割合，比較量，基準量の関係を捉え，式にまとめることができる。	・３つの建物の差の関係図や割合の関係図及び線分図から，差による比較と割合による比較のどちらの比較においても，基準量と比較量があることを理解し，関係図や線分図から，割合，比較量，基準量の関係を式に表す。	・差による比較と割合による比較において，基準量と比較量があることを理解することができる。 ・割合を使って比較する場合について，関係図や線分図を基に，割合，比較量，基準量の関係を説明することができる。
	３	・「高さくらべ」の場面について，割合，比較量，基準量の関係を捉え，短い文や比の関係図に表すことができる。	・「高さくらべ」の場面において，割合，比較量，基準量の関係を捉え，「○○の△△倍が××」という短い文を書いたり，比の関係図をかいたりする。	・「高さくらべ」の場面について，割合，比較量，基準量の関係を「○○の△△倍が××」という短い文に書き換えたり，比の関係図に表したすることができる。
	４・５	・２つの数量の関係を把握する問題場面について，割合，比較量，基準量を捉え，問題場面を書き換えた短い文と比の関係図を基に，問題解決することができる。	・２つの数量の関係を把握する場面において，次の手順にしたがい，問題解決する。 ①割合に着目し，基準量を決定する。 ②「○○の△△倍が××」という短い文を書く。 ③比の関係図をかく。 ④割合，比較量，基準量の内，どれを求めるかを考え，立式する。 ⑤計算し，答を求める。	・２つの数量の関係を把握する問題場面について，割合，比較量，基準量の関係を表した比の関係図を基に，問題を解くことができる。 ・割合，比較量，基準量の関係を短い文に書き換え，比の関係図に表すことができる。
	６	・倍，百分率，歩合の相互関係を捉え，換算することができる。	・倍，百分率，歩合の１倍＝100%＝10 割という相互関係を捉え，換算する。	・倍，百分率，歩合の換算をすることができる。
	７	・百分率や歩合を用いた場面について，	・百分率や歩合を用いた場面において，次の手順にした	・百分率や歩合を用いた問題場面について，

		倍，百分率，歩合の換算を行い，短い文と比の関係図を基に，問題解決することができる。	がい，問題解決する。 ①割合に着目し，基準量を決定する。 ②倍，百分率，歩合の換算を行い,「〇〇の△△倍が××」という短い文を書く。 ③比の関係図をかく。 ④割合，比較量，基準量の内，どれを求めるかを考え，立式する。 ⑤計算し，答を求める。 ⑥答を倍から百分率，歩合に換算する。	割合，比較量，基準量の関係を表した比の関係図を基に，問題を解くことができる。
	8	・割合，比較量，基準量を含む文章表現から基準量を捉え，短い文に書き換えることができる。	・「～に対して」，「～を基にすると」，「～と比べると」，「～に関して」，「～の内」を用いた割合，比較量，基準量を含む文章表現から基準量を捉え，「〇〇の△△倍が××」という短い文に書き換える。	・割合，比較量，基準量を含む文章表現を短い文に書き換えることができる。
	9・10	・割合，比較量，基準量を含む文章表現から基準量を捉え，倍，百分率，歩合の換算を行い，短い文と比の関係図を基に，問題解決することができる。	・割合，比較量，基準量を含む異なる文章表現の場面において，次の手順にしたがい，問題を解決する。 ①割合に着目し，基準量を決定する。 ②倍，百分率，歩合の換算を行い,「〇〇の△△倍が××」という短い文を書く。 ③比の関係図をかく。 ④割合，比較量，基準量の内，どれを求めるかを考え，立式する。 ⑤計算し，答を求める。 ⑥答を倍から百分率，歩合に換算する。	・割合，比較量，基準量を含む文章表現から基準量を捉え，割合，比較量，基準量の関係を表した比の関係図を基に，問題を解くことができる。 ・倍，百分率，歩合によって答を表すことができる。
２．割合を使って	11・12	・売買の流れを捉え，「～増し」，「～引き」という言葉から，割合を修正し，短い文と比の関係図を基に，問題解決することができる。	・「～増し」，「～引き」の場面において，次の手順にしたがい，問題を解決する。 ①「～増し」，「～引き」という言葉から，割合を修正し，線分図をかく。 ②線分図を基に，基準量を決定する。	・「～増し」，「～引き」の問題場面について，線分図を基に，「～増し」，「～引き」に関連する割合を捉え，比の関係図を基に，問題を解くことができる。

			③「○○の△△倍が××」という短い文を書く。 ④比の関係図をかく。 ⑤割合，比較量，基準量の内，どれを求めるかを考え，立式する。 ⑥計算し，答を求める。 ⑦答を倍から百分率，歩合に換算する。	・売買の流れ及び「～増し」，「～引き」の意味を理解することができる。
	13・14	・割合が２つ入った問題において，割合を修正し，２つの短い文と２つの比の関係図を組み合わせた図を基に，問題解決することができる。	・割合が２つ入った場面において，次の手順にしたがい，問題を解決する。 ①「～増し」，「～引き」という言葉から，割合を修正し，線分図をかく。 ②線分図を基に，基準量を決定する。 ③「○○の△△倍が××」という２つの短い文を書く。 ④２つの比の関係図を組み合わせた図をかく。 ⑤割合，比較量，基準量の内，どれを求めるかを考え，立式する。 ⑥計算し，答を求める。 ⑦答を倍から百分率，歩合に換算する。	・割合が２つ入った問題において，線分図と２つの比の関係図を組み合わせた図を基に，問題を解くことができる。 ・割合が２つ入った問題において，割合，比較量，基準量の関係を２つの短い文に書き換え，２つの比の関係図を組み合わせた図に表すことができる。
	15・16	・くじの当たりやすさについて，「部分－全体」の関係において，テープ図や比の関係図を基に，問題解決することができる。	・くじの当たりやすさの意味を捉え，「部分－全体」の関係において，テープ図や比の関係図を基に，問題を解決する。	・くじ全体の数に対する当たりくじの数の関係を捉え，問題を解くことができる。 ・くじ全体の数に対する当たりくじの数の関係をテープ図や比の関係図に表すことができる。
３．割合のグラフ	17・18	・棒グラフや折れ線グラフと帯グラフ，円グラフとの違い，帯グラフと円グラフの似ている点や違う点をまとめることができる。 ・「部分－全体」の関係を捉え，各部	・棒グラフ，折れ線グラフ，帯グラフ，円グラフの用語を捉え，それぞれのグラフの特徴をまとめる。 ・次の手順にしたがい，帯グラフや円グラフをかく。 ①表を作る。 ②数量が「左から大→小，その他は一番右」になるよう，	・帯グラフと円グラフの各部分を百分率で表すことができる。 ・帯グラフや円グラフをかくことができる。

		分の割合を求め，帯グラフや円グラフをかくことができる。	表に必要事項を記入する。 ③各部分の数量を記入し，合計(全体)を求める。 ④各部分が全体の何%になるかを計算する。 ⑤合計が 100%にならないときは，割合の一番大きい部分か「その他」を変えて100%になるようにする。 ⑥帯グラフでは，100 等分した目もり（10cm=100mm）のグラフ用紙を使って，各部分をそれぞれの百分率に合わせて(左から百分率の大きい順に,「その他」は一番あと)区切る。 ⑦円グラフでは，各部分をそれぞれの百分率に合わせて(真上から右回りに百分率の大きい順に,「その他」は一番あと)区切る。	

８．各時間の指導に当たって及び学習展開

(1)第１時・第２時

〇第１時・第２時の指導に当たって

- 本時に至るまで，乗法や除法の文章題について，児童は何倍になるかを考えて問題解決を行ってきている。しかし，２つの数量に関して，一方から他方を見たり，他方から一方を見たりする双方向の見方という視点から数量関係を捉えることができる児童は少ない。また，２学期当初に行った小数の乗除に関する文章題を解決する調査結果から，文章題を解く際,「大きい数×小さい数」,「大きい数÷小さい数」というように暗黙的に処理をするため，「小さい数×大きい数」,「小さい数÷大きい数」に抵抗を示す児童が多くいることが分かった。そこで，本単元を指導するに当たり，文章題を解決する際には，関係図や線分図などをかくこと及び乗除の構造的理解に焦点を当て，児童のレディネスを整えてきた。したがって，本時を指導する素地はできていると言ってよい。
- 第１時・第２時では，児童の経験をふまえ，課題場面として，３つの建物の「高さくらべ」を取り上げる。「高さくらべ」の学習を通して，高い・低いという質的な比較だけでなく，差や割合による量的な比較を導き出すことができると考えられる。差による比較も割合による比較も，一方から他方を見たり，他方から一方を見たりする双方向の見方を捉えさせることが重要である。また，割合の表し方は，２：３のように２つの数を使って表す場合と 2/3 のように１つの数を使って表す場合があり，ここでは，後者の場合を扱う。割合による比較において，２つの数量を A，B とするとき，双方向の見方により,「A を基準量とし，B を比較量として割合(B/A)を考える」場合と「B を基準量とし，A を比較量として割合(A/B)を考える」場合がある。したがって，基準量と比較量を見極め，基準量の割合を１倍とすることが重要である。そして，関係図や線分図から，割合，比較量，基準量の関係を式にまとめ，他の場面へ適応させ，理解を深化させることも大切である。さらに，ここでの割合の概念獲得に際して，構成的抽象化の考えにしたがい，場面の把握(とらえる)，情報収集(あつめる)，分類・整理(まとめる)，解釈(よみとる)，一般化(いかす)という帰納的な考え方を重視する必要があると考えられる。
- そこで, 第１時・第２時を指導するに当たって, 児童の興味・関心を引き出すために,「学校(20m)・デパート(40m)・テレビ塔(100m)」という児童にとって馴染みの深い建物を提示し，３つの建物の高さくらべをさせる(とらえる)。比較した結果をグループで集約し(あつめる)，分類・整理させる(まとめる)。各グループで分類整理した結果を黒板に貼附する(まとめる)。児童とのやりとりにより，３つの建物の数量関係を関係図にまとめ，双方向の見方を捉えさせる(よみとる)。さらに，関係図に表された３つの建物の関係の内，学校とデパートの関係を線分図から捉え，差による比較と割合による比較(２倍，0.5 倍)のどちらの場合においても，基準量と比較量があることを理解させていきたい(よみとる)。そして，関係図や線分図から割合，比較量，基準量の関係を表した３つの式を導くようにしていきたい(よみとる)。

〇第１時・第２時の学習展開

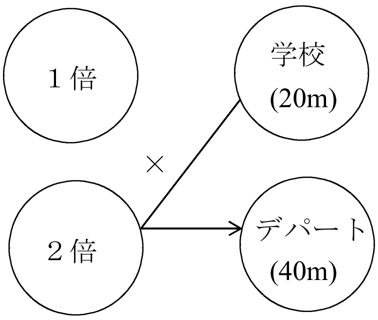
第１時・第２時の学習展開は，第４章の「4.1　割合に関する２つの知識の同時活性化を図る授業の構築」を参照。

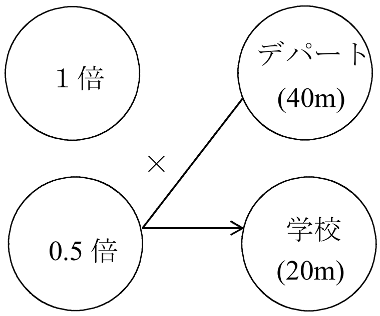
(2) 第３時

○第３時の指導に当たって

・　児童は，第１時・第２時の「高さくらべ」の学習を通して，双方向の見方から，割合，比較量，基準量を捉え，これらの関係を式にまとめている。この活動において，児童は，大小による比較，差による比較，割合による比較を意欲的に表出しており，本時の活動にも関心を示すと考えられる。また，既習の双方向の見方から，割合，比較量，基準量の関係を比の関係図に表すことも余り抵抗なく行うと考えられる。学校とデパート，学校とテレビ塔，デパートとテレビ塔に関する６つの比の関係図において，「基準量×割合＝比較量」という関係から，例えば，学校－デパートの場合，「学校(20m)の２倍がデパート(40m)」,「デパート(40m)の 0.5 倍が学校(20m)」という基本となる短い文を６つ導く活動を行う。このような活動も，比の関係図に表すことの発展と考えられるので，児童はあまり抵抗を示さないと思われる。

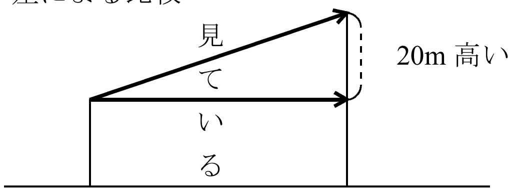
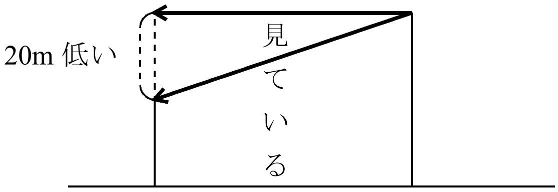
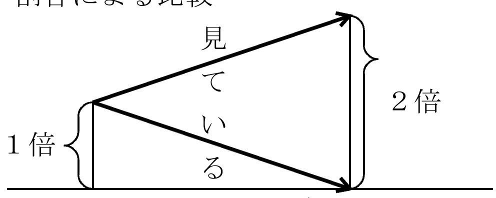
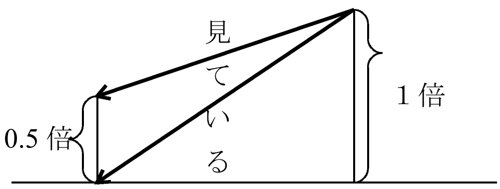
・　割合の概念獲得の基本は，大小による比較，差による比較，割合による比較という３つのカテゴリーをその特徴から識別することである。第３時では，比の関係図を使用すること及び比の関係図から短い文を導くことを学習する。「比較量÷基準量＝割合」,「基準量×割合＝比較量」,「比較量÷割合＝基準量」という３つの式は既習事項であるため，例えば，次のような学校(20m)とデパート(40m)に関する比の関係図も容易に理解すると考えられる。 また，日常生活では，「～の何%」や「～の何倍」という割合の表現が用いられることが多く，「○○の△△倍が××」という短い文は，デフォルトとして児童の中に定着していると考えられる。この短い文は，割合に関する問題において，基準量を決めるのと同様に，非常に重要な位置を占める。

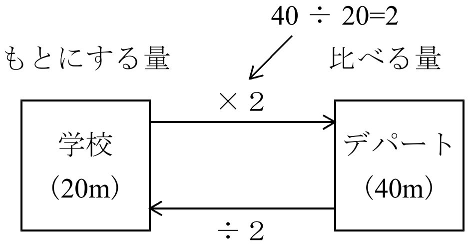




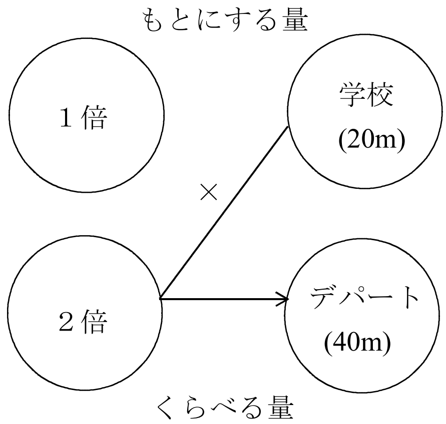
・　そこで，第３時を指導するに当たって，第１時・第２時の「高さくらべ」の授業において，学校とデパート，学校とテレビ塔，デパートとテレビ塔に関して，双方向の見方に基づいた関係図や線分図から式を導いたことを想起させ，比の関係図を導くようにしていきたい。また，学校とデパートの場合を採り上げ，２通りの比の関係図から，「学校(20m)の２倍がデパート(40m)」,「デパート(40m)の 0.5 倍が学校(20m)」という基本となる短い文を導く。そして，学校とテレビ塔，デパートとテレビ塔についても短い文をそれぞれ２つずつ導く。これらの短い文において，割合に着目するとき，割合の前の「の」の前が基準量であることを捉えさせる。

○第３時の学習展開

児童の活動	指導上の留意点と支援
１．「高さくらべ」の授業を想起する。 ○学校とデパートの場合について考える。 ・差による比較  学校　デパート （20m）　（40m） もとにする量　くらべる量  学校　デパート （20m）　（40m） くらべる量　もとにする量 ・割合による比較  学校　デパート （20m）　（40m） もとにする量　くらべる量  学校　デパート （20m）　（40m） くらべる量　もとにする量 ２．学校とデパートの場合の割合による比較に関して，双方向の見方の関係図と線分図から，比の関係図を導く。	○学校とデパートに関して，差による比較と割合による比較の線分図を用意する。 ○差による比較と割合による比較において，見ている方が基準量であること，特に，割合による比較では，基準量の割合が１倍であることを捉えさせる。



○２倍というのは，基準量を学校にしたときの割合であることを理解させ，比の関係図を導くようにする。



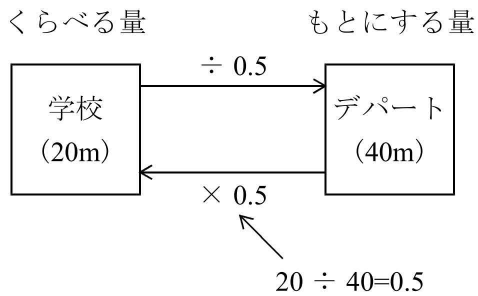
○関係図から，

20m × 2 ＝ 40m

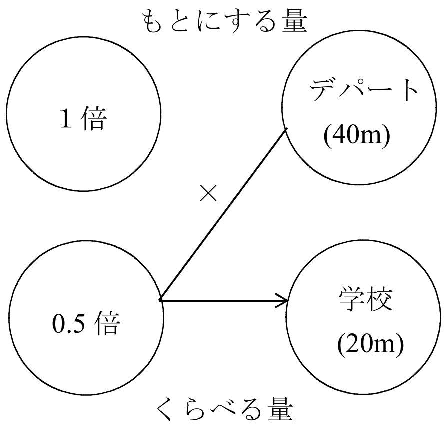
40m ÷ 20m ＝ 2 倍

40m ÷ 2 ＝ 20m

が導かれることを確かめさせる。



○ 0.5 倍というのは，基準量をデパートにしたときの割合であることを理解させ，比の関係図を導くようにする。



○関係図から，

40m × 0.5 ＝ 20m

20m ÷ 40m ＝ 0.5 倍

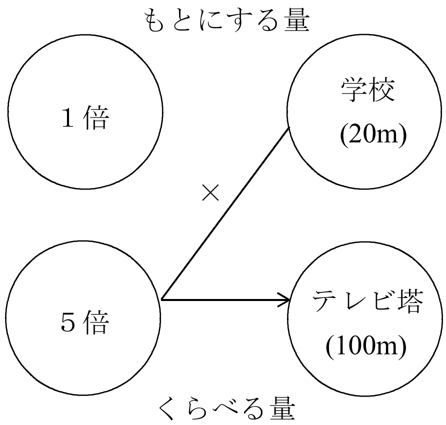
20m ÷ 0.5 ＝ 40m

が導かれることを確かめさせる。

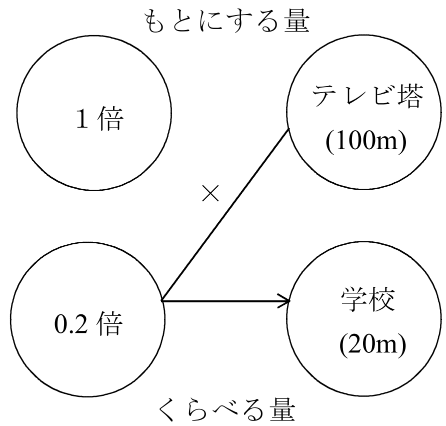
３．比の関係図に表すことが分かる。

○学校とテレビ塔の場合について考える。

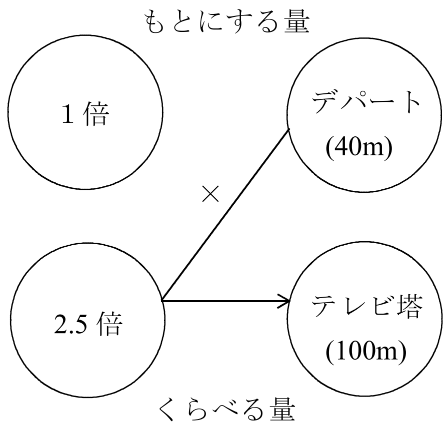
○デパートとテレビ塔の場合について考える。



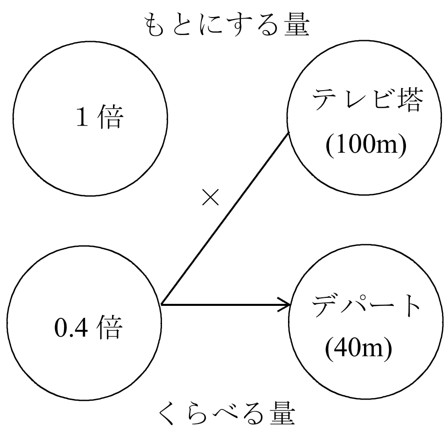
○関係図から，
20m × 5 ＝ 100m
100m ÷ 20m ＝ 5倍
100m ÷倍＝ 20m
が導かれることを確かめさせる。



○関係図から，
100m × 0.2 ＝ 20m
20m ÷ 100m ＝ 0.2倍
20m ÷ 0.2 ＝ 100m
が導かれることを確かめさせる。



○関係図から，
40m × 2.5 ＝ 100m
100m ÷ 40m ＝ 2.5倍
100m ÷ 2.5 ＝ 40m
が導かれることを確かめさせる。



○関係図から，
100m × 0.4 ＝ 40m
40m ÷ 100m ＝ 0.4倍
40m ÷ 0.4 ＝ 100m
が導かれることを確かめさせる。

4．基本となる短い文の書き方が分かる。

○学校とデパートの比の関係図において，「学校

○学校とデパートの場合の関係図について考える。 ・学校（20m）の２倍がデパート（40m） ・デパート（40m）の 0.5 倍が学校（20m） ○学校とテレビ塔やデパートとテレビ塔の場合について考える。 ・学校（20m）の５倍がテレビ塔（100m） ・テレビ塔(100m)の 0.2 倍が学校（20m） ・デパート（40m）の 2.5 倍がテレビ塔 ・テレビ塔（100m）の 0.4 倍がデパート（40m）	(20m）×２＝デパート（40m）」という関係が成り立っていることを捉えさせ，「×や＝の記号を使わないで，文にすると？」と問いかけ，「学校（20m）の２倍がデパート（40m）」という短い文を導く。 ○学校とテレビ塔，デパートとテレビ塔に関する短い文を書かせる場合には，個別指導を行う。 ○６つの短い文を全員の児童が書き終えてから，「学校（20m）の２倍がデパート（40m）：正しい文」，「デパート（40m）は，学校（20m）の２倍：正しい文」，「学校（20m）はデパートの２倍：間違った文」を示し，「学校（20m）の２倍」がセットになっていることを捉えさせ，短い文において，割合に着目するとき，割合の前の「の」の前が基準量であることを掴ませる。

(4) 第４時・第５時

○第４時・第５時の指導に当たって

- 第３時において，児童の中には，割合の問題に若干の抵抗を示す児童もいたが，大半の児童は，割合の問題を意欲的に解決していた。これは，割合の問題を解決するための一連の手順(①割合に着目し，基準量を決める。②「○○の△△倍が××」という短い文を書く。③比の関係図をかく。④式を立てる。⑤計算し，答を書く。)が，習得されつつあることを示すと考えられる。
- 割合の学習の初期において，割合の概念的知識の方が手続き的知識より高い児童，あるいは，割合の手続き的知識の方が概念的知識より高い児童がいる。それぞれの知識の高低により，割合の問題に対する関心・意欲・態度は異なると考えられる。そして，割合の問題場面を短い文に書き表したり，比の関係図をかいたりすることにより，割合の概念的知識の方が手続き的知識より高い児童は，手続き的知識の向上が期待され，また，割合の手続き的知識の方が概念的知識より高い児童は，概念的知識の向上が期待される。なぜなら，割合の問題場面を短い文に書き表したり，比の関係図をかいたりすることは，割合，比較量，基準量の相互関係の理解を高めるからである。
- そこで，第４時・第５時を指導するに当たって，教科書の問題を用いて個別指導を行う。これにより，割合の問題にやや抵抗を示す児童に対しても，きめ細かな指導を行うことができると考えられる。また，児童の割合の問題解決力をより一層高められるように，「全体－部分型」，「対比型」，「伸縮型」の問題を全て出題するとともに，割合，比較量，基準量をそれぞれ求める問題を全て出題する。手順にしたがって，問題解決を行っていけるように，以下のようなワークシートを準備する。

(1) みさきさんの学校の５年生全体の人数は，125 人です。75 人の人が運動クラブに入りました。運動クラブの人数は，５年生全体の人数の何倍ですか。

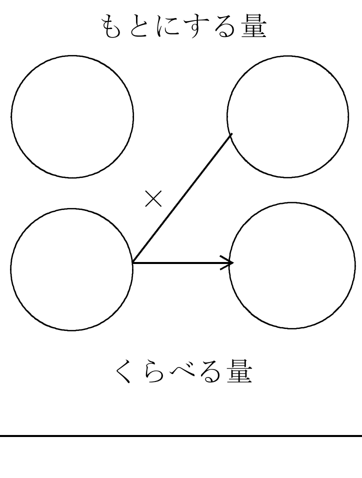
１．割合に着目し，もとにする量を決める。

→もとにする量は，＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

２．「○○の△△倍が××」という短い文を書く。

→＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

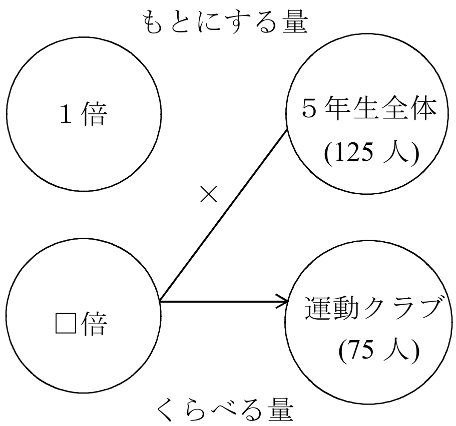
３．関係図をかく。



４．式を立てる。

５．計算し，答を書く。

○第４時・第５時の学習展開

児童の活動	指導上の留意点と支援
〔第４時〕	
１．問題を解決する手順を知る。 ①割合に着目し，もとにする量を決定する。 ②「○○の△△倍が××」という短い文を書く。 ③比の関係図をかく。 ④割合，比較量，基準量の内，どれを求めるかを考え，式を立てる。 ⑤計算し，答を求める。	○割合の問題を解く手順を確認する。その際，短い文と比の関係図のかき方やそれらの関係について確認し，短い文を基に比の関係図をかき，比の関係図を基に立式するようにさせる。
２．問題を解く。 (1)みさきさんの学校の５年生全体の人数は 125 人です。75 人の人が運動クラブに入りました。運動クラブの人数は，５年生全体の人数の何倍ですか。	○手順をしたがった問題解決の流れを理解できるように(1)の問題のみ全員で解くようにする。 ○手順にしたがって，問題解決を行っていけるように，基準量を書く欄，短い文を書く欄，比の関係図の枠，式を書く欄，答えを書く欄及び問題文を印刷したワークシートを準備する。
①割合に着目し，もとにする量を決める。 →もとにする量は，<u>５年生全体 125 人</u> ②「○○の△△倍が××」という短い文を書く。 →<u>５年生全体 125 人の□倍が運動クラブ 75 人</u> ③比の関係図をかく。  ④式を立てる。 75 ÷ 125 ＝□ ⑤計算し，答を求める。 75 ÷ 125 ＝ 0.6　　　<u>0.6 倍</u>	
(2)陸上クラブの定員は 15 人です。希望者は定員の 0.8 倍あったそうです。希望者は何人でしたか。	○基準量の判断ができない児童には，双方向の見方で用いた関係図をかかせ,場面を把握させる。

(3) 科学クラブの希望者は 24 人でした。これは，定員の 1.6 倍にあたります。科学クラブの定員は何人ですか。 (4) 運動クラブの人数は 75 人です。文化クラブの人数は 50 人です。運動クラブの人数は，文化クラブの人数の何倍ですか。 (5) 去年 1400 円だった品物が，今年は去年の 1.05 倍の値段になったそうです。今年は何円になりましたか。 (6) のりかさんの市の小学生は 8190 人で，これは，市の人口の 0.09 倍にあたるそうです。のりかさんの市の人口は何人ですか。	○比の関係図がかけない児童には，基準量の割合が 1 倍であることを確認し，基準量と 1 倍を比の関係図に書き込ませ，それぞれに対応する比較量と割合を次に書き込ませるようにする。
〔第５時〕 (7) みさきさんの学校のしき地は，8000m^2 で，運動場は，しき地全体の 0.6 倍だそうです。運動場の面積はどれだけですか。 (8) 器楽クラブの希望者は 30 人で，これは，定員の 1.5 倍にあたるそうです。器楽クラブの定員は何人ですか。 (9) 理科図かんは 1800 円で，これは，国語辞典の 1.2 倍にあたるそうです。国語辞典は何円ですか。 (10) 運動クラブ全体の人数は 75 人です。バスケットボールクラブの人数は 15 人です。バスケットボールクラブに人数は，運動クラブ全体の人数の何倍ですか。 (11) 文化クラブの定員は 50 人です。希望者は定員の 1.4 倍あったそうです。希望者は何人ですか。 (12) 理科図かんは 1800 円で，これは百科事典の 0.4 倍にあたるそうです。百科事典は何円ですか。 ３．まとめる。 ○本時の感想を書く。	○手順にしたがって，問題解決を行っていけるように，基準量を書く欄，短い文を書く欄，比の関係図の枠，式を書く欄，答えを書く欄及び問題文を印刷したワークシートを準備する。 ○基準量の判断ができない児童には，双方向の見方で用いた関係図をかかせ,場面を把握させる。 ○比の関係図がかけない児童には，基準量の割合が 1 倍であることを確認し，基準量と 1 倍を比の関係図に書き込ませ，それぞれに対応する比較量と割合を次に書き込ませるようにする。 ○机間巡視により，本時の理解度を知る。

(5) 第６時

○第６時の指導に当たって

・　第４・５時において，児童は，「①割合に着目し，基準量を決める。②「○○の△△倍が××」という短い文を書く。③比の関係図をかく。④式を立てる。⑤計算し，答を書く。」という手順にしたがって割合の問題を解決してきた。この中で，割合の問題解決に若干の抵抗を示す児童もいたが，どの児童も意欲的に問題解決に取り組んでいた。本時において，倍，百分率，歩合の相互関係を学習するが，比較的容易に学習内容を理解すると考えられる。

・　本時の学習内容は，倍，百分率，歩合の相互の関係を理解し，倍，百分率，歩合の換算を行うことである。したがって，手続き的知識に属する換算に伴う手続きを明確に示すとともに，概念的知識として，倍は基準量を１と見た場合であり，百分率や歩合は基準量を 100 や 10 と見た場合であることを理解させることが重要であると考えられる。

・　そこで，本時を指導するに当たって，以下のようなワークシートを用いて，小数(倍)→百分率，小数(倍)→歩合，百分率→小数(倍)，歩合→小数(倍)に関する手順を示し，倍，百分率，歩合の換算を行わせる。なお，手順に関する一斉指導は行うが，それ以外は，個別指導を行う。

○割合を表す数

	小数(倍)	１.２５	０.７５	０.３	１.２４５
アメリカやヨーロッパ等では	１００倍して	↓ × 100	↓ × 100	↓ × 100	↓ × 100
	百分率(%)	１２５%	７５%	３０%	１２４.５%

※小数(倍)→百分率は，　小数点を右に２つ移動すればよい。

※百分率→小数(倍)は，小数点を左に２つ移動すればよい。　１２５.%→１.２５

↖ここに小数点ある

日本では　　歩合・・・・・・・・・　２.３４６

(小数の位によって，　名前が付いている。)

割(わり)　分(ぶ)　厘(りん)

２３割４分５厘

	割			分	厘	
歩　合	１の位	小数点	$\frac{1}{10}$ の位	$\frac{1}{100}$ の位	$\frac{1}{1000}$ の位	百分率
	０	.	１	４		%
３割４分５厘						%
						１５６%
	０	.	３			%
９分７厘						%
						１０.５%
	０	.	０	０	４	%
４分						%
						１０１%
	１	.	５	０	４	%
１３割						%
						２００%

小数(倍)	1	０.１		
百 分 率		１０%		０.%
歩　　合	１０割		１分	

(1) 小数(倍)を歩合で表しなさい。

０.７→　　０.９４→　　０.０８→

０.３７４→　　０.２０９→　　０.００５→

０.１３→　　１.０３→　　０.０２９→

１.９→　　３.０２→　　３→

(2) 小数(倍)を百分率で表しなさい。

０.９１→　　０.０３→　　０.００８→

０.１０７→　　０.０３５→　　０.０３６５→

０.６０８→　　０.０７６→　　０.０９８２→

０.５６３→　　１.９６３→　　４.６９７→

(3) 百分率を小数(倍)に表しなさい。

５３%→　　６.７%→　　９%→

８０%→　　１０６%→　　２５.４%→

１１８%→　　０.８%→　　３１.５%→

(4) 歩合を小数(倍)で表しなさい。

３割２分１厘→　　８割→　　６分→

１３割→　　１５割４分→　　９割３分→

１分４厘→　　２厘→　　１割４厘→

１７割７厘→　　１２割３分６厘→　　９割７分８厘→

○第６時の学習展開

児童の活動	指導上の留意点と支援
１．倍，百分率，歩合が日常生活で使われていることを意識する。 ・百分率(%)や歩合は，デパートなどでよく見かける。 ・降水確率で百分率(%)を使っている。 ・野球の打率で３割３分３厘を使っている。	○黒板に「小数・百分率(～%：パーセント)，歩合(～割など)」と提示し，使われている場面を尋ねる。児童とのやりとりの後,「倍，百分率，歩合の関係」と板書する。
２．倍・百分率・歩合の相互関係の関係を知る。 ・倍は，全体を１と見ている。 ・百分率は，全体を 100 と見ている。 ・歩合は，全体を 10 と見ている。	○配布プリントに沿って，板書しながら，説明を行う。 ○倍，百分率，歩合のどれも割合を表している。しかし，倍は基準量を１と見た場合であり，百分率や歩合は，基準量を 100 や 10 と見た場合である。このことを捉えられるように，１倍に当たる百分率が 100%，１倍に当たる歩合が 10 割であることから，倍・百分率・歩合の相互関係の関係を捉えさせる。
３．倍，百分率，歩合の換算を行う。 ○配布プリントの問題を解く。	○理解の遅い児童には，個別指導の際，倍，百分率,歩合の表現における小数点の位置を確認し，１つ１つ丁寧に換算における小数点の移動の指導を行う。
４．まとめる。 ○本時の感想を書く。	○机間巡視により，本時の理解度を知る。

(6) 第７時

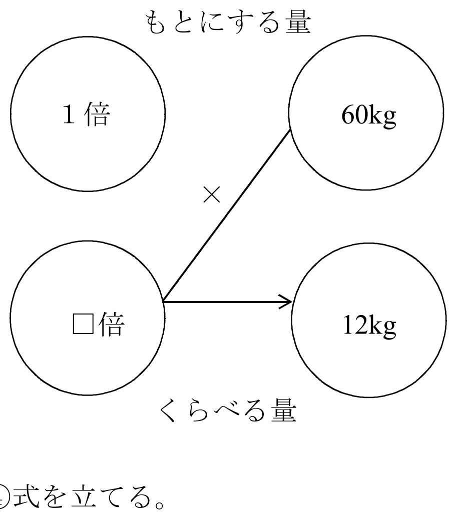
○第７時の指導に当たって

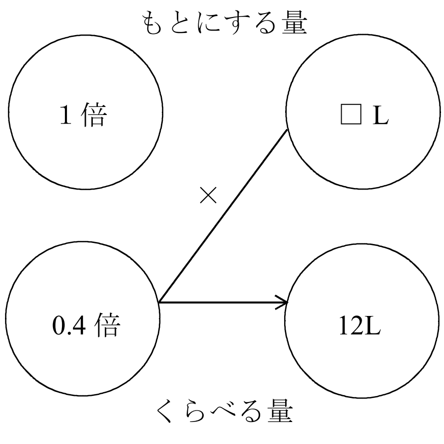
・　第６時において，児童は，倍，百分率，歩合の相互関係を理解し，換算を行うことができるようになっている。本時において，割合が百分率や歩合で表現された問題の解決を学習するが，第４時・第５時で学習した問題解決の手順を使うために，倍，百分率，歩合の換算をする必要があることを比較的容易に気づくことができると考えられる。

・　本時の学習内容は，百分率や歩合を用いた場面について，倍，百分率，歩合の換算を行い，短い文と比の関係図から問題解決することである。既習の問題解決の手順は倍に基づいた解法であり，百分率や歩合をそのまま関係図や立式に用いることができない。また，倍で求めた答を百分率や歩合に換算し直す必要がある。問題解決の手順にしたがった解決過程において，このようなことを理解させ，問題解決の手順を拡張することが重要であると考えられる。

・　そこで，本時を指導するに当たって，誤答例を取り上げ，答の見積もりを行うことにより，百分率や歩合をそのまま立式に用いて問題解決できないことに気づかせたい。そのために，百分率の換算を必要とする場面について一斉指導は行うが，それ以外は，個別指導を行う。

○第７時の学習展開

児童の活動	指導上の留意点と支援
１．問題場面の違いを把握する。 (1)　12kg は，60kg の□%です。 ・今までは□倍だった。 ・百分率を使っている。	○ 12kg と 60kg の関係について，倍なら，既習の問題解決の手順に基づいて解けることを確認する。 ○本時についても，これまでと同様に，問題解決の手順にしたがって解くように伝える。
２．百分率に関する問題を解く。 ①割合に着目し，もとにする量を決める。 →もとにする量は，60kg ②「○○の△△倍が××」という短い文を書く。 → 60kg の□倍が 12kg ③比の関係図をかく。  ④式を立てる。 12 ÷ 60 ＝□	○手順にしたがって，問題解決を行っていけるように，基準量を書く欄，短い文を書く欄，比の関係図の枠，式を書く欄，答えを書く欄及び問題文を印刷したワークシートを準備する。 ○百分率をそのまま関係図や立式に用いている児童に対して，既習の問題解決の手順は，倍に基づいた解法であったことを確認する。

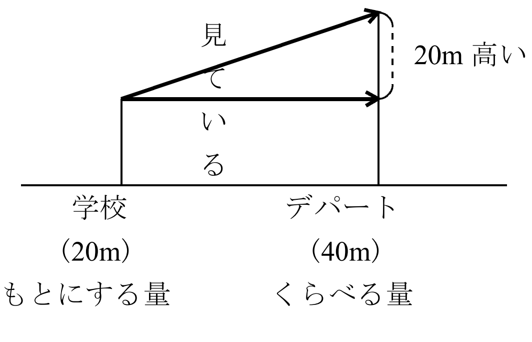
⑤計算し，答を求める。 12 ÷ 60 ＝ 0.2　　　　0.2 倍 ⑥答を倍から百分率，歩合に換算する。 0.2 × 100 ＝ 20　　　　20%	○問題解決の手順にしたがって，児童に解決過程を説明させる。その中で，新たに「⑥答を倍から百分率，歩合に換算する。」が必要な場合があることを確認する。
3．%に換算し直す必要性について考え，歩合に関する問題を解く。 12 ÷ 60 ＝ 0.2　　　　0.2% ・60 を 1 と見た場合だから, 0.2 は 0.2 倍の意味。 ・0.2 に 100 をかけて百分率で表す。	○誤答例として,「0.2%」という解答を取り上げ，60kg が 100%に当たることから，12kg は 0.2%では小さ過ぎることを確認する。 ○比の関係図における割合の表記が「倍」であることを確認し，計算結果の「0.2」は 0.2 倍であることから，%に換算し直す必要があることに気づかせる。
(2) 12L は，□ L の 4 割です。 ①割合に着目し，もとにする量を決める。 →もとにする量は，□ L ②「○○の△△倍が××」という短い文を書く。 →□ L の 0.4 倍が 12L ③比の関係図をかく。  ④式を立てる。 12 ÷ 0.4 ＝□ ⑤計算し，答を求める。 12 ÷ 0.4 ＝ 30　　　　30L	○(1)の問題において，□%を□倍として短い文を書いたことを確認し，割合が分かっているため，歩合を倍に換算し直す必要があることに気づかせる。 ○短い文を書くときには，先に百分率や歩合を換算しておき，倍を用いて書くように共通理解を図る。
4．まとめる。 ○本時の感想を書く。	○机間巡視により，本時の理解度を知る。

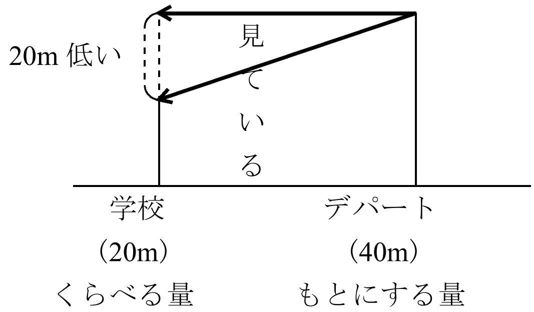
(7) 第８時

○第８時の指導に当たって

・　本時までに，児童は「○○の△△倍が××」という短い文を書くことにより，殆どの児童が「～の」という割合，比較量，基準量を含む文章表現を理解していると考えられる。本時で学習する「～より」，「～に対して」，「～を基にすると」，「～と比べると」，「～に関して」，「～の内」という割合，比較量，基準量を含む文章表現について，児童は日常生活で使用している。しかし，その言葉に含まれている意味については余り意識していないため，その言葉から基準量を決定することについては，理解が不十分であると考えられる。
・　割合，比較量，基準量を含む文章表現には，色々あるが，本時では，「学校(20m)の２倍がデパート(40m)」，「デパート(40m)の 0.5 倍が学校(20m)」を基に，「～より」（差の場合），「～に対して」，「～を基にすると」，「～と比べると」，「～に関して」，「～の内」（「部分―全体」の関係を表すので，学校のしき地の面積と運動場の面積を場面として取り扱う）という文章表現を取り扱う。割合の前の「の」の前が基準量を表すことを学習しているので，本時の学習に対して理解を示すと考えられる。
・　そこで，第８時を指導するに当たって，「学校(20m)よりデパート(40m)の方が 20m 高い」，「デパート(40m)より学校(20m)の方が 20m 低い」，「学校(20m)の２倍がデパート(40m)」，「デパート(40m)の 0.5 倍が学校(20m)」という文と共に，第３時で使用した線分図を提示する。「～より」との前が基準量を表すこと，基準量と割合がセットであること，割合の前の「の」の前が基準量を表すことを想起させる。次に，「学校(20m)の２倍がデパート(40m)」，「デパート(40m)の 0.5 倍が学校(20m)」という文を「～に対して」，「～を基にすると」，「～と比べると」，「～に関して」を使って書き直しをさせる。同じ場面に対して様々な文章表現ができることから，これらの言葉の「～」に当たる言葉が基準量を表すことを捉えさせていきたい。また，「～の内」という言葉については，「学校のしき地の面積と運動場の面積」から，「～」に当たる言葉が基準量であることを捉えさせていきたい。

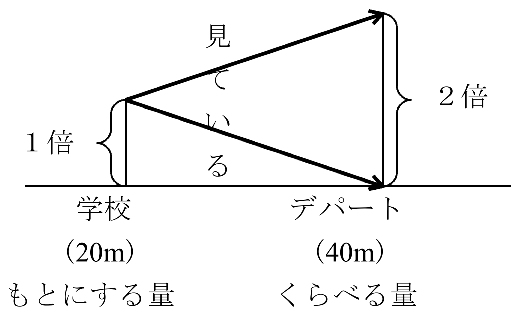
○第８時の学習展開

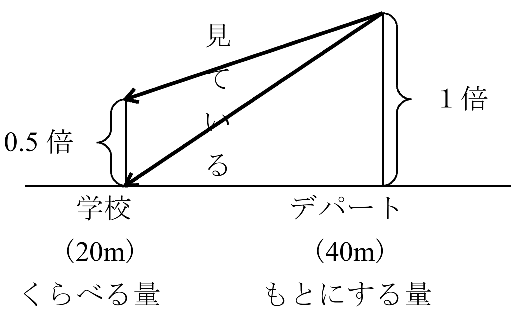
児童の活動	指導上の留意点と支援
１．課題を知る。 割合，比較量，基準量を含む文章表現について考えよう。	○課題を提示した後，第３時で提示した差で比べる場合と割合で比べる場合の線分図を提示する。
２．差の場合について，「～より」を用いた文章表現について考える。 	○学校(20m)とデパート(40m)に関して，双方向の見方に基づき，「～より」を用いた表し方について考えさせる。 ○見ている方が「もとにする量」であることを押さえ，「より」の前が基準量であることを掴ませる。



○差で比べる場合,「～より」の前が基準量であることを捉える。
「学校をもとにする量とした場合」
・学校よりデパートの方が 20m 高い。
・デパートの方が学校より 20m 高い。
・学校より 20m 高いのはデパート。
「デパートをもとにする量とした場合」
・デパートより学校の方が 20m 低い。
・学校の方がデパートより 20m 低い。
・デパートより 20m 低いのは学校。

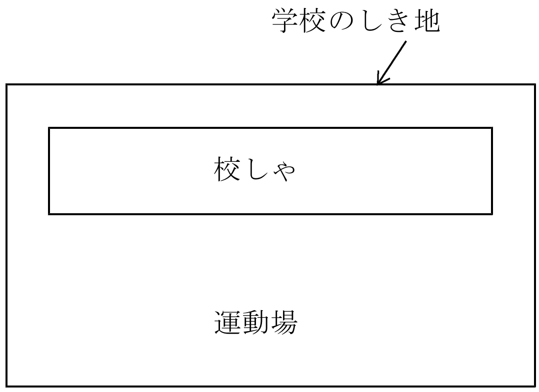
３．割合の場合について,言葉の使い方が分かる。「～の」,「～に対して」,「～を基にすると」,「～と比べると」,「～に関して」,「～の内」を用いた文章表現の使い方が分かる。





○「学校をもとにする量とした場合」と「デパートをもとにする量とした場合」について,割合で比べる場合の表し方を発表する。
「学校をもとにする量とした場合」

○「学校(20m)の２倍がデパート(40m):正しい文」,「デパート(40m)は,学校(20m)の２倍:正しい文」,「学校(20m)はデパートの２倍:間違った文」を示し,「学校(20m)の２倍」がセ

・学校(20m)の２倍がデパート(40m) ・デパート(40m)は, 学校(20m)の２倍 「デパートをもとにする量とした場合」 ・デパート(40m)の 0.5 倍が学校(20m) ・学校(20m)は，デパート(40m)の 0.5 倍	ットになっていることを捉えさせ，短い文「○○の△△倍が××」において，割合に着目するとき，割合の前の「の」の前が基準量であることを掴ませる。
○「学校(20m)の２倍がデパート(40m)」と「デパート(40m)の 0.5 倍が学校(20m) 」の文を「～に対して」「～を基にすると」「～と比べると」「～に関して」を使って書き換える。 ・学校(20m)に対して２倍がデパート(40m) ・学校(20m)を基にすると２倍がデパート(40m) ・学校(20m)と比べると２倍がデパート(40m) ・学校(20m)に関して２倍がデパート(40m) ・デパート(40m)に対して 0.5 倍が学校(20m) ・デパート(40m)を基にすると 0.5 倍が学校(20m) ・デパート(40m)と比べると 0.5 倍が学校(20m) ・デパート(40m)に関して 0.5 倍が学校(20m)	○同じ場面に対して「～に対して」，「～を基にすると」，「～と比べると」「～に関して」を用いた様々な文章表現ができることから，それぞれの文章表現が，「割合の前の「の」」に対応していることを捉えさせる。
○「学校のしき地」，「運動場」，「0.6 倍」，「～の内」という言葉を用いた文章を作る。 ・学校のしき地の内，0.6 倍が運動場 ・運動場は学校のしき地に含まれている。 ・学校の敷地を１とした場合，運動場は 0.6 に当たる。  	○「学校のしき地」と「運動場」の面積の関係を捉えさせるために，図で表現させる。 ○「部分―全体」の関係になっていることを掴ませ，問題場面は，「部分―全体」の関係にない問題場面と「部分―全体」の関係にある問題場面に分かれることを知らせる。
４．まとめる。 ○本時の感想を書く。	○机間巡視により，本時の理解度を知る。

(8) 第９時・第 10 時

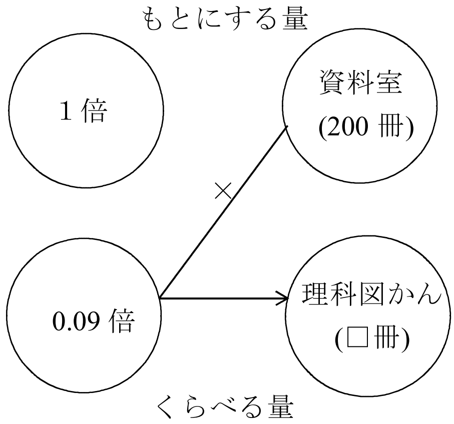
○第９時・第 10 時の指導に当たって

・　第８時までに，児童は，割合の問題を解く手順，倍，百分率，歩合の相互の関係，割合，比較量，基準量を含む文章表現について学習している。したがって，どの児童も，割合に関して慣れてきており，問題解決に対してかなり自信を持ってきていると考えられる。
・　本時は，第８時までの学習を受けて，児童の問題解決力をさらに高めるために，割合，比較量，基準量を含む文章表現の「○○の△△倍が××」という短い文への書き換え及び倍，百分率，歩合の換算を行う必要がある問題を解く。この活動は，２つの数量の関係の把握に関する問題解決として，まとめに位置する活動である。そのため，割合の問題を解く手順を再度確認することは重要である。また，これらの問題解決をやり遂げることにより，情意的側面に関する自信の向上が期待できる。
・　そこで，第９時・第 10 時を指導するに当たって，割合の問題に若干の抵抗を示す児童を中心に個別指導を行っていきたい。そこでは，特に，割合に着目したときの基準量の決定の仕方，短い文の書き方，比の関係図の書き方に焦点を当て，指導に当たっていきたい。

○第９時・第 10 時の学習展開

児童の活動	指導上の留意点と支援
〔第９時〕	
１．問題を解決する手順を確認する。 ①割合に着目し，「～に対して」等の言葉を捉える。 ②倍，百分率，歩合の換算を行い，「○○の△△倍が××」という短い文を書く。 ③比の関係図をかく。 ④割合，比較量，基準量の内，どれを求めるかを考え，立式する。 ⑤計算し，答を求める。 ⑥答を倍から百分率，歩合に換算する。	○割合の問題を解く手順を再度確認する。その際，「～に対して」等の言葉に着目して基準量を捉えること，百分率や歩合の換算を行い，倍を用いて短い文を書くこと，必要に応じて，答を倍から百分率，歩合に換算し直すこと等，既習事項を想起させる。
２．問題を解く。 (1) 資料室にある 200 冊の本のうち，９％が理科の図かんです。理科の図かんは，何冊ありますか。 ①割合に着目し，もとにする量を決める。 →もとにする量は，<u>資料室にある 200 冊の本</u> ②「○○の△△倍が××」という短い文を書く。 →<u>資料室にある 200 冊の本の 0.09 倍が理科図かん□冊</u>	○手順をしたがった問題解決の流れを理解できるように (1) の問題のみ全員で解くようにする。 ○手順にしたがって，問題解決を行っていけるように，基準量を書く欄，短い文を書く欄，比の関係図の枠，式を書く欄，答えを書く欄及び問題文を印刷したワークシートを準備する。

③比の関係図をかく。



④式を立てる。
200 × 0.09 ＝□

⑤計算し，答を求める。
200 × 0.09 ＝ 18　　　　18 冊

(2) たいきさんは，バスに乗りました。バスには 48 人乗っていました。これは定員に対して 0.6 倍です。バスの定員は何人ですか。
(3) 女の子が公園で 12 人遊んでいます。これは，公園で遊んでいる児童と比べて 4 割にあたります。児童は，全部で何人遊んでいますか。
(4) りんごの成分のうち，0.86 倍が水分だそうです。260g のりんごには何 g の水分が含まれていますか。

〔第10時〕
(5) 1週間前に生まれたねこがいます。このねこの体重を量ると 168g でした。168g は，生まれた直後の体重をもとにすると，160%にあたります。このねこの生まれた直後の体重は何 g ですか。
(6) ある店では，今日，牛乳を 144 円で売っています。この値段は，昨日の値段に対して 90%にあたります。昨日の牛乳の値段はいくらですか。
(7) ある車の旧型モデルは，45L のガソリンで 1395km を走ることができます。新型モデルは，旧型モデルと比べると 89%の量のガソリンで 1395km を走ることができるようになりました。新型モデルが 1395km を走るのに必要なガソリンは何 L ですか。

○手順にしたがって，問題解決を行っていけるように，基準量を書く欄，短い文を書く欄，比の関係図の枠，式を書く欄，答えを書く欄及び問題文を印刷したワークシートを準備する。

(8) みどりさんの学校の体育館の面積は $1040m^2$ で，バスケットボールのコートの面積は $364m^2$ です。体育館の面積に関して，バスケットボールのコートの面積の割合を求めましょう。 ３．まとめる。 ○本時の感想を書く。	 ○机間巡視により，本時の理解度を知る。

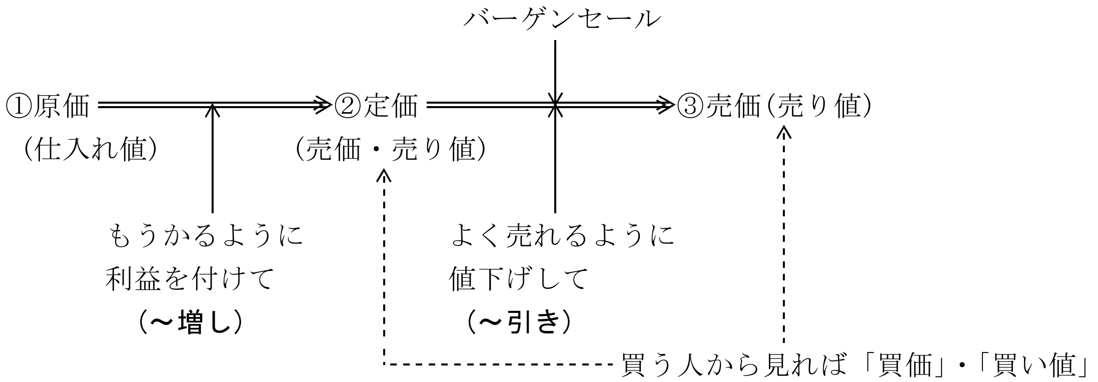
(9) 第 11 時・第 12 時

○第 11 時・第 12 時の指導に当たって

・ 本時までに，児童は，「割合，比較量，基準量を含む文章表現に関係なく，基準量を見出し，「○○の△△倍が××」という短い文を書き，比の関係図をかき，立式・計算・答を書く」という一連の手順の下，２つの数量の関係を把握する割合の問題を解決してきた。これらの学習を通して，児童の割合の問題に対する興味・関心は高まり，問題解決力も向上してきた。

・ 第 11 時・第 12 時では，日常生活で使われている「～増し(～の利益を付けて)」，「～引き(～安くして)」等が使われている問題場面を学習する。そのため，以下のような売買の流れ図を提示し，扱われる言葉，「～増し」，「～引き」等の意味を捉えさせる。また，「～増し」，「～引き」については，日常生活において馴染みのある言葉であるが，その意味の理解は難しいと考えられる。したがって，その習熟を図ることは重要であると考えられる。

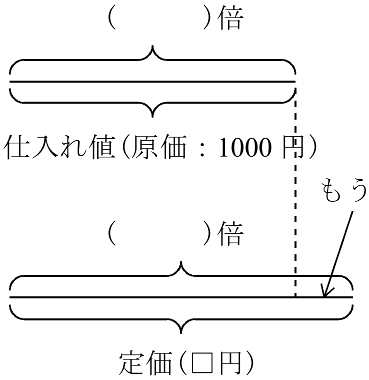
・ そこで，第 11 時・第 12 時を指導するに当たって，売買の流れ図により，売買の際の言葉とその意味を捉えさせていきたい。そのため，例えば「1000 円で仕入れた品物をもうかるように 1200 円の定価を付けました(線分図の使用)。」→「仕入れ値(原価)の何倍が定価か？(線分図の使用)」→「仕入れ値(原価)の 1.2 倍が定価(線分図の使用)」→「0.2 倍が利益(もうけ：200 円÷ 1000 円＝0.2)」→「①→②の問題：1000 円で仕入れた品物に２割増しの(２割の利益を付けて)定価を付けました。定価はいくらでしょう。」，または，「1000 円の定価の品物をよく売れるように 800 円の売り値を付けました(線分図の使用)。」→「定価の何倍が売り値か？(線分図の使用)」→「定価の 0.8 倍が売り値(線分図の使用)」→「0.2 倍が値引き（200 円÷ 1000 円＝ 0.2)」→「②→③の問題：1000 円の定価の品物を２割引きで売りました。売り値はいくらでしょう。」というような流れに沿って，児童とのやりとりを通して，売買の流れを理解させる。



①→②，②→③，①→②→③の内，どの問題かをよく考える。

また，手順にしたがって，問題解決を行っていけるように，以下のようなワークシートを準備する。

「①→②の問題：1000円で仕入れた品物に２割増しの（２割の利益を付けて）定価を付けました。
定価はいくらでしょう。」



１．割合に着目し，もとにする量を決める。
→もとにする量は，

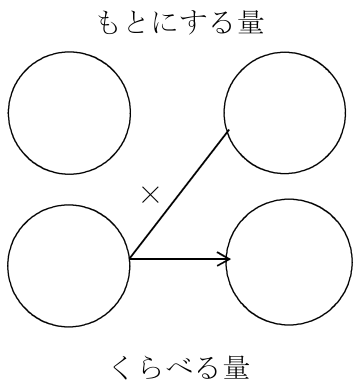
＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

２．「○○の△△倍が××」という短い文を書く。

＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

３．関係図をかく。

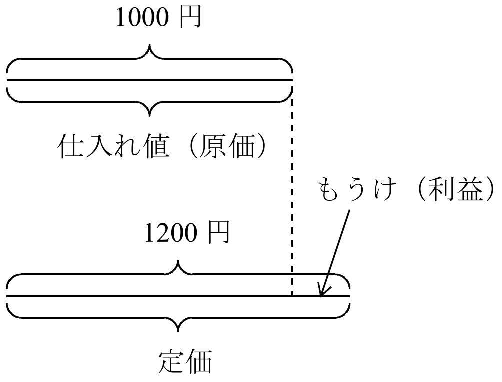


４．式を立てる。

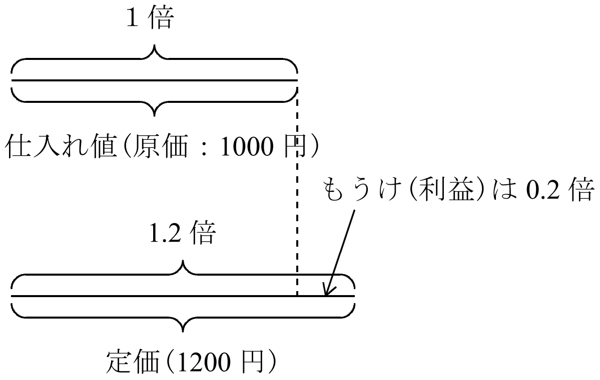
５．計算し，答を書く。

○第 11 時・第 12 時の学習展開

児童の活動	指導上の留意点と支援
〔第11時〕 １．課題を知り，売買の流れを考える。 品物の売買の流れを理解しよう。	○売買の流れ図を提示する。
○「品物の生産者→品物のおろし元→小売店→消費者」という品物の流れを知る。 ○売買の流れ図について考える。	○「品物の生産者→品物のおろし元→小売店→消費者」という品物の流れを押さえ，それぞれの言葉の意味を捉えさせる。特に，「～増し」，「～引き」という言葉の意味を捉えさせる。
２．売買の流れに関する問題場面が分かる。 ○「２割増し」の場合について考える。 「1000 円で仕入れた品物をもうかるように 1200 円の定価を付けました（線分図の使用）。」	○手順にしたがって，問題解決を行っていけるように，基準量を書く欄，短い文を書く欄，比の関係図の枠，式を書く欄，答えを書く欄及び問題文を印刷したワークシートを準備する。



→「仕入れ値（原価）の何倍が定価か？（線分図の使用）」

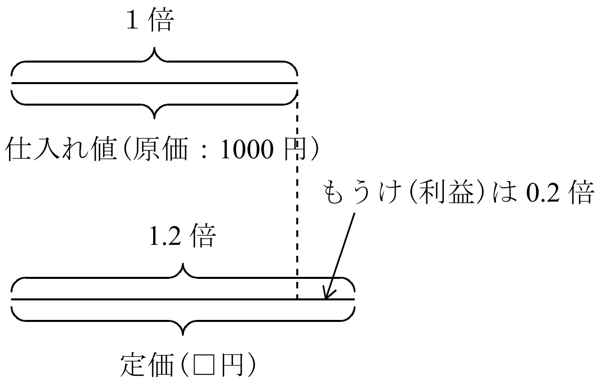


○黒板に，短い文・関係図を児童に書かせ，解決させる。

→「0.2 倍が利益（もうけ：200 円÷ 1000 円＝ 0.2 倍）」

○「仕入れ値（1000 円）の何倍がもうけ（200 円）か？」というとき，「200 円÷ 1000 円＝ 0.2 倍」と表されることを捉えさせる。

→「①→②の問題：1000 円で仕入れた品物に２割増しの（２割の利益を付けて）定価を付けました。定価はいくらでしょう。」

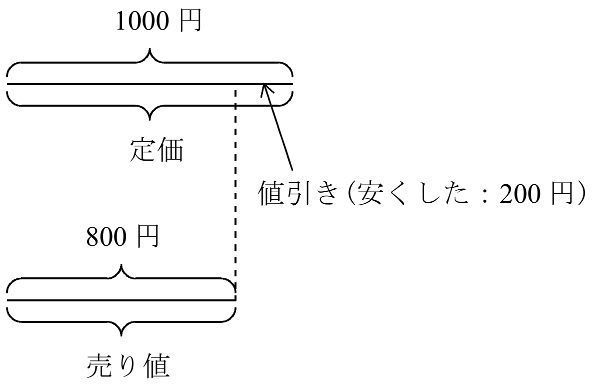


○「２割増し（２割の利益を付けて）」の場合，割合を 1.2 倍に修正しなければならないことを捉えさせる。

○問題解決に際しては，線分図と「何の２割増しか」ということから「基準量」を考えさせる。解決の手順については，短い文→関係図→立式・計算・答ということを示す。

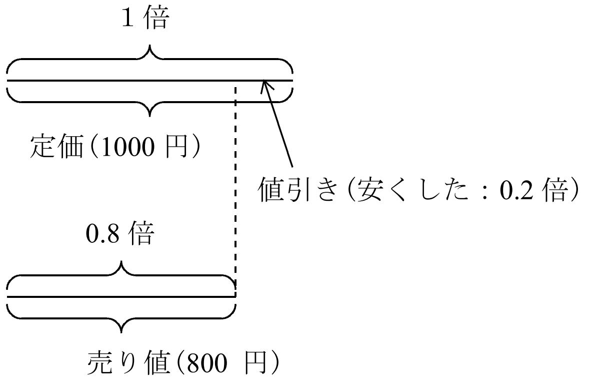
○「２割引き」の場合について考える。
「1000 円の定価の品物をよく売れるように 800 円の売り値を付けました（線分図の使用）。」

○手順にしたがって，問題解決を行っていけるように，基準量を書く欄，短い文を書く欄，比の関係図の枠，式を書く欄，答えを書く欄及び問題文を印刷したワークシートを準備する。



→「定価の何倍が売り値か？（線分図の使用）」

○黒板に，短い文・関係図を児童に書かせ，解決させる。



→「定価の 0.8 倍が売り値（線分図の使用）」

→「0.2 倍が値引き（200 円÷ 1000 円＝ 0.2）」

→「②→③の問題：1000 円の定価の品物を２割引きで売りました。売り値はいくらでしょう。」

○「定価（1000 円の何倍が値引き（200 円）か？」というとき，「200 円÷ 1000 円＝ 0.2 倍」と表されることを捉えさせる。
○問題解決に際しては，線分図と「何の２割引きか」ということから「基準量」を考えさせる。解決の手順については，短い文→関係図→立式・計算・答ということを示す。

〔第12時〕

３．売買の流れに関する問題を解く。

(1) ある店の大売り出しで，定価 1200 円の手ぶくろを２割引で売っています。値引きした売り値はいくらでしょう。
(2) ある店の大売り出しで，手ぶくろを定価の２割引して，960 円で売っています。定価はいくらでしょう。
(3) ある店の大売り出しで，定価 1200 円の手ぶくろを値引きして，960 円で売っています。何割引きしたのでしょう。
(4) 3000 円で仕入れたマフラーに 1200 円の利益を付けて定価を付けました。定価は仕入れ値の何倍ですか。
(5) 3000 円で仕入れたマフラーに利益を付けて 4200 円の定価を決めました。利益は，何割

○手順にしたがって，問題解決を行っていけるように，基準量を書く欄，短い文を書く欄，比の関係図の枠，式を書く欄，答えを書く欄及び問題文を印刷したワークシートを準備する。
○場面を把握できない児童に対して，売買の流れ図を基に，①→②，②→③のどの問題かを捉えさせる。
○定価を「２割引き」した値段を「２割増し」にすると定価に戻ると考えている児童が少なからずいると考えられる。そこで，個別指導を中心に指導を行うが，必要に応じて，一斉指導として，「２割引き」した時の基準量と「２割増し」する時の基準量が異なることを捉えさせる。

ですか。 (6) 仕入れたマフラーに４割の利益を付けました。利益は 1200 円でした。仕入れ値はいくらでしょう。 (7) ある店の大売り出しで，定価の 1000 円の品物を 700 円で売っています。何割引きしたのでしょう。 (8) 5000 円で仕入れたセーターに 7500 円の定価を付けました。利益は何割ですか。 (9) プラモデルを買いに行きました。どのプラモデルも定価の２割引きのバーゲンセールだったので，ぼくの買ったプラモデルは，700 円安くなりました。ぼくの買ったプラモデルは，いつもはいくらでしょう。 (10) 1600 円で仕入れた品物が，定価 2000 円で売られています。この品物には，何割何分のもうけがみこまれていますか。 (11) よしおくんは計算を 50 題しました。その内５題まちがえました。全体に対する正答の割合を求めなさい。 (12) 仕入れ値 500 円のプラモデルを 1000 円で売りました。何割の利益でしょう。 ４．まとめる。 ○本時の感想を書く。	○机間巡視により，本時の理解度を知る。

(10)第 13 時・第 14 時

○第 13 時・第 14 時の指導に当たって

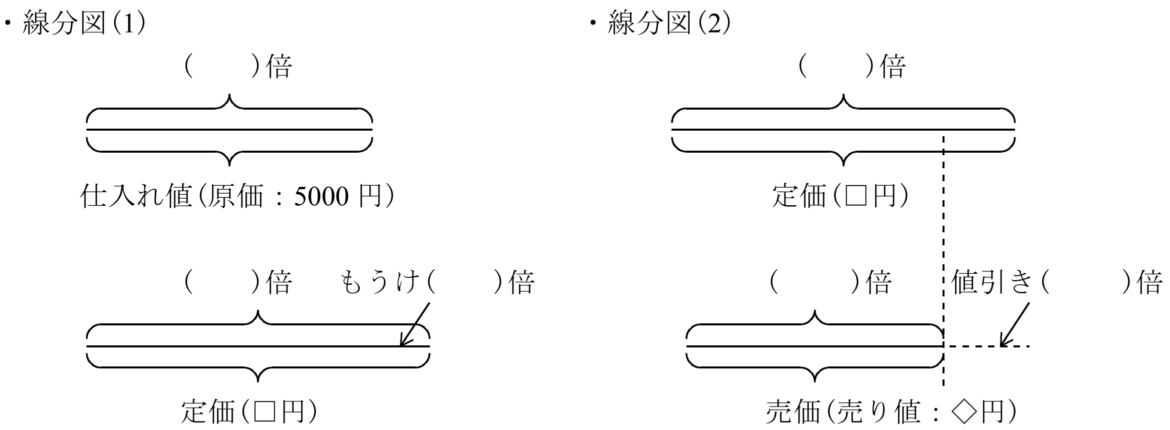
・ 第 11 時，第 12 時により，殆どの児童は，売買の流れに関する問題場面に対して理解を示している。しかし，売買の流れ図の①→②→③に関する割合が２つ入った問題場面においては，基準量が①→②と②→③で異なるため，問題場面を把握することに困難を示す児童もいると考えられる。

・ 本時の学習内容は，割合が２つ入った問題場面を取り扱う。このような問題場面は，日常生活において，多く見られる。特に，原価に利益を付けて定価を定め，定価から値引きをして売価を付けるということは，社会において，日常的に行われていることである。したがって，このような問題場面を取り扱うことは，重要であると考えられる。

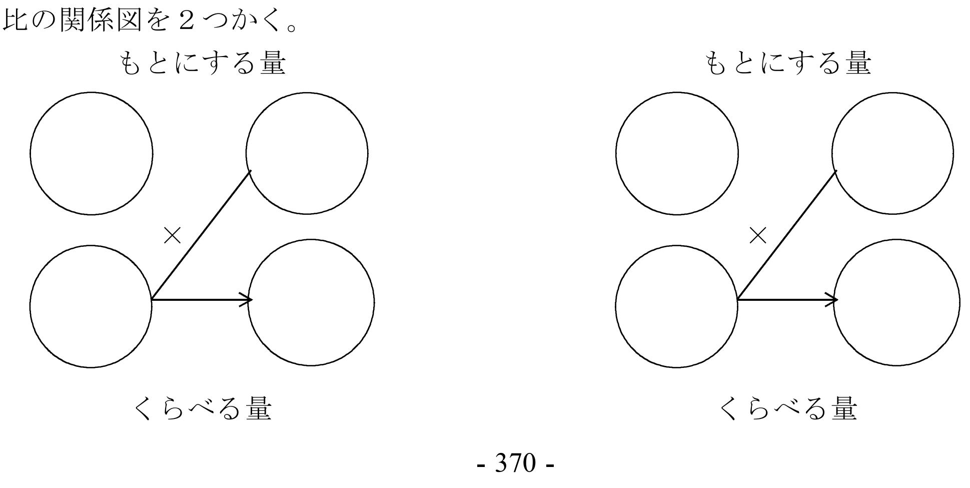
・ そこで，第 13 時・第 14 時を指導するに当たって，売買の流れ図を提示し，原価(仕入れ値)に利益を付けて定価を定めたこと，また，バーゲンセールなどで，定価から値引きをして売価(売り値)が付けられていることを捉えさせる。そして，定価を定めるときには，原価(仕入れ値)が基準量であること，定価から値引きをして付けられた売価(売り値)は定価が基準量であること，さらに，もうけは，売価(売り値)と原価(仕入れ値)の差であることを捉えさせるように指導していきたい。手順にしたがって，問題解決を行っていけるように，以下のようなワー クシートを準備する。

「5000円で仕入れたセーターに２割増しの定価を付けました。売れないので，定価の２割引きで売ることにしました。値引きをした売り値はいくらでしょう。」

１．線分図をもとに，もとにする量を決め，短い文を２つ書く。

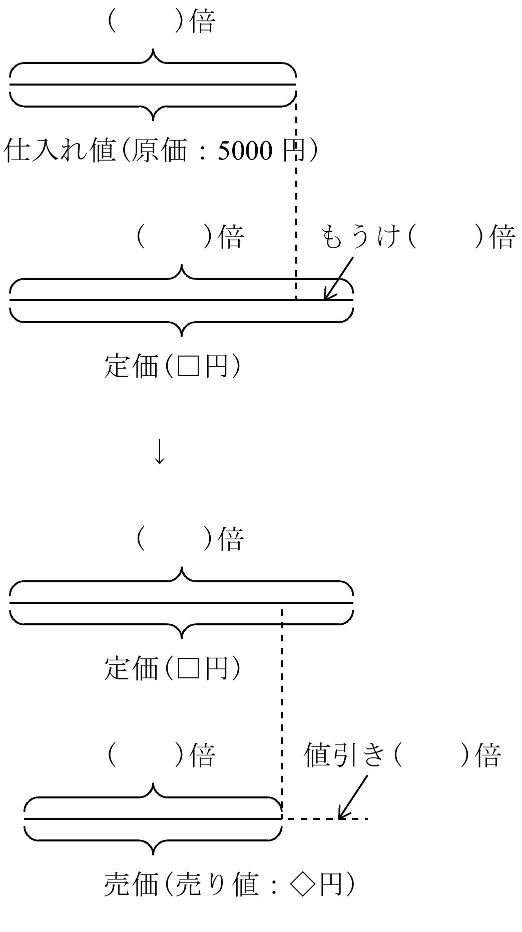


２．比の関係図を２つかく。



式・計算・答	式・計算・答

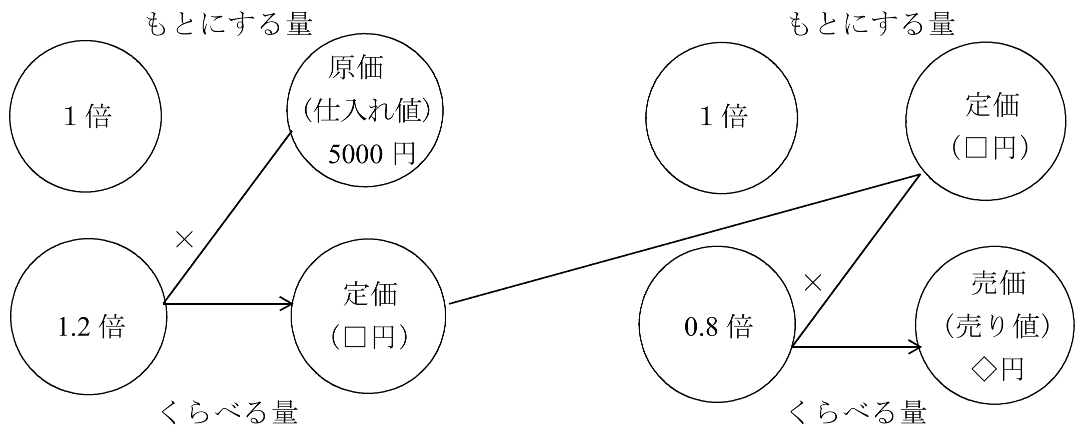
○第 13 時・第 14 時の学習展開

児童の活動	指導上の留意点と支援
〔第13時〕 １．課題を知る。 割合が２つ入った問題を考えてみよう。	
２．割合が２つ入った問題場面について考える。 ○問題場面について考える。 ・今までは，割合が１つ入った問題を解いてきた。 ・この問題は，割合が２つ入っている。 ・もとにする量は２つある。 ・短い文を２つ書かなければならない。	○「5000 円で仕入れたセーターに２割増しの定価を付けました。売れないので，定価の２割引きで売ることにしました。値引きをした売り値はいくらでしょう」という問題場面を提示し，「今までの問題とどこが違うか？」と問いかけ，割合が２つ入っていることを捉えさせる。
○線分図から，基準量を決める。  	○「割合が２つ入っているので，もとにする量はいくつあるか？」と質問し，基準量が２つあることに気づかせる。そして，短い文が２つ必要であることを捉えさせる。 ○「何の２割増しか？」，「何の２割引きか？」と質問し，それぞれ原価(仕入れ値)，定価が基準量であることを掴ませる。 ○線分図と関係図が対応するようにワークシートを作成する。

３．割合が２つ入った問題の解き方が分かる。
○線分図から短い文を２つ書く。
・原価(仕入れ値 : 5000 円)の 1.2 倍が定価(□円)
・定価(□円)の 0.8 倍が売価(売り値 : ◇円)
○短い文に対応する比の関係図を描く。

○２つの比の関係図において，同じ言葉を線で結ばせる。そして，定価をまず求め，それから，売価(売り値)を求めればよいことを掴ませる。
２つの比の関係図は，左から右へかくよう指示する。

・原価(仕入れ値 : 5000 円)の 1.2 倍が定価(□円)　・定価(□円)の 0.8 倍が売価(売り値 : ◇円)



〔第14時〕
○割合が２つ入った問題の解き方を確かめる。
(1) あゆみさんの学校の図書室にある本の内，３割が童話の本です。童話の本の内，６割が日本の童話で 1800 さつあります。図書室の本は何さつあるのでしょう。
(2) 兄弟２人でねん土を買いたいと思っています。兄は 300 円出します。これは定価の 60%です。弟は定価の 40%を出します。弟は何円出すのでしょう。
(3) ３年間の米のとれ高をくらべました。今年は昨年より 25%多くて 2000kg とれました。一昨年は昨年より 20%少なかったそうです。一昨年のとれ高は何 kg だったでしょう。
(4) 定価の 20%引きで，６才用の子供服を買い，4000 円はらいました。８才用も同じデザインがほしいと思って，お店の人に聞くと，安売りは６才用だけで，８才用の定価は，６才用の定価より 10%高いそうです。８才用の子供服の定価はいくらですか。
(5) たまごを 50 個買ってきました。そのうち 20%はおとなりにあげました。残りの 30%をケーキを作るのにつかいました。ケーキを作るのに何個使ったのでしょうか。
(6) サンダルを 1400 円で売ると４割の利益があります。売れないので３割引きで売りました。

○手順にしたがって，問題解決を行っていけるように，２つの短い文を書く欄，２つの比の関係図の枠，式・計算・答えを書く欄及び問題文を印刷したワークシートを準備する。
○基準量が変わることを意識できるように，２つの比の関係図において，同じ言葉を線で結ぶことを確認する。
○問題場面を把握できない児童に対して，基準量を捉えられるように，線分図を書くように指示する。

いくら利益がありましたか。または，いくら損をしましたか。 (7) さとうをたくさんいただいたので，20%をおとなりにあげました。残ったさとうの半分は，にまめを作るのに使いました。にまめを作るのに２ kg 使ったとすると，はじめ何 kg もらったのでしょう。 ４．まとめる。 ○本時の感想を書く。	○机間巡視により，本時の理解度を知る。

(11) 第 15 時・第 16 時

〇第 15 時・第 16 時の指導に当たって

・　本時に至るまでに，児童は２つの数量の関係の把握に関する場面において，割合を用いて問題を解決することができるようになっている。しかし，２組の数量の関係の比較に関する場面において，割合を用いて問題を解決することは未習である。日常生活において，２つの数量の関係を把握する場合，児童は質的に大小関係を把握することが多く，量的に差を求めることはあるが，割合を求めることは殆どない。２組の数量の関係を比較する場合も同様，児童は差による比較を行うことが多く，割合による比較を行うことは殆どない。そのため，割合の学習において，２つの数量の関係を把握する場合や２組の数量の関係を比較する場合に，乗法的な考えよりも加法的な考えの方を優先する。したがって，児童は，加法的な考えに基づいたミスコンセプションやプリコンセプションを有している。
・　日常生活において，２つの数量の関係を把握する場合や２組の数量の関係を比較する場合に，割合が用いられる。割合は，相対的な大きさを比べるときに積極的な意味がある。比較量÷基準量の値を求めるだけであれば，比較量が基準量の何倍かを示しただけである。したがって，倍と割合を明確に区別する立場から，２組の数量の関係を比較する場合を指導することは重要であると考えられる。２組の数量の関係を比較する場合として，確率比較課題が用いられることが多い。確率と割合は異なる概念であるが，確率を未習の児童は，割合を用いて確率比較課題にアプローチすることができる。この課題は，乗法的な考えに基づいて解決する必要があるが，当たりくじの数やくじ全体の数が等しい場合に限り，加法的な考えに基づいて解決することができる。
・　そこで，第 15 時・第 16 時を指導するに当たって，２組の数量の関係を比較する場合として，確率比較課題を取り上げる。確率比較課題において，大小比較を含めた加法的な考えと乗法的な考えの双方からアプローチした結果を全て取り上げることにより，くじ全体の総数が等しい場合，大小による比較や差による比較も認め，２組の数量の関係の割合による比較に気づかせたい。また，くじ全体の総数，当たりくじの本数，はずれくじの本数のいずれか１つが等しい場合，なぜ２組の数量の関係を大小よる比較や差による比較で判断すること可能なのかを考えさせる。これにより，割合の等価性の認識や２組の数量の関係の割合による比較の理解を深め，ミスコンセプションを修正したりプリコンセプションを発展させたりしていきたい。割合に関する概念的知識と手続き的知識を同時活性化させるために，数値を設定して割合を求める必要性を感じさることが重要であり，敢えて数値を含まない問題場面を設定する。

〇第 15 時・第 16 時の学習展開

第 15 時・第 16 時の学習展開は，第４章の「4.1　割合に関する２つの知識の同時活性化を図る授業の構築」を参照。

(12) 第 17 時・第 18 時

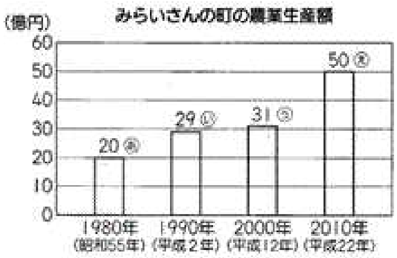
○第 17 時・第 18 時の指導に当たって

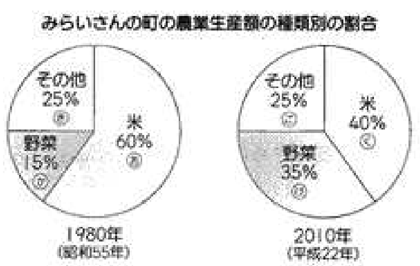
・　本時に至るまでに，児童は２つの数量の関係の把握に関する場面及び２組の数量の関係を比較する場面において，割合を用いて問題を解決することができるようになっている。特に，確率比較課題の解決を通して，当たりくじの数とはずれくじの数という「部分－部分」や当たりくじの数とくじ全体の総数という「部分－全体」に着目して解決すると共に，「部分－全体」に着目して解決することのよさについても理解している。帯グラフや円グラフに関して，他教科の学習において，児童は既にグラフの読み取りは行っている。しかし，２組以上の数量の関係を帯グラフや円グラフに表現することは行っていない。

・　本時では，割合のグラフとして，帯グラフと円グラフについて学習する。帯グラフや円グラフは，百分率を用いて「部分－全体」の関係を表している。したがって，帯グラフや円グラフは，全体に対する部分の相対的な大きさを表しており，２つの割合のグラフの比較において，割合（百分率）の大小関係と，部分や全体の数量の大小関係は一致していない。このように，帯グラフや円グラフを理解するためには，全体の数量を意識することが大切である。また，帯グラフや円グラフのそれぞれのよさを理解し，目的に応じて，グラフの使い分けができることは重要である。

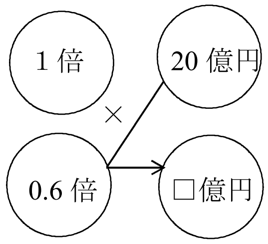
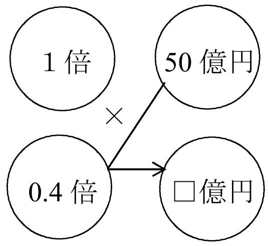
・　そこで，第 17 時・第 18 時を指導するに当たって，帯グラフや円グラフの読み取りにおいて，全体の数量と百分率から部分の数量を求めたり，部分の数量と百分率から全体の数量を求めたりするために，複数のグラフから読み取った情報を関係づけて問題解決をする場面を取り上げる。帯グラフや円グラフの作成において，部分と全体の数量から割合を求め，合計が 100%とならないときは，一番大きい部分を変えて 100%になるようにすることや，百分率の大きい順に並べ，その他は一番最後に並べることなど，グラフのかき方について丁寧に指導する。また，目的に応じた割合のグラフの選択を行い，帯グラフと円グラフのそれぞれのよさに気づかせたい。これらの活動を通して，「部分－全体」の関係における「比較量÷基準量＝割合」，「基準量×割合＝比較量」，「比較量÷割合＝基準量」を統合した考え方へと理解を深める。

○第 17 時・第 18 時の学習展開

<table>
<tr><th>児童の活動</th><th>指導上の留意点と支援</th></tr>
<tr><td>〔第17時〕</td><td></td></tr>
<tr><td>１．棒グラフと円グラフが表す内容について把握し，課題を知る。




・棒グラフは，農業生産額
・円グラフは，農業生産額の種類別の割合</td><td>○農業生産額を表したグラフは既習の棒グラフであり，年度ごとの変化が分かりやすいことを確認する。
○農業生産額の種類別の割合を表したグラフを円グラフと言うこと，また，円の半分が 50%を表すので，全体に対する部分の割合が一目で見てわかりやすいことを確認する。
○割合が減るとそれに対応する量も減ると考える児童がいると考えられるため，グラフから読み取った情報をもとに，児童の認識のずれを顕在化させ，本時の課題へとつなげるようにする。</td></tr>
</table>

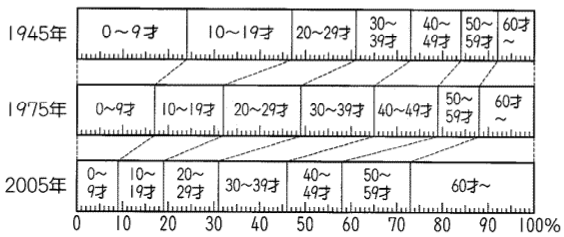
・農業生産額は，1980 年から 2010 年の間に 2.5 倍になっている。 ・1980 年では，米の生産額は野菜の生産額の 4 倍もある。 ・2010 年では，米の生産額は野菜の生産額と 5 %しか変わらない。 1980 年から 2010 年の間に，米の生産額は減ったと言ってよいでしょうか。	
2．1980 年と 2010 年の米の生産額を求め，正しいか正しくないかの判断をする。 【1980 年】  【2010 年】  20 × 0.6 ＝ 12　　12 億円 50 × 0.4 ＝ 20　　20 億円 ・米の生産額は増えているので，正しくない。	○正しいか，正しくないかの判断に関して，その訳を言葉や式を用いて，詳しく説明するようにさせる。 ○全体が 100%なので，百分率を小数に換算して全体を１倍とし，「部分－全体」の関係を比の関係図に表すように指示する。
3．判断した根拠について話し合い，円グラフの意味について理解する。 ・１倍(100%)にあたる農業生産額全体は棒グラフから読み取れる。 ・0.6 倍(60%)という割合は円グラフから読み取れる。 ・円グラフは割合だけが表されているから，全体の量が異なるときは，円グラフから読み取れる百分率だけで判断することはできない。	○比の関係図に記入した数値をどのグラフから読み取ったかを確認することにより，２つのグラフを関係づける必要があることを意識させる。 ○円グラフは，全体に対する部分の相対的な大きさを表しており，２つの割合のグラフの比較において，割合(百分率)の大小関係と，部分や全体の数量の大小関係は一致していないことを確認する。
4．まとめる。 ○本時の感想を書く。	○机間巡視により，本時の理解度を知る。
〔第17時〕 1．帯グラフから，場所ごとのけがをした人数の割合を読み取り，問題を解決する。  中庭でけがをした人は 15 人です。ろうかでけがをした人は何人ですか。	○場所別のけがをした人数の割合を表したグラフを帯グラフと言うことを確認する。 ○「部分－全体」の関係から全体の人数を求める児童が多いと考えられる。そこで，早く解決できた児童には，「部分－部分」に着目した別解を考えるように指示する。

・運動場：46%　・中庭：30%　・体育館：８%
・ろうか：６%　・その他：10%

① 15 ÷ 0.3 ＝ 50　　　② 30 ÷ 6 ＝ 5
50 × 0.06 ＝ 3　　　15 ÷ 5 ＝ 3
３人　　　３人

２．複数の帯グラフから読み取れる傾向について話し合い，帯グラフを用いるよさについて考える。

日本の年れい別人口　（総務省統計局調べ）



・60 歳以上の割合が増えている。
・20 歳以下の割合が減っている。
・少子高齢化が進んでいると言える。

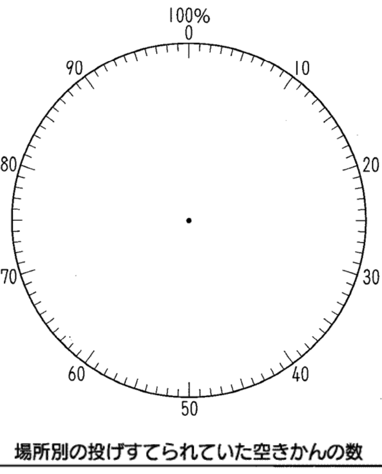
○円グラフ同様，帯グラフも全体に対する部分の相対的な大きさを表しており，２つの割合のグラフの比較において，割合(百分率)の大小関係と，部分や全体の数量の大小関係は一致していないことを確認する。
○割合が変わっていない年齢に着目させ，帯グラフでは，同じ項目を結ぶ線が平行なことを確認し，平行でない場合は割合が変わっていると一目で判断できるというよさにに気づかせる。

３．円グラフや帯グラフをかく。

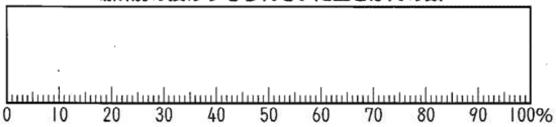
場所別の投げすてられていた空きかんの数

場所	道路	公園	川原	海岸・湖岸	ハイキング道	合計
こ数(百万こ)	561	144	125	119	51	1000

場所別の投げすてられていた空きかんの数



場所別の投げすてられていた空きかんの数



○部分と全体の数量から割合を求め，百分率に表した場合に整数となるように，1/10 の位を四捨五入すること，合計が 100%とならないときは，一番大きい部分を変えて 100%になるようにすること，百分率の大きい順に並べ，その他は一番最後に並べることを確認する。
○児童がグラフを書きやすいように円グラフと帯グラフの枠を用意しておく。

４．まとめる。
○本時の感想を書く。

○机間巡視により，本時の理解度を知る。