ε-δ 論法における運動の概念について
――認知意味論的考察――

中　島　信　夫

はじめに

数学，特に解析学における概念の一般的説明では，「無限に大きくなる」，「段々と小さくなる」，「限りなく近づく」などのような運動を表す表現が広く用いられる。しかし，そうした直観にもとづく表現では極限とか連続性といった概念の厳密な定義ができないので，ε-δ 論法による厳密な定義が考え出されたと言われている。そしてこの論法では概念の動的な捉え方は廃され静的な捉え方がされているという。

本稿では，まず Núñez and Lakoff (1998), Lakoff and Núñez (2000)，Núñez (2005) の主張をもとに極限と連続性の概念が ε-δ 論法の考え出される前と後でどのように変わったかをたどり，ε-δ 論法後でも数列の極限の概念化に関しては運動の概念がまだ有用であるという彼らの主張を確認する。そして，その後で，日常言語における運動の記述をもとに彼らの運動概念を用いた極限の概念化がどのようなものであるかを考察する。

1．極限および連続性と ε-δ 論法

この節では Lakoff と Núñez の考え方を参照しながら，数学の一分野である解析学において，極限（limit）とか連続性（continuity）の定義ないし解説で運動の概念がどのように扱われているかをまず見て，そのあとで ε-δ 論法の仕組みにつて考える。

1.1　数列の極限の場合

数学において直観的に動的な捉えられ方がなされるものに数列がある。例えば $\{x_n\}=n/n+1$ という数列は，自然数から実数への関数であるが，直観的には自然数の列 1, 2, 3, ..., n, ...∞ をたどって行くのに対応して，次のような実数列が「極限値 1 に限りなく近づいていく（approach indefinitely）」といったように捉えられる（Courant and Robbins 1996：292)。

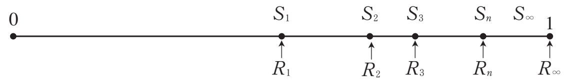
(1)　1/2, 2/3, 3/4, 4/5, 5/6, ..., $n/(n+1)$, ..., 1

これは“$n/(n+1)\rightarrow 1$ as $n\rightarrow\infty$”あるいは“$\lim_{n\to\infty} n/(n+1)=1$”のように表記される。

Lakoff and Núñez (2000：186-197)，Núñez (2005) は，「数は直線上の点である」というメタファーをふまえて，こうした「限りなく近づく」という運動を無限メタファー（the Basic Metaphor of Infinity）と虚構移動のスキーマ（fictive motion schema）によって説明している[1)]。その考え方によると，我々がすでに持っている「行為とか状態の繰り返し過程（iterative processes)」の概念がまず数列に写され，数列上に二つの連動した運動が作られる。一つは 1 から始まり∞に向かう運動で S_n で表され，もう一つは数直線上の 1/2 の点から始まり極限値 1 に近づいていく運動で R_n で表される[2)]。

- $S_1=\{1/2\}$, $S_2=\{1/2, 2/3\}$, $S_3=\{1/2, 2/3, 3/4\}$, ..., $S_n=\{1/2, 2/3, 3/4, \ldots n/n+1\}$, ...
- $R_1=\{r：0<r<1/2\}$, $R_2=\{r：0<r<1/3\}$, $R_3=\{r：0<r<1/4\}$, ..., $R_n=\{r：0<r<1-n/n+1\}$, ..., $R_\infty=\varnothing$

R_n は極限との距離を表しており，S_n が限りなく無限に向かって進むに従って距離がゼロ近づく。S_n と R_n とは，「ステージ S_n における距離 R_n（the distance R_n at the stage S_n)」という関係で，関数としての数列 $\{x_n\}$ にもとづく。この二つの列を数直線上に表すと次のようになる[3)]。

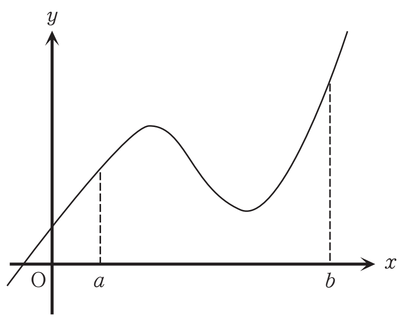


図－1

ここで，列 S_n と列 R_n は何か動くものを想定し，それが移動した軌跡上の点として表されているが，軌跡を作ったと想定されるそのような移動を虚構移動という。そしてその虚構移動によって「n が無限に近づくにつれて実数列が極限値 1 に限りなく近づく」という運動が表現される。

1.2　関数の連続性の場合

一般に関数は移動する点の軌跡として理解される。例えば $y=f(x)$ で表される関数は，x が a から b までの値をとったとき，x, y を座標軸とする平面上を移動する点（x, y）の軌跡である曲線（グラフ）として捉えられる。



図－2　$y=f(x)$ を表す曲線（グラフ）

関数のこのような理解の根底には，曲線という静的なものを（それをたどる）運動を表すものと捉える前節で見た「虚構移動」という認知の仕組みがあると考えられる（Núñez and Lakoff 1998: 89）。このような考えは，日常言語でハイウェイという曲線状のものを次のように表現するという事実にもとづいている。

(2)　a．High way 101 goes to Los Angeles.
　　b．After crossing the bay, Highway 80 reaches San Francisco.
　　c．Just before reaching the border, that highway goes through several tunnels.

このような表現では，ハイウェイは "The bus goes to Los Angeles.", "Our car reached San Francisco." などにおける移動物体と同等に扱われているが，これは2点を結ぶ曲線であるハイウェイを用いてその曲線上の移動を表している。関数や数列の理解もこのような虚構移動をもとにしていると考えられる。

関数の連続性は，関数を表す曲線に切れ目（gap）がないこととして捉えられ，正確には関数の極限値を使って定義される。

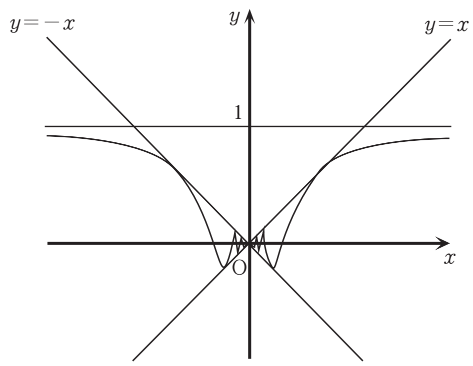
(3)　連続関数の定義：関数 $y=f(x)$ が $x=a$ で連続とは極限値が関数値 $f(a)$ と等しいとき連続である。（これは $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$ のように表される。）

この定義を数列の極限と同様に極限を「近づく」という表現を使って言い換えると，「x が左右いずれの方向から a に限りなく近づいても，$f(x)$ が $f(a)$ に限りなく近づくならば，この関数が $x=a$ で連続である」と表現できる。

1.3　ε-δ 論法による静的（static）な記述

極限とか連続という概念の「限りなく近づく」という言葉による説明や定義は，直観的には理解しやすいが，意味が必ずしも明確でないという問題がある（Courant and Robbins 1996: 290）。つまり，「限りなく」とは一体どういうことか，あるいは，そもそも「近づく」という日常的には当たり前の言葉の意味を数学での論理を展開していく上でどう定義し表現したら良いかということが問題となる。数列の場合にはすでに見たような形で表現できるが，「切れ目のない軌跡」として捉えられた関数の場合，「限りなく近づく」という連続した運動の表現がはっきりしない。さらに，「x が a に限りなく近づくとき，$f(x)$ が $f(a)$ に限りなく近づく」といった表現では捉えられない関数が存在する。例えば次のような関数がそうである。

(4)　$f(x)=x\sin 1/x$　for $x\neq 0$
　　　$=0$　　　　for $x=0$



図－3　$f(x)=x\sin 1/x$ のグラフ

この(4)の関数は，グラフの示すように，x が0に限りなく近づくとき，$f(x)$ は $f(0)=0$ を中心に振動しており，極限値0への近づき方は図－2におけるような近づき方ではない。

そこで考え出されたのが，いわゆる ε-δ 論法による定義である。この定義によると，まず関数 f の a での極限値 L は次のよう実数上を走る ε, δ の二つの変数を用いて定義される（Núñez and Lakoff 1998: 96）。

Let a function f be defined on an open interval containing a, except possibly at a itself, and let L be a real number. The statement

$$\lim_{x\to a} f(x)=L$$

means that for every $\varepsilon>0$, there exists a $\delta>0$ such that if $0<|x-a|<\delta$, then $|f(x)-L|<\varepsilon$

これを論理式で表すと次のようになる。

(5)　$\lim_{x\to a} f(x)=L$

$\Leftrightarrow\ \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x[0<|x-a|<\delta$

$\to|f(x)-L|<\varepsilon]$

この極限の定義を用いて関数の連続性は次のように定義される。

ε-δ 論法（ε-δ definition of continuity）

（Núñez and Lakoff 1998：96）

A function f is continuous at a number a if the following three conditions are satisfied:

1. f is defined on an open interval containing a,
2. $\lim_{x\to a} f(x)$ exists, and
3. $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$

これを論理式で表すと次のようになる（f は a で常に定義されているので，条件 $0<|x-a|$ がある場合とない場合とは同値となる）。

(6)　$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$

$\Leftrightarrow\ \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x[|x-a|<\delta$

$\to|f(x)-f(a)|<\varepsilon]$

このような ε-δ 論法の表現は，「近づく」といった動的（dynamic）な概念を含まない静的（static）なものになっている（Courant and Robbins 1996：306, Lakoff and Núñez 2000：93）。その内容は，任意に ε を取った y 軸上の開区間（$f(a)-\varepsilon$, $f(a)+\varepsilon$）の中に x 軸上の開区間（$a-\delta$, $a+\delta$）を y 軸上に写像したもの入れることができる，というものである。つまり，開区間はそれぞれ $f(a)$ の ε 近傍（neiborhood）（$U_\varepsilon(f(a))$），a の δ 近傍（$U_\delta(a)$）と呼ばれるもので，これらの近傍を用いると関数の連続性は次のように言い換えることができる。

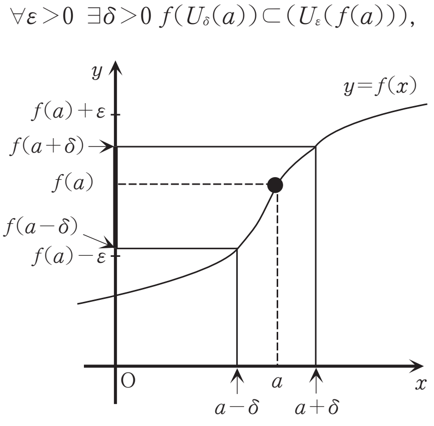
(7)　$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$

$\Leftrightarrow\ \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ f(U_\delta(a))\subset(U_\varepsilon(f(a)))$,

where $U_\varepsilon(f(a))=\{y : |y-f(a)|<\varepsilon\}$,

$U_\delta(a)=\{\mathrm{x} : |x-a|<\delta\}$

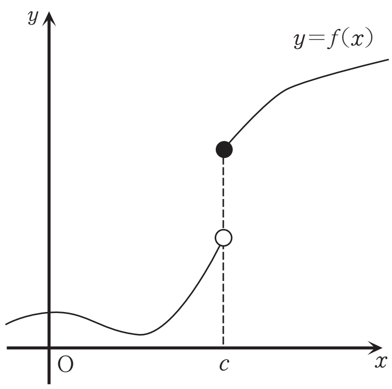
$f(U_\delta(a))=\{y : f(a-\delta)<y<f(a+\delta)\}$.



図－4

この(7)を図示すると図－4 のように $|x-a|<\delta$ となる x について $f(x)\in f(U_\delta(a))$，つまり "$f(a)-\varepsilon<f(a-\delta)<f(x)<f(a+\delta)<f(a)+\varepsilon$"，となる。

このような定義だと，(4)の振動するような関数でも，振幅は段々と縮小して 0 になるので $x=0$ で 0 に収束することになる（$\lim_{x\to 0} x\sin 1/x=0$）。しかし，次のような c 点で跳躍がある不連続な関数では ε-δ 論法の定義式は成立しない。



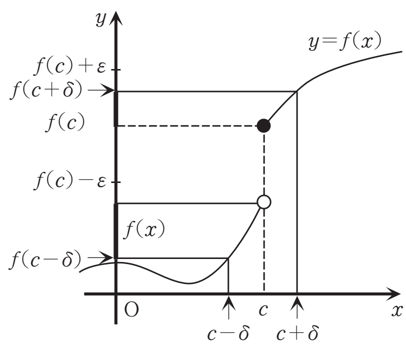
図－5

これは，定義式の否定(8)が成り立つということで，ある ε ではどのような δ を取ろうとも開区間（$f(c)-\varepsilon$, $f(c)+\varepsilon$）の中に入りきらない $f(x)$ が出てくる。

(8)　$\exists\varepsilon>0\ \forall\delta$

$>0\ \exists x[|x-c|<\delta\wedge|f(x)-f(c)|>\varepsilon]$

これを図示すると次のように $|x-c|<\delta$ となる x のなかに $f(x)\notin U_\varepsilon(f(c))$ となるものがある。つまり "$f(c-\delta)<f(x)<f(c)-\varepsilon$" となっている。



図－6

この ε-δ 論法は，x 軸を実数ではなく自然数とすれば数列の極限の定義にも用いることができる。

(9)　$\lim_{n\to\infty}\{x_n\}=\mathrm{L}$

$\Leftrightarrow\ \forall\varepsilon>0\ \exists m\in\mathbf{N}[\forall n\ \ n\geqq m\rightarrow|x_n-L|<\varepsilon]$

この定義は⑺と同じように，区間（$L-\varepsilon,\ L+\varepsilon$）の中にある数列の項の内に x_m とそれより大きい項はすべて含まれると言っている。

⑽ $\forall\varepsilon>0\ \ \exists m\in\mathbf{N}\{x_n|x_m\leqq x_n\}$
$\subset\{x_n|L-\varepsilon<x_n<L+\varepsilon\}$

この ε-δ 論法による数列の極限の定義は，図－1で示したような「限りなく近づく」といった運動の概念は含まない静的なものである。

1.4 直観的な概念化と ε-δ 論法における概念化

以上をまとめると，関数の連続性は，直観的な捉え方では切れ目のない点の運動の軌跡として理解されるのに対し，ε-δ 論法論法では「近さ（closeness）」に基づいた近傍の概念によって理解される。つまり，関数 $f(x)$ が a で連続とは，a の δ 近傍の写像が常に $f(a)$ の ε 近傍の中に収まっているということである。従って，同じ連続性でも直観的な捉え方と ε-δ 論法による捉え方とは全く異なっており，一般に行われているように運動の概念でもって ε-δ 論法を理解しようとするのは間違った理解の仕方ということになる（Lakoff and Núñez 2000：200）。

それでは，ε-δ 論法があれば運動による捉え方は不要かというと，Lakoff and Núñez（2000）はそうではないと言う。すでに見たように数列の極限は運動の概念によって正確に捉えることができるし，関数の極限も数列の極限によって捉えることができるので，そうした捉え方では運動の概念も有用であるという（Lakoff and Núñez 2000：198-200）。そうした捉え方ができるのは，次の(11a)と(11b)の主張が同値になるからである[4)]。

⑾ a． $\lim\limits_{x\to a}f(x)=L$

b． $x_n\neq a$ で x_n は関数 f の定義域内にあり極限が $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ である任意の数列 $\{x_n\}$ について次が成り立つ：$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=L$

つまり関数の極限は数列の極限で言い換えることができるので図－1のような「限りなく近づく」という運動記述により関数の連続性が表現できるというわけである。

2．日常言語における運動の記述

2.1 主体化（subjectification）と運動記述

直観的な理解では，関数は点が運動した軌跡として捉えられることを見たが，この節では，そうした捉え方と日常言語における運動の記述の仕方との関連を見てみる。例えば，新幹線が京都に向かって走っているのを見た場合，(12a)のように言うことができる。その新幹線に話し手自身が乗っている場合，((12a)も可能であるが,)（12b)のように主語を we にして話し手自身を明示した言い方ができる[5)]。

⑿ a． The bullet train is approaching Kyoto.

b． We are approaching Kyoto.

その場合，記述の視点を発話の場所ではなく，別のところに設定して話し手自身の運動が記述されている。次の例では，視点は発話の場所であるが，話し手の実際の運動を記述するのではなく，自身の想定された運動の記述になっている。

⒀ あの園芸店に向かうには，その交差点からさらに南へ二ブロック走り，南丸山交番のある交差点で菊水旭山公園通りを右折するのがいい。坂道を少し上って行くと，山麓通りに出るのだ。

（佐々木譲「真夏の雷管」）

次の例でも，話し手，あるいはある主体の運動を想定した表現になっているが，この場合は，経路である「道路」についての記述の形になっている。

⒁ いま佐伯たちの車は，鉄工団地通りを市街地方向に向けて走っている。ちょうど左手に札幌競馬場がある。<u>道路はこの先で南におれ，函館本線の高架をくぐって，札幌市街地の西側に出る。北五条通りに出たところで左折すると，一キロ少々で札幌駅前に着くのだ。</u> （佐々木譲「真夏の雷管」）

これは前節でみた虚構移動表現の一種であり，このような記述では，次のように時間表現によって運動の時間的経過が表現されることがある。

⒂ a． The highway runs along the shore <u>for a while</u>.

（松本 1997：209）

b．そのハイウェイは海岸沿いを<u>しばらく</u>走る。

（松本 1997：209）

⒃ 北要採石鉱業の本社から五分ほど南西方向に走った。北海道道八二号線，通称左股（ひだりまた）線という幹線道路を，山に向かうようにだ。……八二号線は<u>やがて</u>盤渓（ばんけい）峠を越えて，札幌の南部，豊平川の作る谷の方向に出る。

（佐々木譲「真夏の雷管」）

これとは逆に，ある特定の場面とか状況における経路についてではなく，次のように経路についての一般的記述の場合もある。

⒄ a． High way 101 <u>goes to</u> Los Angeles. ＝(2a) b．この山麓を，等高線に沿うように北海道八九号線，別名藻岩山山麓通りが走っており，この道路の両側の斜面に，住宅街が拓（ひら）けている。（佐々木譲「真夏の雷管」）

点の軌跡としての関数の捉え方は，このような虚構移動表現が基になっていると考えられる。

次はヴァネッサと話し手の位置関係を across を用いて表したものである[6]。

⒅ a．Vanessa is sitting across the table from me.

b．Vanessa is sitting across the table.

(18a)は(12b)と同じように視点を発話の場所から別のところに移した記述であるが，(18b)は発話の場所を視点にして目の前にいるヴァネッサを描写した表現で，話し手自身は明示されない。この(18b)に対応する（新幹線に乗っているときの）運動表現としては次のものが考えられる（本多 2005: 26）。

⒆ Kyoto is approaching.

これは，「移動する話し手にとっての対象の見え」を記述することによって自身の運動を表現しており，話し手自身は明示されていない。このような表現方法は，乗り物に乗って移動するときの描写にしばしば見られる。

⒇ 駅舎の前に並ぶ手動の転轍機。犬釘を打った枕木。錆びたレールの貨物ヤード。昔から少しも変わらぬ幌舞の風景が，少しずつ動き出した。（浅田次郎「鉄道員」）

英語でも同じような表現が可能で，次はタクシーに乗っている場面である。

(21) 'That's Seven Mile Beach,' Avery said. 'One of the most beautiful and most famous in the world. Sand as white as sugar. Warm, clear water. Warm, beautiful women.'

Mitch smiled and watched the hotels pass.

（J. Grisham *The Firm*）

次は飛行機の中からの描写で，かなり多彩な運動が記述されている。

(22) ボーイング７６７は，その島を右手に見ながら，さらに高度を下げていった。やがて島は，飛行機の前方に隠れた。機は真正面の位置に島を置いたようだ。最終の着陸の態勢に入ったのだろう。

海面がどんどんと近づいた。海の上に着陸でもするのか，と思っているうちに，」窓の外に緑が見え，建物が走り，道路や車の列が見えた。飛行機は滑走路に機体を落として，鈍い衝撃音をあげた。（佐々木譲「ネプチューンの迷宮」）

乗り物に乗っている場合，移動する主体はある意味静止しているとも言えるが，次の例では，実際に自ら移動している主体からの見えの変化が記述されている。

(23) a．The fence gets higher as you go towards the back of they yard.（Sweetser 1997）

b．直樹は思いきって，うすぐらい林のおくへはいっていった。

と，ふいに，ぽっかりと林はおわり，直樹はあれはてた門の前に出た。

（松谷みよ子「ふたりのイーダ」）

これらの例でも，移動する主体は明示せずに見えの変化によって移動を記述している。さらに次の例では，見えの変化だけが記述されており，移動主体は単に想定されているだけである。

(23) There is a house every now and then through the valley.（Talmy 1988）

(24) a．On the southern outskirts of the city, where the fields began and the houses became shabbier and more tumbledown, the ruins of a small amphitheatre lay hidden in a clump of pine trees.

（M. Ende *Momo* tr. by J. M. Brownjohn）

b．大きな都会の南のはずれ，市街地がつきて原っぱや畑がはじまり，家々のたたずまいもだんだんわびしくなってくるあたりに，松林にかくれるようにして小さな円形劇場の廃墟がありました。（大島かおり訳）

例えば，(23)の例は，次のような「知覚者の運動」を想定することによって理解される（本多 2005: 27）。

(25) John ran through the valley.

⒆から(24)の例に見られる主体の運動記述は，主体についての直接的記述ではなく知覚者としての主体から見た知覚の変化を記述することによって，自身の運動を表そうとするものである。次にこうした運動記述は何に由来するかを見てみる。

2.2　知覚の継起関係と運動

事態間の関係を表す接続詞には種々のものがあるが，その中の「と」という語の表す関係で，特に次のような特定の事態間の関係を表す場合について見てみる[7]。

(26) a．角を曲がると，ジャンバーを着た男が立っていた。

b．家の裏にまわると，勝手口があった。

c．長嶺は壁の町内地図に近寄ると，先日と昨夜の，ふたつの火災現場の位置を指で示して言った。

（佐々木譲「制服警官」）

このような「と」で結ばれた事態間の関係で興味深い点は，二つの事態が同じ場所で生じたものでなければならないことである。従って，(27a)は適切であるが，「と」の前と後の事態が別々の場所で生じている(27b)は不自然である（久野 1973: 177)。

(27) a．太郎が学校に着くと，花子が学校に訪ねて来た。

b．＊太郎が学校に着くと，花子が家に訪ねて来た。

「とき」とか「あと」の場合はこのような制限はなく，次のような例は多少状況が設定しにくいものの(27b)のような不自然さはない。

(28) 太郎が学校に着いたとき/あと，花子が家に訪ねて来た。

また，「とき」とか「あと」は推移的な関係で，例えば「後」の場合，次の(29a)と(29b)が成り立てば(29c)も成り立つが，「と」の表す関係はこのような推移的関係では無い。

(29) a．顔を洗ったあと着替えをした。

b．着替えをしたあと朝ご飯を食べた。

c．顔を洗ったあと朝ご飯を食べた。

例えば，次の例から(31a)と(31b)の二つの「と」による関係を取り出すことができる。

(30) 幸右衛門は顔を伏せて，通行人とすれ違い，今度は左に折れて亀井町の町通りに入ると，途中から狭い路地に曲がった。奥に木戸をかまえた裏店があった。幸右衛門はためらいのない足どりで木戸をくぐると，裏店の中程にある一件の家の前で足をとめ，戸をあけるとするりと土間に入りこんだ。

（藤沢周平「ささやく河」）

(31) a．亀井町の町通りに入ると，途中から狭い路地に曲がった。

b．狭い路地に曲がると，奥に木戸をかまえた裏店があった。

しかし，この二つの関係が成り立っても次の関係は成り立たない。

(32) 亀井町の町通りに入ると，奥に木戸をかまえた裏店があった。

「と」が繋ぐ二つの事態は空間的に連続していなければならないが，(32)では連続性が途切れてしまうのである。

英語には「と」のような接続詞はないが，when の一部の用法が「と」に対応している[8]。次の例のように，when が be about to V when/ be V-ing when/ have V-en when という形をとる構文で用いられると，主節の事態に続いて when 節の事態が生じたという継起関係を表し，「と」の構文と同じような解釈になる。

be about to V when の形：

(33) Before I could find the peach she had seen overhead she had pulled the limb down and reached for it. I was about to help her get it when suddenly she dropped the peach she was holding and cried out.（彼女がそれを取るのを手伝おうとすると，突然……）

(E. Caldwell *The Visitor*)

be V-ing when の形：

(34) Mrs. Miller had finished drying the supper dishes and was thumbing through an afternoon paper when she saw an advertisement of a picture playing at a neighborhood theater.（夕刊をめくっていると，……）

(T. Capote *Miriam*)

have V-en when の形：

(35) I had already opened my mouth to call out, “Gigi”, when suddenly a thick woman waddled over to him and locked him in her arms.（“Gigi” と叫ぼうと口を開けると（とたん），突然……）

(I. B. Singer *The Son*)

こうした場合，「と」の構文と同じく when 節は新情報を表し，主節の時制と独立した時制を持つ（Declerck 1997: 225-227）。

また，「と」にはもう一つ「とき」とか「あと」とは異なった特徴がある。「と」を用いた(36)のような例は(37)のように「とき」とか「あと」で置き換えても自然な文である。

(36) a．彼女は後ろにいる私を見ると笑った。

b．冷蔵庫を開けると，オレンジジュースがあった。

(37) a．彼女は後ろにいる私を見たとき/あと笑った。

b．冷蔵庫を開けたとき，オレンジジュースがあった。

ところが次の(38a)を(38b)のように「とき/あと」で置き換えると非常に奇異な感じがする。

(38) a．狭い路地に曲がると，奥に木戸をかまえた裏店があった。

b．?狭い路地に曲がったとき/あと，奥に木戸をかまえた裏店があった。

これは「裏店のないときがあった」という尺度含意（scalar implicature）が生じ，恒常的な存在である裏店があったりなかったりすることになるからである。久野（1973: 117）によると，適切な「S_1 ト S_2」構文の条件は，「S_1 と S_2 によって表される出来事が，同じ観察者によって観察されえるものでなければいけない」という。この条件によると，「と」の表す継起関係は観察者の知覚体験の継起であって事実の継起ではない。

つまり，(38a)の主節は実質「裏店があるのが見えた」という意味になる[9]。尺度含意が生じて「いつも裏店が見えたわけではない」と解釈されても不自然にはならない。裏店に気が付かなかったとき，あるいは注視しないこともあり得る。

そこで，「と」が表す事態の継起のうち特に主節の表す事態を連ねていくと一種の知覚体験の列が形成され，その列は体験ごとに伸張して行く。これを図示すると次のようになる[10]。

（●は，観察者が新たに体験する知覚体験で○はすでに体験された知覚体験）

ⅰ）●・・・
ⅱ）○→●・・・
ⅲ）○→○→●・・・
ⅳ）○→○→○→●・・・
ⅴ）○→○→○→○→●・・・
ⅵ）○→○→○→○→○→●・・・
ⅶ）○→○→○→○→○→○→●・・・　⟶

図－7

こうした知覚体験の列の変化は観察主体の「運動」を表しており，前節で見た「林が終わり麦畑が始まる」といった運動記述のもとにある運動の捉え方と考えられる。また，仰向けに寝転んで雲の流れを見ているときとか橋の上から下の川の流れを見ているとき，自分が進んでいる感じがすることがある。これとは逆に動いている自分を固定すると，次の図の示すように知覚体験の方が流れて行くというように捉えることもできる[11]。

（■は観察者）

ⅰ）←■←○・・・
ⅱ）←○←■←○・・・
ⅲ）←○←○←■←○・・・
ⅳ）←○←○←○←■←○・・・
ⅴ）←○←○←○←○←■←○・・・
ⅵ）←○←○←○←○←○←■←○・・・
ⅶ）⟵　←○←○←○←○←○←○←■←○・・・

図－8

このような捉え方をもとにしたのが，「風景が動き出す」といった運動記述であると言える。このことは，「と」が表す関係を複数つなぎ合わせて行けば，「近づく」という連続的な運動が記述できる可能性を示している。

3．継起関係による極限の記述

第1節でも見たが，Courant and Robbins (1996: 292) は，数列の極限の動的な捉え方について次のように述べている。

> Our intuition suggests a “dynamic” idea of a limit as the result of a process of “motion”: we move on through the row of integers 1, 2, 3, …, n, … and then observe the behavior of the sequence a_n. We feel that the approach $a_n \rightarrow a$ should be observable.

ここで 1, 2, 3, …, n, … は「無限に（infinitely）続く」ことを表しており，$a_n \rightarrow a$ は「限りなく近づく（approach indefinitely)」ということを表している。「無限に」とか「限りなく」といった表現は取りあえず除外して，「近づく」という運動が 2.2 節で考察した知覚体験の継起にもとづく運動記述によってどのように表されるかを見てみる。

まず，ある対象Tに近づいている場合，Tの「見え」が段々と大きくなっていくことによって近づくことが知覚体験として捉えられる。従って，「Tが段々と大きくなる」と言えば，「進むと，Tがより大きく見える」という継起関係の連続として「近づく」という運動を記述することになる。つまり「より大きく見える」ということは「より近くに見える」ということであるので，継起関係を「進むと，より近くに見える」と言い換えることができる。すると，「段々近くに見える」という運動記述を，「近くに見える」という見えDの列として表すことができる。

(39)　D_1, D_2, D_3, …D_n, …D_t

これを見えの列の拡張として示すと次のようになる[12]。

D_1
D_1, D_2
D_1, D_2, D_3
………………………
D_1, D_2, D_3, ………………D_n
………………………………………
D_1, D_2, D_3, ………………D_n, ………………D_t

図－9

数列の運動記述では，例えば 1, 1/2, 1/3, 1/4, …, 1/n, … の場合，次のように「どんどん先に進む」と「段々小さくなる」という二つの運動が並行して用いられている。

(40)　As we go out farther and farther in the sequence, the terms become smaller and smaller.

（Courant and Robbins 1996：290）

「進むと，より近くに見える」という継起関係でも「進む」という部分を取り出せば，もう一つの運動記述を作ることができる。つまり，「進む」をＰとすると，次のような系列が考えられる。

(41)　P_1, P_2, P_3, …P_n, …P_t

このＰの進行列も図－9のような列の拡張として表すことができる。

「Ｔに近づく」という運動は運動主体を固定すると「Ｔが近づいてくる」運動として見ることができる。この場合，見えＤの列は「近さ」の減少過程として捉えることができる。この減少過程とＰ列の拡張とを合わせて表記すると次のようになる。（Ｐを矢印，「近さ」を直線で表している。）

$\to P_1$　　　　　　　　　　D_1____________________T
$\to P_1 \to P_2$　　　　　　　　D_2__________________T
$\to P_1 \to P_2 \to P_3$　　　　　　D_3________________T
・・・・・・・・　　　　　　　　・・・・・・・・・
$\to P_1 \to P_2 \to P_3 \ldots \to P_n$　　　　D_n__________T
・・・・・・・・　　　　　　　　・・・・・・・・・・・
$\to P_1 \to P_2 \to P_3 \ldots P \to_n, \ldots \to P_t$　　　　D_t T

図－10

この図は，「どんどん進むと，Ｔが段々近づいてくる」といった運動記述を表している。

ここで1節の図－1で言及した Lakoff and Núñez（2000：189）の FIGURE 9.1 の一部を取り出してみる[13)]。

0　　1/2　2/3　3/4　n/n+1　1

$S_1=\{1/2\}$　　　　$R_1=\{r:0<r<1/2\}$
$S_2=\{1/2, 2/3\}$　　　　$R_2=\{r:0<r<1/3\}$
$S_3=\{1/2, 2/3, 3/4\}$　　　　$R_3=\{r:0<r<1/4\}$
…………　　　　……………………
$S_n=\{1/2, 2/3, 3/4, \ldots, n/(n+1)\}$　　　　$R_n=\{r:0<r<1-n/(n+1)\}$
……………　　　　……………………
$S_\infty=\{1/2, 2/3, 3/4, \ldots, n/(n+1), \ldots\}$　　　　$R_\infty=\varnothing$

図－11

この図は図－10と同じ形をしており，列 S_n の拡張は進行運動を表し，列 R_n「近さ」の減少過程を表している。このことは数列の運動記述は「と」による知覚体験の継起がもとになっていることを示している。つまり，無限メタファーにおける「行為とか状態の繰り返し過程」というのは具体的には知覚体験の継起であるといえる。

4．まとめ

第1節では，数列とか関数の極限は直観的な運動としての捉え方から ε-δ 論法による静的な捉え方に変わったが，数列の極限については動的な捉え方にもとづいた厳密な記述が可能であることを見た。第2節では日常言語における運動の記述を見たが，そこでは「と」による知覚体験の継起の記述が大元にあり，それから見えの変化による主体の運動記述が生まれ，さらに軌跡による運動記述が生まれることを見た。第3節では，Lakoff and Núñez（2000）の運動にもとづく数列記述を見たが，その記述は「と」によって作り出される知覚体験の継起がもとになっている。「と」が一種の静止画像を作り，その静止画像を連ねることにより連続した運動の記述が可能になるのである。

注

1）虚構移動については次の1.2節および2.1節で順次説明して行く。詳しくは，Talmy, L.（1988）や Lakoff and Núñez（2000：37-39）を参照のこと。

2）Lakoff and Núñez（2000：189）の FIGURE 9.1 で $R_n=\{r:0<r<n/(n+1)\}$ となっているのは $R_n=\{r:0<r<1-n/(n+1)\}$ の間違いである。

3）図－1および後に続く図－2, 3, 4, 5, 6は平井崇晴氏から提供をうけたものである。

4）この証明は簡単で，斎藤正彦（2002：254），押川・阪口（2011：177）などにある。

5）(12b)は本多（2005：34）からの引用。

6）(18)は Langacker（1990：20）の例。

7）「と」についてのまとまった記述および議論は，久野（1973：114-121），坪本（1998：120-133）などに見られる。なお，この節は（中島 2001a, 2001b, 2002）をもとにしている。

8）そうした when の用法については Declerck（1997：212-228），坪本（1998：134-146）が詳しい。

9）英語では次の例のように From… が知覚体験の継起を表すことがある。

i. From the top of the bank, the thousands upon thousand of flickering lanterns floating downstream were turning the surface of the river red.

（*Two Little Girls Called Ida* tr. by P. Bush）

土手の上から川面を見ると，いく百ともしれぬとうろうは，真っ赤に川面をうずめ，光をうつしてまたたきながら，しずかによりそい流れていく。

（松谷みよこ「ふたりのイーダ」）

さらに，次の例では知覚体験にもとづく判断が続いている。

ii. From the look of the sky, which was filled with fat black clouds, there would soon be a thunderstorm.

（M. Ende *Momo* tr. by J. M. Brownjohn）

10）知覚体験の継起については植村（2002）の第三章，第四章が参考になる。

11）図－7，8は，中島（2001b）で用いた図を少し修正したものである。中山（2003：148-149）では，知覚体験を「印象」と呼び，印象列の拡張として同じよう

な図を用いて運動を捉えている。

12）中山（2003：148-149）は，図－9のような構造を「統合的印象構造」と呼び，次のように述べている：「統合的印象構造は動的時間をそのまま表すのではなく，動的時間の軌跡を描いているのである。私がここで軌跡の記述で満足しているのは，「時間の動性」そのものは，「語りえないもの」，「つまり，語りえず示すことしかできないもの」に属すると思うからである。」

ここでの「動的時間」は「運動」と読み換えることができると思う。つまり，運動の軌跡は記述できても運動そのものは記述できないのである。運動そのものは，「n をドンドン大きくすると x_n は a にドンドン近づく（森毅『位相のこころ』）のように［dondon］といった音でもってアイコニックに表すしか方法がないのかも知れない。

13）図－11は，数列 $\{x_n\}=n/(n+1)$ をもとに作られた自然数を項の集合に対応させる関数 $\mathrm{S_n}$ と，自然数に項と極限値との距離を対応させる関数 $\mathrm{R_n}$ とから構成されている。変数 ε を 1/2 から 0 の実数直線上を走らせたとすると，ε が距離の列 $\mathrm{R_n}$ の上を移動する運動を考えることができる。

$$\varepsilon\in\mathrm{R_1},\ \varepsilon\in\mathrm{R_2},\ \varepsilon\in\mathrm{R_3},\ \cdots\ \varepsilon\in\mathrm{R_n},\ \cdots\ \varepsilon\in\mathrm{R_\infty}$$

この運動ともう一つの運動 $\mathrm{S_n}$ を併せて論理式で表すと次のようになる。

i）$0<\varepsilon<1/2$

$$\forall\varepsilon\,\exists N\in\mathbf{N}[\forall n\leqq N[n/(n+1)\in\mathrm{S_n}\wedge\varepsilon\in\mathrm{R_n}]\wedge\forall n>N[n/(n+1)\in\mathrm{S_n}\wedge\varepsilon\notin\mathrm{R_n}]]$$

これは $\mathrm{R_n}$ に含まれる場合と含まれない場合とに分けることができる。

ii）$\forall\varepsilon\,\exists N\in\mathbf{N}[\forall n\leqq N[n/(n+1)\in\mathrm{S_n}\wedge\varepsilon\in\mathrm{R_n}]\wedge\forall\varepsilon\,\exists N\in\mathbf{N}\,\forall n>N[n/(n+1)\in\mathrm{S_n}\wedge\varepsilon\notin\mathrm{R_n}]]$

含まれない式から次を取り出すことができる。

iii）$\forall\varepsilon\,\exists N\in\mathbf{N}\,\forall n>N[\varepsilon\notin\mathrm{R_n}]$

これは，ε-δ 論法による極限の定義になっている。

iv）$\forall\varepsilon\,\exists N\in\mathbf{N}\,\forall n[n\geqq N\rightarrow|n/(n+1)-1|<\varepsilon]$

このことから Lakoff and Núñez（2000：189）の FIGURE 9.1 における運動をもとにした数列の記述は ε-δ 論法による極限の定義を含んでいるといえる。

以上から分かるように ε-δ 論法を取り出すのに $\mathrm{S_n}$ は全く関与していない。これは $\mathrm{R_n}$ と $\mathrm{S_n}$ とが対応はしているが二つの独立した運動（two coordinate trajectors in motion）として定義されているからである（Lakoff and Núñez 2000：191）。$\mathrm{S_n}$ を関与させるには，距離を $\mathrm{S_n}$ を変数とする関数の値として定義すれば良い。

v）$\mathrm{R(S_n)}=\{r:0<r<n/(n+1)\}$

この関数を使うと (i) は次のように書き替えられる。

vi）$\forall\varepsilon\,\exists N\in\mathbf{N}[\forall n\leqq N[n/(n+1)\in\mathrm{S_n}\wedge\varepsilon\in\mathrm{R_n}\mathrm{R(S_n)}]\wedge\forall n>N[n/(n+1)\in\mathrm{S_n}\wedge\varepsilon\notin\mathrm{R(S_n)}]]$

詳しく論じることはできないが，極限への収束は，認知科学的な問題と数学の問題とは区別すべきである。認知科学においては，収束を運動という動的なものとして捉えるか静的なものとして捉えるかが問題になる。しかし，数学では，真偽が判定できる命題として表現できるかどうかが問題となり，その結果として ε-δ 論法が生まれたのである。

参考文献

本多啓（2005）『アフォーダンスの認知意味論―生態心理学から見た文法現象』東京大学出版会

久野暲（1973）『日本文法研究』大修館

松本曜（1997）「空間移動の言語表現とその拡張」田中茂範・松本曜（1997）『空間と移動の表現』研究社出版，第Ⅱ部，pp.125-230.

中島信夫（2001a）「時間関係を表す接続詞の働き」『甲南大学紀要』文学編 116　英語学英米文学特集2001

中島信夫（2001b）「具象概念から抽象概念のメタファー的構成―時間概念の場合―」『私学研修』第157・158号，105-118.

中島信夫（2002）「節間の時間関係と時間概念について」『日本語・英語・中国語における節構造の比較研究』甲南大学綜合研究所　叢書　67 pp.37-98.

中山康雄（2003）『時間論の構築』東京：勁草書房

押川元重・阪口紘次（2011）『改訂版基礎微分積分』培風館

斎藤正彦（2002）『数学の基礎：集合・数・位相』東京大学出版会

坪本篤朗（1998）「文連結の形と意味と語用論」赤塚紀子・坪本篤朗（1998）『モダリティと発話行為』研究社出版，第Ⅱ部，pp.99-193.

植村恒一郎（2002）『時間の本姓』勁草書房

Courant, R. H. Robbins（revised by I. Stewart）(1996) *What is Mathematics?An Elementary Approach to Ideas and Methods*, Oxford: Oxford University Press.

Declerck, R. (1997) When-*Clauses and Temporal Structure*, New York: Routledge.

Lakoff, G. and R. E. N Núñez (2000) *Where Mathematics Comes From: How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*, New York: Basic Books.

Langacker, R. W. (1986) “Abstract Motion,” *BLS 12*, pp. 455-471.

Langacker, R. W. (1990) “Subjectification,” *Cognitive Linguistics* 1-1, 5-38.

Núñez, R. E. (2005) “Creating Mathematical Infinities: Metaphor, Blending, and the Beauty of Transfinite Cardinals,” *Journal of Pragmatics* 37, 1717-1741.

Núñez, R. E. and G. Lakoff (1998) “What Did Weierstrass Really Define?: The Cognitive Structure of Natural and ε-δ Continuity, *Mathematical Cognition*, 4(2), 85-101.

Sweetser, Eve E. (1997) “Role and Individual Interpretations of Change Predicates,” in Nuyts, J. and E. Pederson (1997) *Language and Conceptualization*, Cambridge: Cambridge University Press, 116-136.

Talmy, L. (1988) “The Relation of Grammar to Cognition,” in Rudzka-Ostyn, B. ed. (1988) *Topics in Cognitive Linguistics*. Amsterdam: John Benjamins Publishing Company, pp.165-205.